A.I. LEONTIEV

THÉORIE DES ÉCHANGES DE CHALEUR ET DE MASSE

A.I. LEONTIEV

THÉORIE DES ÉCHANGES DE CHALEUR ET DE MASSE

Au 150-e anniversaire de
l'Ecole Technique Supérieure
Bauman de Moscou (1830-1980)

PRÉFACE

L'essor rapide des techniques nouvelles fait que l'exploration dans le domaine technique fait accroître sans cesse l'intérêt porté aux échanges de chaleur et de masse.

Pour l'efficacité et la fiabilité des moteurs thermiques (moteurs-fusées, moteurs atomiques, réacteurs à plasma, générateurs magnétohydrodynamiques, etc.) l'organisation correcte du système de refroidissement de la veine du moteur est essentielle et parfois décisive; or, ceci est en définitive déterminé par la sûreté des méthodes de calcul des échanges de chaleur. La résolution de nombreux problèmes de la technique cosmique (protection thermique, système d'assurance de la vie), de la technique d'aviation (barrière thermique des vitesses hypersoniques du vol), de l'énergétique (centrales thermiques à paramètres supercritiques) est indissolublement liée aux réalisations de la théorie des échanges thermiques.

La théorie des échanges de chaleur et de masse est une des branches importantes de la physique industrielle. Elle s'inspire des disciplines telles que la physique, la thermodynamique et la dynamique des gaz.

L'apport des savants soviétiques dans ce domaine est d'une grande importance; il faut signaler entre autres M. Kirpitchev, M. Mikhéev, A. Goukhman, G. Kroujiline, S. Koutatéladzé, A. Lykov, B. Pétoukhov, D. Labountsov, V. Ievlev, V. Avdouevski, A. Joukauskas, V. Soubbotine.

L'école soviétique de la théorie des échanges thermiques est créée et se développe avec succès dans les centres de recherche et établissements d'enseignement supérieur pilotes de l'Union Soviétique (Institut Energétique de Moscou, Institut d'Aviation de Moscou, Ecole Technique Supérieure de Moscou, Institut de Physique Technique de Moscou, Institut du Génie Chimique de Moscou, etc.).

Cependant, l'essor impétueux de la théorie défini en premier lieu par les impératifs de la nouvelle technique fait que pratiquement tout nouveau manuel, même le plus récent, est incapable de refléter les dernières acquisitions dans le domaine des échanges thermiques

et d'initier aux méthodes modernes de calcul adoptées dans les Bureaux d'Etude.

Aussi, les auteurs, en exposant les principes théoriques, ont-ils tenté de tenir compte de dernières tendances dans ce domaine. Ainsi, dans la partie traditionnelle de la « Conductivité thermique » ils ont donné une description assez détaillée aussi bien des méthodes de résolution numérique des équations différentielles, que des méthodes analytiques générales.

La partie « Echanges thermiques par convection dans un milieu homogène » est fondée sur la théorie de la couche limite thermique qui ces derniers temps connaît un développement intense. Les formules critérielles empiriques ne sont mentionnées que dans les cas où la théorie de la couche limite ne suffit plus (dans la zone du décollement de la couche limite, lors du contournement transversal des tubes, de l'écoulement des fluides dans des tubes rugueux, etc.).

Les auteurs ont envisagé les processus des échanges thermiques dans le cas des vitesses supersoniques et hypersoniques et des réactions chimiques. La méthode de la protection thermique et chimique (refroidissement par film et par paroi poreuse), décrite avec des détails suffisants, est d'un grand intérêt pour les nouvelles techniques.

Dans le chapitre « Echange de chaleur par convection libre » est inclue la description des méthodes de résolution numérique du système d'équations différentielles.

La partie « Echange de chaleur lors du changement de phase » utilise les dernières réalisations dans ce domaine, y compris les résultats des recherches poursuivies à la chaire de Thermodynamique et de Transmission de Chaleur à l'Ecole Technique Supérieure Bauman de Moscou.

Le manuel, rédigé par un groupe de collaborateurs de la chaire, profite de l'expérience acquise par de nombreuses années d'enseignement de la Théorie des Echanges de Chaleur et de Masse aux diverses Facultés de l'Ecole Technique Supérieure Bauman de Moscou.

Les chapitres I et II sont dus à M. Samoïlov, chargé de cours, candidat ès sciences techniques; les §§ III.1 à III.10, à I. Kojinov, candidat ès sciences techniques; le chapitre IV, §§ VI.6, VI.2.2, VI.2.3, VI.2.7, VI.4.2, VI.7, VI.8, VIII.1.7, VIII.1.8, VIII.2.2, VIII.2.3, VIII.2.4, à A. Léontiev, professeur, docteur-ingénieur; le chapitre V, à S. Issaev, chargé de cours, candidat ès sciences techniques; §§ VI.1, VI.2 (sauf §§ VI.2.2, VI.2.3, VI.2.7), §§ VI.3, VI.4 (sauf § VI.4.2), à E. Chichov, chargé de cours, candidat ès sciences techniques; §§ VI.5, X.1, X.2, X.3, X.4, à V. Kofanov, chargé de cours, candidat ès sciences techniques; le chapitre VII, §§ III.11, III.12, à G. Pétrajitski, professeur, docteur-ingénieur; §§ VIII.1 (sauf §§ VIII.1.7, VIII.1.8), à V. Nikitine, chargé de cours, candidat ès sciences techniques; §§ VIII.2 (sauf §§ VIII.2.2, VIII.2.3, VIII.2.4), §§ XI.1, XI.2, IX.3, à B. Mironov, chargé de cours, candi-

dat ès sciences techniques; § IX.4, à V. Khvostov, chargé de cours, candidat ès sciences techniques.

Pour conclure, les auteurs expriment leur profonde gratitude à S. Koutatéladzé, de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., et à V. Motoulévitch, professeur, docteur-ingénieur, qui ont bien voulu faire part de leurs conseils précieux. Les auteurs seront reconnaissants pour toute remarque et suggestion qu'ils prient d'adresser à Moscou, K-51, Néglinnaïa oulitsa, nº 29/14.

Les Auteurs

INTRODUCTION

La théorie des échanges thermiques a pour objet l'étude de la propagation de la chaleur. Cette propagation se présente sous trois formes principales: conduction, convection et rayonnement.

On appelle *conductivité thermique* le transfert moléculaire de la chaleur dans un milieu continu. Ce processus apparaît dans un milieu à distribution irrégulière de la température. La chaleur est alors transmise par contact immédiat des particules de température différente, ce qui définit l'échange d'énergie entre les molécules, les atomes et les électrons libres.

La *convection* est le transfert de chaleur par les volumes de gaz ou de liquide se déplaçant dans l'espace. L'échange de chaleur entre un liquide ou un gaz et la surface d'un corps solide s'appelle échange de chaleur par convection.

Le *rayonnement thermique* est le processus de propagation de la chaleur avec les ondes électromagnétiques. Cette forme de transfert est conditionnée par la transformation de l'énergie interne de la matière en énergie de rayonnement, la transmission de ce dernier et son absorption par la matière.

L'échange de chaleur dû simultanément au transfert par rayonnement, conduction et convection se nomme échange par *rayonnement et convection*. Si la chaleur est transmise par conduction et rayonnement, on dit que cet échange se fait par *rayonnement et conduction*. Le processus d'échange de chaleur entre deux fluides caloporteurs (milieu en mouvement utilisé pour le transfert de chaleur) séparés par une paroi solide s'appelle *transfert de chaleur*.

Dans la nature et dans la technique, de nombreux processus d'échange de chaleur sont rendus plus compliqués par l'échange de masse, les transitions de phase ou changements d'état, les réactions chimiques à la surface du corps et au sein du fluide caloporteur lui-même. L'objectif principal du présent manuel est précisément l'exposé des principes de la théorie moderne des échanges de chaleur et de masse, et de leurs applications pratiques en technique.

PREMIÈRE PARTIE

CONDUCTIVITÉ THERMIQUE

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS

§ I.1. Champ thermique, gradient thermique et loi de Fourier

On appelle *champ thermique* d'un corps ou d'un système de corps l'ensemble des valeurs de la température enregistré dans son volume à un instant envisagé quelconque. L'expression mathématique du champ thermique est donnée par l'équation $F(t, x, y, z, \tau) = 0$.

Dans la pratique technique, l'intérêt est porté aussi bien sur les champs thermiques *non stationnaires* que *stationnaires*. Le premier d'entre eux varie dans l'espace et le temps, alors que le deuxième n'est fonction que des coordonnées.

La variation du champ thermique dans un espace s'observe seulement dans les directions qui coupent les surfaces de même température (surfaces isothermes), cette variation étant la plus marquée dans le sens de la normale à la surface isotherme (fig. I.1).

La limite

$$\lim_{\Delta n \to 0} \Delta t/\Delta n = \mathbf{1}_n \, \partial t/\partial n = \operatorname{grad} t \qquad (I.1)$$

s'appelle dans la théorie des échanges thermiques *gradient de température* ou *gradient thermique*, où $\mathbf{1}_n$ est le vecteur unité de la normale; n, la normale à la surface isotherme. Le gradient thermique est un vecteur dirigé suivant la normale à la surface isotherme, numériquement égal à la dérivée partielle de la température dans cette direction. Il est d'usage d'admettre que grad t est *positif* s'il est dirigé dans le sens où la température croît.

En 1804 le physicien français Biot a émis l'hypothèse d'après laquelle la quantité de chaleur qui passe par toute surface isotherme d'un solide, d'un gaz ou d'un liquide fixes dans la direction d'une autre surface isotherme, doit être proportionnelle au temps, à la surface de l'aire isotherme, à la différence de température et inversement proportionnelle à la distance entre les surfaces considérées.

L'expression mathématique de ce qui vient d'être dit s'écrit

$$d^2Q_\tau = -\lambda l_n \partial t/\partial n \, dF \, d\tau \text{ *)}, \tag{I.2}$$

où Q_τ est le vecteur de la quantité de chaleur qui passe par le corps, J ; λ, la conductivité thermique, W/(m·K) ; F, la surface (fig. I.1) perpendiculaire à la surface isotherme, m².

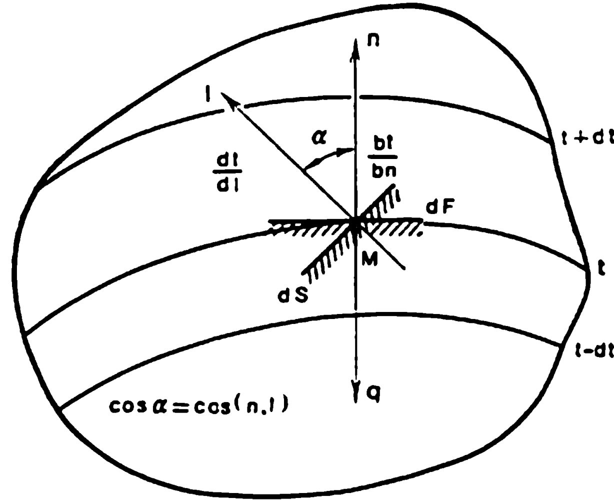


Fig. I.1. Illustration de la définition du gradient thermique et de l énonce de la loi de Fourier

Bien que la formule (I.2) généralise l'hypothèse de Biot, elle est connue comme la *loi de Fourier*.

La grandeur

$$q = \frac{d^2Q_\tau}{dF\,d\tau} = \frac{dQ}{dF} = -\lambda l_n \frac{\partial t}{\partial n}, \tag{I.3}$$

où $Q = \frac{dQ_\tau}{d\tau}$ est le vecteur du flux thermique, J/s ; q s'appelle dans la théorie des échanges de chaleur *densité du flux thermique*, W/m².

La figure I.1 montre que la dérivée de la température dans la direction l est associée au gradient thermique par la relation évidente

$$\frac{dt}{dl} = \frac{\partial t}{\partial n} \cos(n,\ l), \tag{I.4}$$

où $\cos(n,\ l)$ est le cosinus de l'angle entre la normale à la surface isotherme n et la direction l.

---

*) Le signe « moins » de (I.2) est introduit parce que d'après la deuxième loi de la thermodynamique le vecteur de la quantité de chaleur doit être orienté dans le sens de la température croissante.

Notons, d'autre part, que la dérivée de la température dans la direction l se calcule à l'aide des dérivées de la température par rapport aux coordonnées cartésiennes d'après la formule

$$\frac{dt}{dl}=\frac{\partial t}{\partial x}\cos(x,\ l)+\frac{\partial t}{\partial y}\cos(y,\ l)+\frac{\partial t}{\partial z}\cos(z,\ l), \tag{I.5}$$

où $\cos(x, l)$, $\cos(y, l)$ et $\cos(z, l)$ sont les cosinus des angles entre la direction l et les axes des coordonnées x, y, z.

Compte tenu de (I.4), la loi de Fourier I.2 peut s'écrire

$$dQ=-\lambda\frac{dt}{dl}ds, \tag{I.6}$$

où $ds = dF \cos(n, l)$ est l'aire élémentaire perpendiculaire à la direction l.

§ I.2. Conductivité thermique des matériaux

La conductivité λ de la formule (I.2) est du point de vue mathématique le coefficient de proportionnalité, dont le rôle consiste dans l'égalisation des dimensions des premier et deuxième membres de la loi de Fourier, et qui est mesurée en W/(m·K).

Du point de vue physique, la conductivité est une caractéristique thermophysique du matériau. Pour des matériaux différents et mêmes gradients thermiques, surfaces F et temps τ, la quantité de chaleur qui passe par le corps est déterminée seulement par λ. Plus la conductivité thermique est grande, plus le pouvoir du matériau de faire passer la chaleur est fort, et inversement. En d'autres termes, la conductivité est le paramètre thermophysique qui détermine le pouvoir des corps de faire passer la chaleur.

Pour le même matériau la marge de variation de la conductivité est assez large, l'allure de cette variation étant définie par plusieurs facteurs, dont la température, le taux d'impuretés, la présence de l'humidité, la pression. Généralement, la dépendance de λ de ces facteurs ne se prête pas à une analyse rigoureuse, ce qui fait que la source principale des valeurs de conductivité dignes de foi est encore l'expérience.

Conductivité des métaux et des alliages (fig. I.2). Elle varie de 2 à 450 W/(m·K), étant la plus grande pour l'argent et la plus petite pour bismuth. A mesure que la température croît, λ diminue pratiquement pour la plupart des métaux purs, l'exception n'étant faite que pour le cobalt, le béryllium et quelques autres métaux.

La conductivité thermique des métaux, tout comme leur conductivité électrique, est déterminée surtout par la diffusion des électrons libres.

Comme le montre la figure I.2, la dépendance de la conductivité thermique des alliages métalliques par rapport à la température est assez compliquée. λ dépend fortement de la présence des impuretés. D'habitude, dans un méta. pur même un taux négligeable d'autres substances réduit brusquement non

seulement sa conductivité thermique, mais aussi modifie de la façon la plus inattendue la relation entre λ et la température.

La conductivité thermique des liquides (fig. I.3) varie de 0,1 à 0,7 W/(m·K). Pour tous les liquides, sauf l'eau et la glycérine, elle diminue avec la croissance de la température.

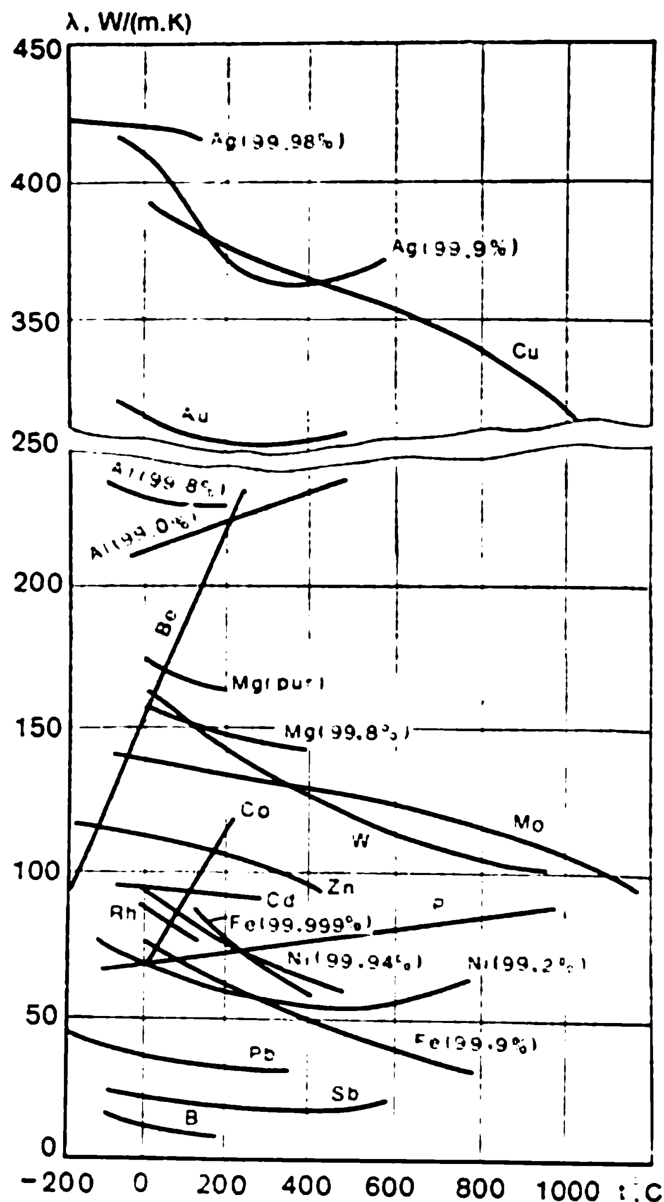


Fig. I.2. Variation de la conductivité thermique des métaux et de leurs alliages en fonction de la température

Pour les matériaux de construction et les isolants thermiques ou calorifuges (fig. I.4) **la conductivité thermique** varie de 0,023 à 2,9 W/(m·K) et augmente avec la croissance de la température.

Dans les cas courants, les matériaux à densité volumique plus grande ont une conductivité plus élevée, celle-ci dépendant également de la structure du

matériau, de sa porosité et de son humidité. La conductivité des matériaux humides est sensiblement plus élevée que celle des matériaux secs et de l'eau, pris isolément.

Les matériaux à basse valeur de la conductivité thermique [inférieure à 0,25 W/(m·K)] sont dits *calorifuges*.

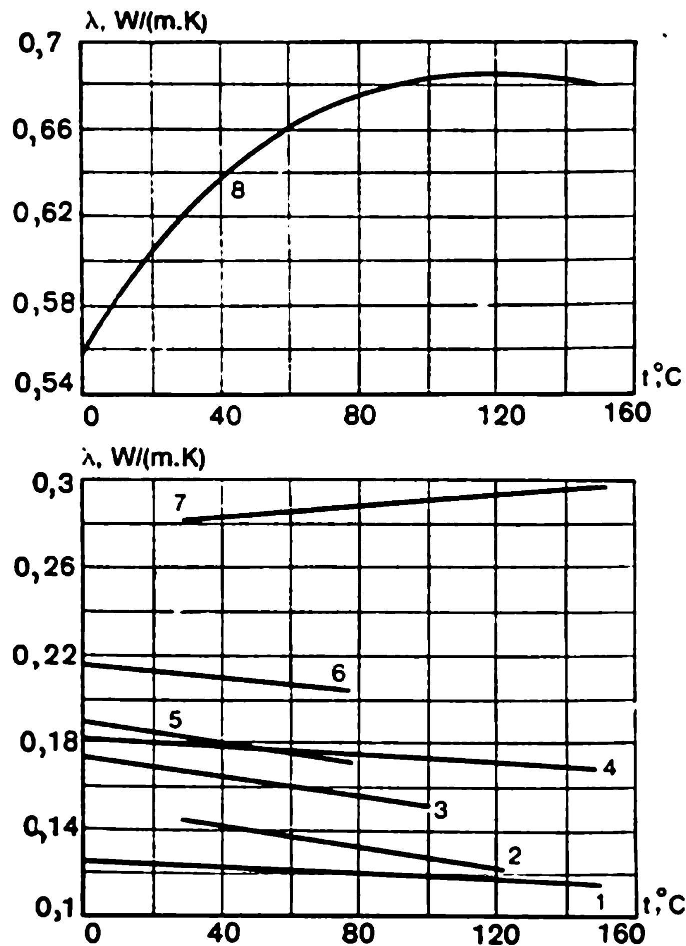


Fig. I.3. Variation de la conductivité thermique de certains liquides en fonction de la température:

1 — huile de vaseline; *2* — benzène; *3* — acétone; *4* — huile de ricin; *5* — éthanol; *6* — méthanol; *7* — glycérine; *8* — eau

La conductivité thermique des gaz (fig. I.5) augmente assez vite avec la croissance de la température: elle varie environ de 0,006 à 0,1 W/(m·K). L'exception n'est faite que pour l'hydrogène et l'hélium, dont la conductivité est de 5 à 10 fois inférieure aux autres gaz.

D'après la théorie cinétique, dans laquelle le gaz est envisagé comme un ensemble des molécules animées d'un mouvement chaotique incessant, la conductivité thermique est déterminée par la relation

$$\lambda = \bar{w}\bar{l}c_v\rho/3, \qquad (I.7)$$

où $\bar{w}$ est la vitesse moyenne de déplacement des molécules; $\bar{l}$, le libre parcours moyen des molécules.

Avec l'augmentation de la pression le produit $\bar{l}\rho$ reste constant, la conductivité thermique des gaz dépend donc peu de la pression. L'exception ne porte que sur des pressions très faibles (inférieures à 0,3 MPa) et très fortes (supérieures à 200 MPa).

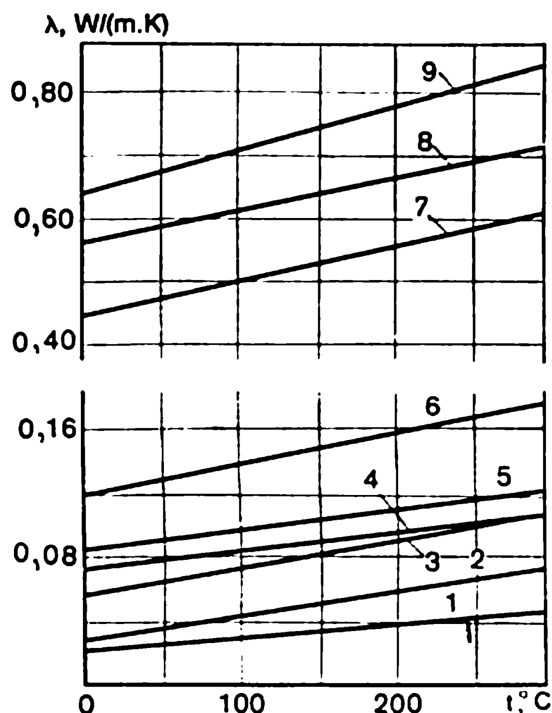


Fig. I.4. Variation de la conductivité thermique des matériaux de construction et calorifuges

1 — air; *2* — laine minérale; *3* — laine de laitier; *4* — newell; *5* — sovélite; *6* — brique de diatomie; *7* — brique rouge; *8* — brique de laitier et de béton; *9* — brique alumineuse

La vitesse moyenne du déplacement des molécules dépend de la température $\bar{w} = \sqrt{3R_\mu T/\mu}$; donc, d'après la théorie cinétique élémentaire des gaz, $\lambda \sim T^{0,5}$.

Des résultats plus précis sont donnés par la formule d'interpolation

$$\lambda = \lambda_0 \, (T/273)^{3/2}, \tag{I.8}$$

où λ_0 est la conductivité à $T = 273$ K.

La conductivité de la vapeur d'eau et d'autres gaz réels qui diffèrent sensiblement des gaz parfaits, dépend fortement aussi de la pression.

La conductivité thermique des mélanges des gaz ne respecte pas la loi d'additivité et se détermine généralement à partir des données expérimentales.

§ I.3. Equation différentielle de la conductivité thermique

C'est le premier principe de la thermodynamique exprimé sous une forme mathématique et appliqué aux corps dont l'interaction avec le milieu ambiant ne s'accompagne pas de travail extérieur quel qu'il soit.

Pour composer cette équation, examinons un corps chauffé irrégulièrement représenté sur la figure I.6. Soient S la surface de ce corps et V son volume.

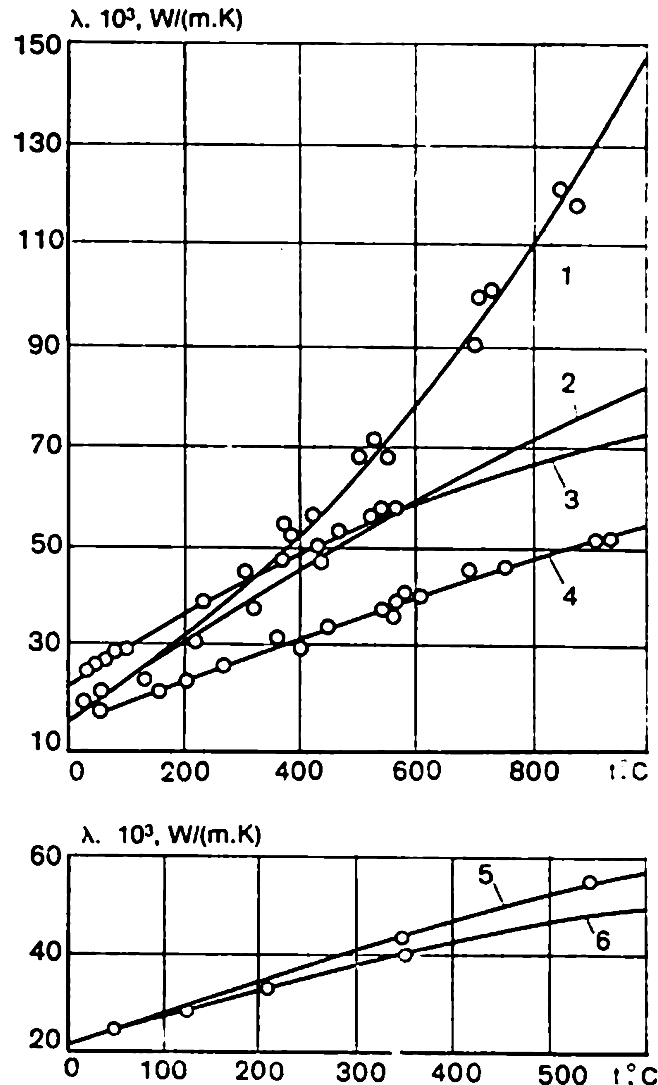


Fig. I.5. Relation entre la conductivité thermique et la température de certains gaz

1 — vapeur d'eau; *2* — gaz carbonique; *3* — air; *4* — argon; *5* — oxygène; *6* — azote

Si pour une raison quelconque, la température du corps change et devient différente de l'ambiante, entre le corps et le milieu s'amorce l'échange de chaleur.

Pour ce cas le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$Q_p + Q_V = \Delta U + L, \tag{I.9}$$

où Q_p est la quantité de chaleur reçue ou émise par la surface du corps; Q_V, la quantité de chaleur dégagée ou absorbée par le corps sous l'action des sources internes (ou des écoulements) de la chaleur; ΔU, la variation de l'énergie interne, et L, le travail réalisé par le

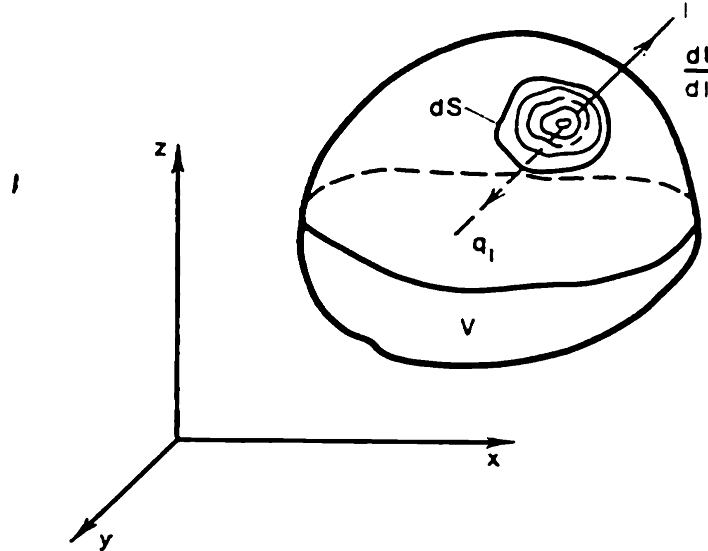


Fig. I.6. Illustration pour déduire l'équation différentielle de la conductivité thermique

corps sur le milieu ambiant, ou inversement. Par définition adoptée le travail mécanique est nul: $L = 0$.

La quantité de chaleur Q_p peut se calculer d'après la formule

$$Q_p = \int_S \int_0^{\tau} dQ\, d\tau, \quad \text{(I.10)}$$

et Q_V d'après la relation

$$Q_V = \int_V \int_0^{\tau} q_V\, dV\, d\tau, \quad \text{(I.11)}$$

où q_V est la puissance spécifique des sources internes (écoulements) de la chaleur, W/m³.

La variation de l'énergie interne du corps

$$\Delta U = \int_V \int_0^{\tau} c_V \rho \frac{\partial t}{\partial \tau}\, dV\, d\tau. \quad \text{(I.12)}$$

Compte tenu des équations (I.10), (I.11) et (I.12), l'équation (I.9) devient

$$\int_S \int_0^{\tau} dQ\, d\tau + \int_V \int_0^{\tau} q_V dV\, d\tau = \int_V \int_0^{\tau} c_V \rho \frac{\partial t}{\partial \tau}\, dV\, d\tau. \quad \text{(I.13)}$$

Conformément aux formules (I.5) et (I.6), le premier terme du premier membre de (I.13) peut être développé de la façon suivante

$$\int_S \int_0^\tau dQ\, d\tau = -\int_S \int_0^\tau \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \cos(x,\ l) + \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \cos(y,\ l) + \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \cos(z,\ l)\right] dS\, d\tau. \qquad \text{(I.14)}$$

En appliquant à (I.14) la transformation d'Ostrogradski, on obtient

$$\int_S \int_0^\tau dQ\, d\tau = \int_V \int_0^\tau \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\right)\right] dV\, d\tau. \qquad \text{(I.15)}$$

En portant ensuite (I.15) dans (I.13), on a

$$\int_V \int_0^\tau \left[c_V \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\right) - q_V\right] dV\, d\tau = 0. \qquad \text{(I.16)}$$

Si toutes les caractéristiques de (I.16) sont des fonctions continues des coordonnées et du temps, lorsque l'intégrande est nulle, l'intégrale s'annule. Donc

$$c_V \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\right) + q_V. \qquad \text{(I.17)}$$

(I.17) s'appelle *équation différentielle de Fourier-Kirchhoff*; en un point quelconque du corps elle associe les variations temporelles et spatiales.

Lorsque la conductivité thermique est constante, l'équation (I.17) devient plus simple

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_V}{c_V \rho}, \qquad \text{(I.18)}$$

où $a = \lambda/(c_V \rho)$ est la conductivité thermique à volume constant, m²/s.

La diffusivité thermique qui figure dans (I.18) est un paramètre thermophysique. Elle caractérise le pouvoir du matériau d'égaliser la température. Ceci signifie que les corps possédant une diffusivité plus élevée s'échauffent (se refroidissent) plus vite que ceux pour lesquels elle est plus faible.

La diffusivité thermique varie de $1{,}4 \cdot 10^{-7}$ pour les huiles à $0{,}2 \cdot 10^{-3}$ m²/s pour l'argent.

(I.18) est une équation différentielle linéaire aux dérivées partielles du deuxième ordre de type parabolique. Pour des corps anisotropes, dont la conductivité thermique dépend de la direction, l'équation de Fourier-Kirchhoff se met sous la forme

$$c_V\rho\frac{\partial t}{\partial\tau}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda_i\frac{\partial t}{\partial x_i}\right)+q_V. \qquad (I.19)$$

Si dans un corps anisotrope les grandeurs λ_i et c_V ne dépendent pas de la température, la transformation $x_i=x_i'\sqrt{a}$ ramène l'équation (I.19) à la forme (I.18).

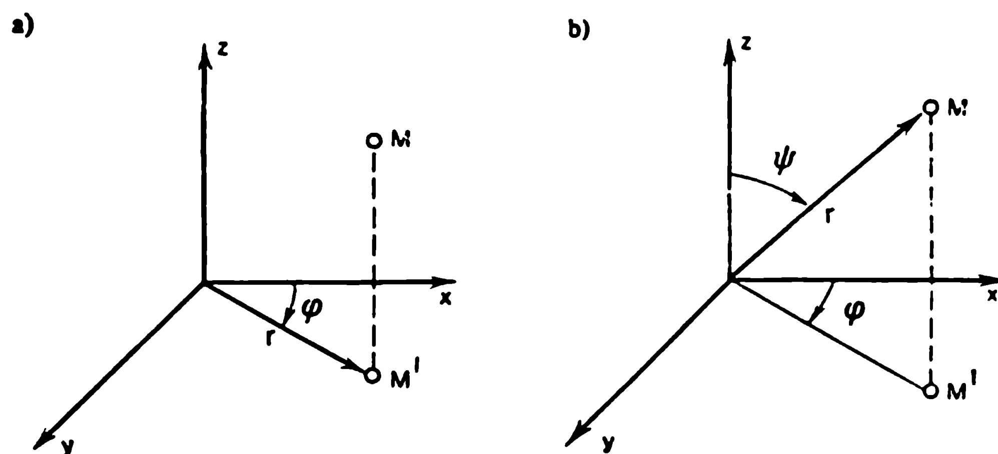


Fig. I.7. Coordonnées cylindriques (*a*) et sphériques (*b*)

L'équation différentielle de la conductivité thermique (I.17) s'écrit

en coordonnées cylindriques (fig. I.7, *a*)

$$c_V\rho\frac{\partial t}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{\lambda}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial z}\right)+q_V \qquad (I.20)$$

et pour $\lambda=\text{const}$

$$\frac{\partial t}{\partial\tau}=a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)+\frac{q_V}{c_V\rho}; \qquad (I.21)$$

en coordonnées sphériques (fig. I.7, *b*)

$$c_V\rho\frac{\partial t}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{2\lambda}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\psi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\lambda\frac{\partial t}{\partial\varphi}\right)+\frac{1}{r^2\sin\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\lambda\sin\psi\frac{\partial t}{\partial\psi}\right)+q_V \qquad (I.22)$$

et pour $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\psi}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r^2 \sin\psi}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\sin\psi\frac{\partial t}{\partial \psi}\right)\right] + \frac{q_V}{c_V\rho}. \quad \text{(I.23)}$$

§ I.4. Conditions d'univalence

L'équation (I.17) obtenue au § I.3 décrit une multitude de phénomènes de conductivité thermique. Pour en dégager un et établir sa description mathématique complète, il faut ajouter à (I.17) les conditions d'univalence qui incluent les conditions géométriques, physiques, temporelles et aux limites.

Les *conditions géométriques* déterminent la forme et les dimensions du corps, siège du processus envisagé.

Les *conditions physiques* sont définies par les paramètres thermophysiques du corps λ_1, c_V et la distribution des sources de chaleur internes.

Les *conditions temporelles* (*initiales*) indiquent la distribution de la température à l'instant initial.

Les *conditions aux limites* décrivent les traits particuliers de la marche du processus à la surface du corps. Elles varient suivant le mode de leur donnée.

Conditions aux limites du Ier *genre*. Dans ce cas on donne à chaque instant la répartition de la température à la surface du corps

$$t_p = f(x_p, y_p, z_p, \tau), \quad \text{(I.24)}$$

où t_p est la température à la surface du corps; x_p, y_p, z_p, les coordonnées à la surface du corps.

Dans le cas particulier où la température de la surface du corps ne change pas dans le temps, $t_p = f(x_p, y_p, z_p)$, et si elle est constante suivant toute la surface, $t_p = \text{const}$.

Conditions aux limites du IIe *genre*. Pour chaque point de la surface du corps et à chaque instant on donne la densité du flux thermique, c'est-à-dire

$$q_p = f(x_p, y_p, z_p, \tau). \quad \text{(I.25)}$$

Dans un cas particulier, dans celui par exemple de chauffage des pièces métalliques dans des fours à haute température, $q_p = \text{const}$.

Conditions aux limites du IIIe *genre*. On donne les températures du milieu t_0 et les conditions d'échange de chaleur de ce milieu avec la surface du corps.

L'échange de chaleur entre le milieu et le corps est un processus de complexité exceptionnelle et dépend de nombreux facteurs. Dans

la deuxième partie du livre on l'étudie de près. Pour décrire l'intensité de cet échange, on utilise l'hypothèse de Newton-Riehman d'après laquelle

$$q_p = \alpha (t_p - t_0), \tag{I.26}$$

où α est le coefficient de proportionnalité, appelé coefficient de transmission de chaleur, $W/(m^2 \cdot K)$.

En vertu de la formule (I.26), ce coefficient est égal en valeur à la quantité de chaleur émise ou absorbée par unité de surface d'un corps par unité de temps pour un écart de température d'un degré entre la surface et le milieu ambiant.

Compte tenu de (I.26) et (I.3), la condition aux limites du IIIe genre s'écrit

$$\left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_p = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_p - t_0). \tag{I.27}$$

Lorsque le coefficient de transmission de chaleur est grand (par exemple, lorsqu'un liquide est en ébullition à la surface d'un corps), les conditions aux limites du IIIe genre deviennent conditions aux limites du Ier genre, puisque dans ce cas la température à la surface s'égalise pratiquement avec celle du liquide.

Conditions aux limites du IVe *genre*. Elles s'énoncent en partant de l'égalité des flux thermiques qui passent par la surface de contact des corps, c'est-à-dire

$$\lambda_1 \left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{p1} = \lambda_2 \left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{p2}. \tag{I.28}$$

Lorsque le contact thermique est parfait, au droit de contact les deux corps ont la même température, c'est-à-dire les isothermes passent incessamment d'un corps dans l'autre, les gradients thermiques en ces points vérifiant la condition (I.28).

L'équation différentielle (I.17) et les conditions d'univalence donnent une description mathématique complète d'un problème concret de conductivité thermique. Ce problème peut être résolu par la méthode analytique, numérique ou expérimentale. Dans ce dernier cas on recourt à la similitude physique ou aux analogies.

CHAPITRE II

CONDUCTIVITÉ THERMIQUE STATIONNAIRE

§ II.1. Equation différentielle générale du champ thermique unidimensionnel pour un mur plan et un cylindre indéfinis, ainsi qu'une sphère

En régime stationnaire, le champ thermique ne dépend pas du temps $\partial t/\partial \tau = 0$ et l'équation différentielle de la conductivité thermique (I.17) devient

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\right)+q_V=0. \qquad \text{(II.1)}$$

Examinons quelques cas lorsque la température dépend d'une seule coordonnée.

Mur plan indéfini (fig. II.1). C'est un corps délimité des deux côtés par des plans parallèles à grande étendue dans les directions

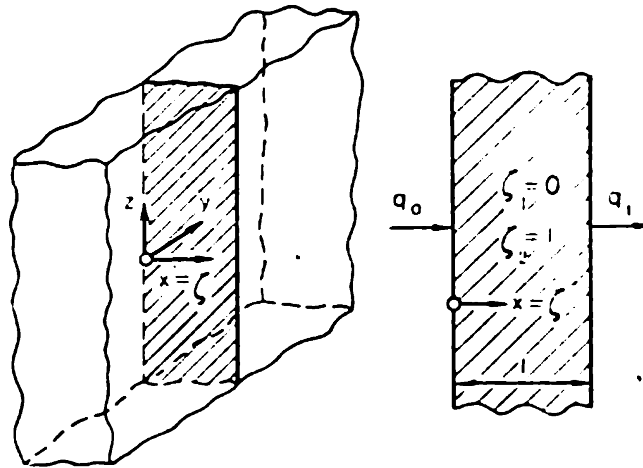


Fig. II.1. Mur plan indéfini

y et z. Si les parois latérales du mur plan indéfini sont isothermes, les variations de température dans ce mur suivant les axes y et z peuvent être négligées ($\partial t/\partial y = \partial t/\partial z = 0$), et l'équation différentielle de la conductivité (II.1) se met sous la forme

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dt}{dx}\right)+q_V=0. \qquad \text{(II.2)}$$

Un corps de forme cylindrique (fig. II.2) à grande longueur suivant l'axe des z s'appelle *cylindre indéfini* ; il peut être plein ($R_1 = 0$) ou creux ($R_1 \neq 0$).

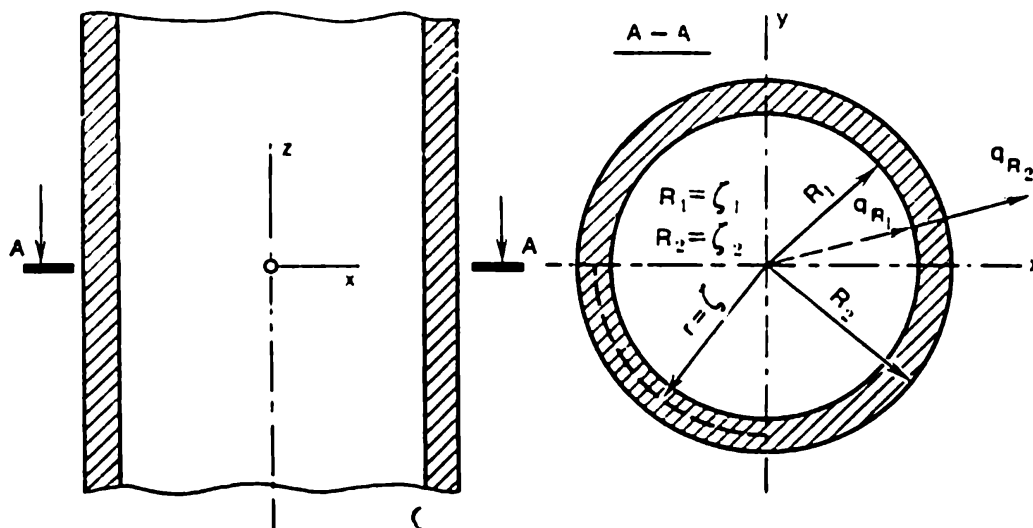


Fig. II.2. Cylindre creux indéfini

Pour les cylindres plein ou creux, lorsque les surfaces intérieures et extérieures sont isothermes, on a $\partial t/\partial z = \partial t/\partial \varphi = 0$, ($r^2 = x^2 + y^2$) et l'équation différentielle de la conductivité devient

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\lambda\frac{dt}{dr}\right)+\dot{q}_V=0. \qquad \text{(II.3)}$$

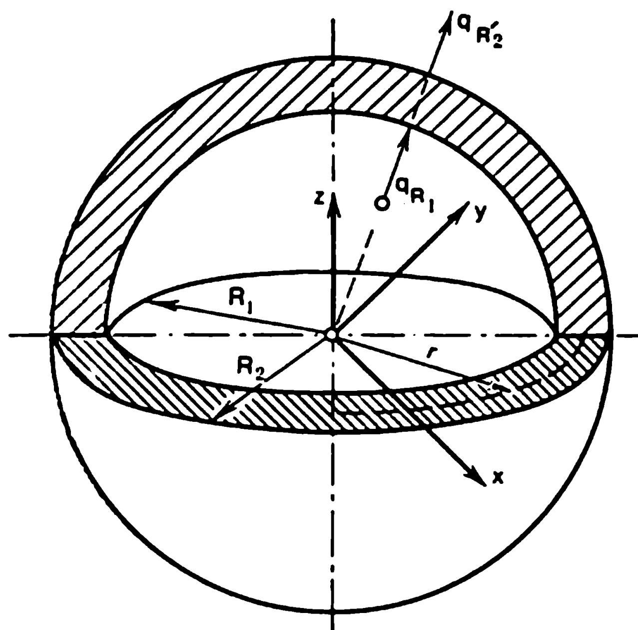


Fig. II.3. Sphère creuse

Dans le cas des surfaces intérieure et extérieure isothermes des sphères creuse et pleine (fig. II.3), on a $\frac{\partial t}{\partial \varphi}=\frac{\partial t}{\partial \psi}=0$ $(r^2=x^2+y^2+z^2)$. Aussi, pour ce cas, l'équation différentielle de la conductivité thermique s'écrit-elle

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\lambda\frac{dt}{dr}\right)+q_V=0. \tag{II.4}$$

On remarque sans peine que les équations différentielles de la conductivité thermique (II.2), (II.3) et (II.4) peuvent être réunies en une seule

$$\frac{1}{\zeta^n}\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^n\lambda\frac{dt}{d\zeta}\right)+q_V=0, \tag{II.5}$$

où ζ est la coordonnée généralisée.

Pour $\zeta=x$ $(n=0)$, l'équation différentielle (II.5) se transforme en (II.2); pour $\zeta=r$ $(n=1)$, en (II.3); et pour $\zeta=r$ $(n=2)$, en (II.4).

§ II.2. Champ thermique dans un corps à source de chaleur interne permanente dont la puissance spécifique est fonction arbitraire de la coordonnée

Dans le cas des sources internes de chaleur dépendant de la coordonnée la solution générale de l'équation différentielle unidimensionnelle de la conductivité thermique (II.5) est de la forme

$$t=C_1\int\frac{d\zeta}{\zeta^n\lambda}+C_2-\int\frac{d\zeta}{\zeta^n\lambda}\int q_V\zeta^n\,d\zeta,$$

et pour $\lambda=\text{const}$

$$t=C_1\frac{\zeta^{1-n}}{1-n}+C_2-\frac{1}{\lambda}\int\frac{d\zeta}{\zeta^n}\int q_V\zeta^n\,d\zeta, \tag{II.6}$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration.

Supposons qu'aux surfaces d'un corps l'émission de la chaleur est définie par les conditions aux limites du IIIe genre. Alors, pour calculer les constantes d'intégration de (II.6), on peut composer le système

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{dt}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_1}&=-\frac{\alpha_1}{\lambda}(t_{01}-t_{p1})\\ \left.\frac{dt}{d\zeta}\right|_{\zeta=\zeta_2}&=-\frac{\alpha_2}{\lambda}(t_{p2}-t_{02}),\end{aligned}\right\} \tag{II.7}$$

où α_1; t_{01}; α_2; t_{02} sont les coefficients de transmission de chaleur et les températures des milieux qui baignent les surfaces du corps; ζ_1 et ζ_2, les coordonnées généralisées des surfaces du corps; t_{p1}, t_{p2},

les températures inconnues des surfaces. En portant dans (II.7) la solution générale (II.6), le système devient

$$\left.\begin{aligned}\frac{C_1}{\zeta_1^n}-\frac{dA}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_1}&=-\frac{\alpha_1}{\lambda}\left(t_{01}-c_1\frac{\zeta_1^{1-n}}{1-n}-c_2+A_{\zeta=\zeta_1}\right);\\ \frac{C_1}{\zeta_2^n}-\frac{dA}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_2}&=-\frac{\alpha_2}{\lambda}\left(c_1\frac{\zeta_2^{1-n}}{1-n}+c_2-t_{02}-A_{\zeta=\zeta_2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{II.8}$$

où

$$A=\frac{1}{\lambda}\int\frac{d\zeta}{\zeta^n}\int q_V\zeta^n\,d\zeta. \tag{II.9}$$

La résolution du système (II.8) entraîne

$$C_1=\frac{t_{02}-t_{01}+A_{\zeta=\zeta_2}-A_{\zeta=\zeta_1}+\frac{\lambda}{\alpha_1}\frac{dA}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_1}+\frac{\lambda}{\alpha_2}\frac{dA}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_2}}{\frac{\lambda}{\alpha_1\zeta_1^n}+\frac{\zeta_2^{1-n}-\zeta_1^{1-n}}{1-n}+\frac{\lambda}{\alpha_2\zeta_2^n}} \tag{II.10}$$

et

$$C_2=C_1\left(\frac{\lambda}{\alpha_1\zeta_1^n}-\frac{\zeta_1^{1-n}}{1-n}\right)+A_{\zeta=\zeta_1}-\frac{\lambda}{\alpha_1}\frac{dA}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_1}+t_{01}. \tag{II.11}$$

En portant (II.10) et (II.11) dans la solution générale (II.6), on obtient la formule du champ thermique dans le corps

$$\begin{aligned}t-t_{01}=A_{\zeta=\zeta_1}-\frac{\lambda}{\alpha_1}\frac{dA}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_1}-A+\frac{K}{\lambda}\Big(t_{02}-t_{01}+A_{\zeta=\zeta_2}-A_{\zeta=\zeta_1}+\\ +\frac{\lambda}{\alpha_1}\frac{dA}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_1}+\frac{\lambda}{\alpha_2}\frac{dA}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_2}\Big)\,[\zeta^{1-n}/(1-n)+\\ +\lambda/\alpha_1\zeta_1^n-\zeta_1^{1-n}/(1-n)],\end{aligned} \tag{II.12}$$

où $K=1\Big/\left[\frac{1}{\alpha_1\zeta_1^n}+\frac{\zeta_2^{1-n}-\zeta_1^{1-n}}{\lambda(1-n)}+\frac{1}{\alpha_2\zeta_2^n}\right]$ est le coefficient de transfert de chaleur.

En dérivant (II.12) par rapport à la coordonnée ζ et en portant la dérivée ainsi obtenue dans la formule de la loi de Fourier (I.3), on obtient la formule de la densité du flux thermique

$$\begin{aligned}q=\lambda\frac{dA}{d\zeta}-\frac{K}{\zeta^n}\Big(t_{02}-t_{01}+A_{\zeta=\zeta_2}-A_{\zeta=\zeta_1}+\\ +\frac{\lambda}{\alpha_1}\frac{dA}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_1}+\frac{\lambda}{\alpha_2}\frac{dA}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_2}\Big).\end{aligned} \tag{II.13}$$

Comme nous l'avons déjà noté, avec $\alpha\to\infty$, les conditions aux limites du IIIe genre se transforment en conditions aux limites du

Tableau II.1

Formules du champ thermique et du champ de la densité du flux thermique d'un mur plan indéfini pour $q_V = \text{const}$ (fig. II.1)

nº d'ordre	Conditions aux limites	Formules
1	du Ier genre aux surfaces $x=0$ et $x=l$	$\frac{t_{p1}-t}{t_{p1}-t_{p2}}=\frac{x}{l}\left[1-\frac{q_V l^2}{2\lambda (t_{p1}-t_{p2})}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]$; $q=\frac{\lambda (t_{p1}-t_{p2})}{l}\left[1-\frac{q_V l^2}{\lambda (t_{p1}-t_{p2})}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}\right)\right]$
2	du IIIe genre aux surfaces $x=0$ et $x=l$	$\frac{t_{01}-t}{t_{01}-t_{02}}=\frac{1-\frac{q_V l^2}{\lambda (t_{01}-t_{02})}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{Bi_2}\right)}{1/Bi_1+1+1/Bi_2}\times\left(\frac{x}{l}+\frac{1}{Bi_1}\right)+\frac{q_V l^2}{2\lambda (t_{01}-t_{02})}\left(\frac{x}{l}\right)^2$; $q=\frac{\lambda (t_{01}-t_{02})}{l}\left[\frac{1-\frac{q_V l^2}{\lambda (t_{01}-t_{02})}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{Bi_2}\right)}{1/Bi_1+1+1/Bi_2}+\frac{q_V l^2}{\lambda (t_{01}-t_{02})}\left(\frac{x}{l}\right)\right]$, où $Bi_1=\alpha_1 l/\lambda$ et $Bi_2=\alpha_2 l/\lambda$ sont les nombres de Biot
3	du IIe genre à la surface $x=0$ et du I^e genre à la surface $x=l$	$t-t_{p2}=\frac{q_0 l}{\lambda}\left(1-\frac{x}{l}\right)+\frac{q_V l^2}{2\lambda}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$; $q=q_0+q_V x$
4	du Ier genre à la surface $x=0$ et du IIe genre à la surface $x=l$	$t_{p1}-t=\frac{x}{l}\left[\frac{q_l l}{\lambda}-\frac{q_V l^2}{\lambda}\left(1-\frac{x}{2l}\right)\right]$; $q=q_l-q_V l\,(1-x/l)$
5	du Ier genre à la surface $x=0$ et du IIIe genre à la surface $x=l$	$\frac{t_{p1}-t}{t_{p1}-t_{02}}=\frac{x}{l}\left[\frac{1-\frac{q_V l^2}{(t_{p1}-t_{02})}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{Bi_2}\right)}{(1+1/Bi_2)}+\frac{q_V l^2}{2\lambda (t_{p1}-t_{02})}\left(\frac{x}{l}\right)\right]$; $q=\frac{\lambda (t_{p1}-t_{02})}{l}\left[\frac{1-\frac{q_V l^2}{\lambda (t_{p1}-t_{02})}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{Bi_2}\right)}{1+1/Bi_2}+\frac{q_V l^2}{\lambda (t_{p1}-t_{02})}\left(\frac{x}{l}\right)\right]$

Tableau II.1 (suite)

n° d'ordre	Conditions aux limites	Formules
6	du IIIe genre à la surface $x=0$ et du Ier genre à la surface $x=l$	$\frac{t_{01}-t}{t_{01}-t_{p2}}=\frac{1-\frac{q_V l^2}{2\lambda(t_{01}-t_{p2})}\left(\frac{x}{l}+\frac{1}{\mathrm{Bi}_1}\right)}{1+1/\mathrm{Bi}_1}+\frac{q_V l^2}{2\lambda(t_{01}-t_{p2})}\left(\frac{x}{l}\right)^2$; $q=\frac{\lambda(t_{01}-t_{p2})}{l}\left[\frac{1-\frac{q_V l^2}{2\lambda(t_{01}-t_{p2})}}{1+1/\mathrm{Bi}_1}+\frac{q_V l^2}{\lambda(t_{01}-t_{p2})}\left(\frac{x}{l}\right)\right]$
7	du IIe genre à la surface $x=0$ et du IIIe genre à la surface $x=l$	$t-t_{02}=\frac{q_0 l}{\lambda}\left(1+\frac{1}{\mathrm{Bi}_2}-\frac{x}{l}\right)+\frac{q_V l^2}{2\lambda}\left(1+\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}-\frac{x^2}{l^2}\right)$; $q=q_0+q_V x$
8	du IIIe genre à la surface $x=0$ et du IIe genre à la surface $x=l$	$t_{01}-t=\frac{q_l l}{\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_1}+\frac{x}{l}\right)-\frac{q_V l^2}{2\lambda}\left(2\frac{x}{l}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}-\frac{x^2}{l^2}\right)$; $q=q_l-q_V l\left(1-\frac{x}{l}\right)$

Tableau II.2

Formules du champ thermique et du champ du flux thermique linéaire pour un cylindre creux indéfini avec $q_V=\text{const}$ (fig. II.2)

n° d'ordre	Conditions aux limites	Formules
1	du Ier genre aux surfaces $r=R_1$ et $r=R_2$	$\frac{t_{p1}-t}{t_{p1}-t_{p2}}=\left[1+\frac{q_V R_1^2}{4\lambda(t_{p1}-t_{p2})}\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right]\times\frac{\ln\frac{r}{R_1}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}-\frac{q_V R_1^2}{4\lambda(t_{p1}-t_{p2})}\left(1-\frac{r^2}{R_1^2}\right)$; $Q_l=-2\pi r\lambda\frac{dt}{dr}=\frac{2\pi\lambda(t_{p1}-t_{p2})}{\ln(R_2/R_1)}\times\left[1+\frac{q_V R_1^2}{4\lambda(t_{p1}-t_{p2})}\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right]+\pi q_V r^2$

Tableau II.2 (suite)

nº d'ordre	Conditions aux limites	Formules
2	du IIIe genre aux surfaces $r=R_1$ et $r=R_2$	$\frac{t_{01}-t}{t_{01}-t_{02}}=\left[1+\frac{q_V R_1^2}{4\lambda\,(t_{01}-t_{02})}\times\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}\right)\right]\times\frac{1/\mathrm{Bi}_1+\ln(r/R_1)}{1/\mathrm{Bi}_1+\ln(R_2/R_1)+1/\mathrm{Bi}_2}+\frac{q_V R_1^2}{4\lambda\,(t_{01}-t_{02})}\left(\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}-1+\frac{r^2}{R_1^2}\right)$; $Q_l=\frac{2\pi\lambda\,(t_{01}-t_{02})}{1/\mathrm{Bi}_1+\ln(R_2/R_1)+1/\mathrm{Bi}_2}\times\left[1+\frac{q_V R_1^2}{4\lambda\,(t_{01}-t_{02})}\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}\right)\right]+\pi q_V r^2$, où $\mathrm{Bi}_1=\frac{\alpha_1 R_1}{\lambda_1}$ et $\mathrm{Bi}_2=\frac{\alpha_2 R_2}{\lambda}$ sont les nombres de Biot
3	du IIe genre à la surface $r=R_1$ et du Ier genre à la surface $r=R_2$	$t-t_{p2}=\frac{q_V R_1^2}{4\lambda}\left(2\ln\frac{r}{R_2}+\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{r^2}{R_1^2}\right)-\frac{q_{R_1}R_1}{\lambda}\ln\frac{r}{R_2}$; $Q_l=2\pi\left[q_{R_1}R_1-\frac{q_V R_1^2}{2}\left(1-\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]$, où q_{R_1} est la densité du flux thermique rapportée à la surface intérieure
4	du Ier genre à la surface $r=R_1$ et du IIe genre à la surface $r=R_2$	$t_{p1}-t=\frac{q_{R_2}R_2}{\lambda}\ln\frac{r}{R_1}-\frac{q_V R_1^2}{4\lambda}\times\left(2\frac{R_2^2}{R_1^2}\ln\frac{r}{R_1}+1-\frac{r^2}{R_1^2}\right)$; $Q_l=2\pi\left[q_{R_2}R_2-\frac{q_V R_1^2}{2}\left(\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]$, où q_{R_2} est la densité du flux thermique rapportée à la surface extérieure

Tableau II.2 (suite)

nº d'ordre	Conditions aux limites	Formules
5	du Ier genre à la surface $r=R_1$ et du IIIe genre à la surface $r=R_2$	$\frac{t_{p1}-t}{t_{p1}-t_{02}}=\left[1+\frac{q_vR_1^2}{4\lambda(t_{p1}-t_{02})}\times\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right]\times\frac{\ln(r/R_1)}{1/\mathrm{Bi}_2+\ln(R_2/R_1)}-\frac{q_vR_1^2}{4\lambda(t_{p1}-t_{02})}\left(1-\frac{r^2}{R_1^2}\right)$; $Q_l=\frac{2\pi\lambda(t_{p1}-t_{02})}{1/\mathrm{Bi}_2+\ln(R_2/R_1)}\times\left[1+\frac{q_vR_1^2}{4\lambda(t_{p1}-t_{02})}\times\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right]+\pi q_vr^2$
6	du IIIe genre à la surface $r=R_1$ et du Ier genre à la surface $r=R_2$	$\frac{t_{01}-t}{t_{01}-t_{p2}}=\left[1+\frac{q_vR_1^2}{4\lambda(t_{01}-t_{p2})}\times\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}\right)\right]\frac{1/\mathrm{Bi}_1+\ln(r/R_1)}{1/\mathrm{Bi}_1+\ln(R_2/R_1)}+\frac{q_vR_1^2}{4\lambda(t_{01}-t_{p2})}\left(\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}-1+\frac{r^2}{R_1^2}\right)$; $Q_l=\frac{2\pi\lambda(t_{01}-t_{p2})}{\frac{1}{\mathrm{Bi}_1}+\ln\frac{R_2}{R_1}}\times\left[1+\frac{q_vR_1^2}{4\lambda(t_{01}-t_{p2})}\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}\right)\right]+\pi q_vr^2$
7	du IIe genre à la surface $r=R_1$ et du IIIe genre à la surface $r=R_2$	$t-t_{02}=\frac{q_{R_1}R_1}{\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_2}-\ln\frac{r}{R_2}\right)+\frac{q_vR_1^2}{4\lambda}\times\left(2\ln\frac{r}{R_2}+\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{r^2}{R_1^2}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\right)$; $Q_l=2\pi\left[q_{R_1}R_1-\frac{q_vR_1^2}{2}\left(1-\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]$
8	du IIIe genre à la surface $r=R_1$ et du IIe genre à la surface $r=R_2$	$t_{01}-t=\frac{q_{R_2}R_2}{\lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{Bi}_1}+\ln\frac{r}{R_1}\right)-\frac{q_vR_1^2}{4\lambda}\times\left(2\frac{R_2^2}{R_1^2}\ln\frac{r}{R_1}+1-\frac{r^2}{R_1^2}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}\right)$; $Q_l=2\pi\left[q_{R_2}R_2-\frac{q_vR_1^2}{2}\left(\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{r^2}{R_1^2}\right)\right]$

Tableau II.3

Formules du champ thermique et du champ du flux thermique d'une sphère creuse pour q_V=const (fig. II.3)

n° d'ordre	Conditions aux limites	Formules
1	du Ier genre aux surfaces $r=R_1$ et $r=R_2$	$\frac{t_{p1}-t}{t_{p1}-t_{p2}}=\frac{1+\frac{q_V R_1^2}{6\lambda(t_{p1}-t_{p2})}(1-R_2^2/R_1^2)}{R_2/R_1-1}\times(R_2/R_1-R_2/r)-\frac{q_V R_1^2}{6\lambda(t_{p1}-t_{p2})}\times\left(1-\frac{r^2}{R_1^2}\right)$; $Q=-4\pi r^2\lambda\frac{dt}{dr}=\frac{4\pi\lambda R_2(t_{p1}-t_{p2})}{R_2/R_1-1}\times\left[1+\frac{q_V R_1^2}{6\lambda(t_{p1}-t_{p2})}(1-R_2^2/R_1^2)\right]+\frac{4}{3}\pi q_V r^3$
2	du IIIe genre aux surfaces $r=R_1$ et $r=R_2$	$\frac{t_{01}-t}{t_{01}-t_{02}}=\left[1+\frac{q_V R_1^2}{6\lambda(t_{01}-t_{02})}\times\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right]\times\frac{(1/\mathrm{Bi}_1)R_2/R_1+R_2/R_1-R_2/r}{(1/\mathrm{Bi}_1)R_2/R_1+R_2/R_1-1+1/\mathrm{Bi}_2}-\frac{q_V R_1^2}{6\lambda(t_{01}-t_{02})}\left(1-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}-\frac{r^2}{R_1^2}\right)$; $Q=\frac{4\pi\lambda R_2(t_{01}-t_{02})}{(1/\mathrm{Bi}_1)R_2/R_1+R_2/R_1-1+1/\mathrm{Bi}_2}\times\left[1+\frac{q_V R_1^2}{6\lambda(t_{01}-t_{02})}\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\times\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right]+\frac{4}{3}\pi q_V r^3$, où $\mathrm{Bi}_1=\alpha_1R_1/\lambda$ et $\mathrm{Bi}_2=\alpha_2R_2/\lambda$ sont les nombres de Biot
3	du IIe genre à la surface $r=R_1$ et du Ier genre à la surface $r=R_2$	$t-t_{p2}=\frac{q_{R_1}R_1^2}{\lambda R_2}\left(\frac{R_2}{r}-1\right)+\frac{q_V R_1^2}{6\lambda}\times\left(\frac{R_2^2}{R_1^2}-2\frac{R_1}{r}+2\frac{R_1}{R_2}-\frac{r^2}{R_1^2}\right)$; $Q=4\pi[q_{R_1}R_1^2-q_V R_1^3(1-r^3/R_1^3)/3]$, où q_{R_1} est la densité du flux thermique rapportée à la surface intérieure

Tableau II.3 (suite)

n° d'ordre	Conditions aux limites	Formules
4	du Ier genre à la surface $r=R_1$ et du IIe genre à la surface $r=R_2$	$t_{p1}-t=\frac{q_{R_2}R_2^2}{\lambda R_1}\left(1-\frac{R_1}{r}\right)-\frac{q_V R_2^2}{6\lambda}\times\left(2\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_1^2}{R_2^2}-2\frac{R_2}{r}-\frac{r^2}{R_2^2}\right)$; $Q=4\pi\left[q_{R_2}R_2-q_V R_2^3\left(1-\frac{r^3}{R_2^3}\right)/3\right]$, où q_{R_2} est la densité du flux thermique rapportée à la surface extérieure
5	du Ier genre à la surface $r=R_1$ et du IIIe genre à la surface $r=R_2$	$\frac{t_{p1}-t}{t_{p1}-t_{02}}=\left[1+\frac{q_V R_1^2}{6\lambda\,(t_{p1}-t_{02})}\times\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right]\frac{R_2/R_1-R_2/r}{R_2/R_1-1+1/\mathrm{Bi}_2}-\frac{q_V R_1^2}{6\lambda\,(t_{p1}-t_{02})}\left(1-\frac{r^2}{R_1^2}\right)$; $Q=\frac{4\pi\lambda R_2\,(t_{p1}-t_{02})}{R_2/R_1-1+1/\mathrm{Bi}_2}\left[1+\frac{q_V R_1^2}{6\lambda\,(t_{p1}-t_{02})}\times\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\right]+\frac{4}{3}\pi q_V r^3$
6	du IIIe genre à la surface $r=R_1$ et du Ier genre à la surface $r=R_2$	$\frac{t_{01}-t}{t_{01}-t_{p2}}=\left[1+\frac{q_V R_1^2}{6\lambda\,(t_{01}-t_{p2})}\times\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}\right)\right]\times\frac{(1/\mathrm{Bi}_1)\,R_2/R_1+R_2/R_1-R_2/r}{(1/\mathrm{Bi}_1)\,R_2/R_1+R_2/R_1-1}-\frac{q_V R_1^2}{6\lambda\,(t_{01}-t_{p2})}\left(1-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}-\frac{r^2}{R_1^2}\right)$; $Q=\frac{4\pi\lambda R_2\,(t_{01}-t_{p2})}{(1/\mathrm{Bi}_1)\,R_2/R_1+R_2/R_1-1}\times\left[1+\frac{q_V R_1^2}{6\lambda\,(t_{01}-t_{p2})}\left(1-\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}\right)\right]+\frac{4}{3}\pi q_V r^3$
7	du IIe genre à la surface $r=R_1$ et du IIIe genre à la surface $r=R_2$	$t-t_{02}=\frac{q_{R_1}R_1^2}{\lambda R_2}\left(\frac{R_2}{r}-1+\frac{1}{\mathrm{Bi}_2}\right)+\frac{q_V R_1^2}{6\lambda}\left(\frac{R_2^2}{R_1^2}-2\frac{R_1}{r}+2\frac{R_1}{R_2}+\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\frac{R_2^2}{R_1^2}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_2}\frac{R_1}{R_2}-\frac{r^2}{R_1^2}\right)$; $Q=4\pi\,[q_{R_1}R_1^2-q_V R_1^3\,(1-r^3/R_1^3)/3]$

Tableau II.3 (suite)

nº d'ordre	Conditions aux limites	Formules
8	du IIIe genre à la surface $r=R_1$ et du IIe genre à la surface $r=R_2$	$t_{01}-t=\frac{q_{R_2}R_2^2}{\lambda R_1}\left(1-\frac{R_1}{r}+\frac{1}{\mathrm{Bi}_1}\right)-\frac{q_V R_2^2}{6\lambda}\left(\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}\frac{R_2}{R_1}-\frac{2}{\mathrm{Bi}_1}\frac{R_1^2}{R_2^2}+2\frac{R_2}{R_1}+\frac{R_1^2}{R_2^2}-2\frac{R_2}{r}-\frac{r^2}{R_2^2}\right)$; $Q=4\pi\,[q_{R_2}R_2^2-q_V R_2^3\,(1-r^3/R_2^3)/3]$

Ier genre. En adoptant dans les formules (II.12) et (II.13) $\alpha_1 \to \infty$ et $\alpha_2 \to \infty$, on obtient les formules de calcul du champ thermique unidimensionnel généralisé sous les conditions aux limites du Ier genre:

pour la température

$$t-t_{p1}=A_{\zeta=\zeta_1}-A+\frac{\zeta^{1-n}-\zeta_1^{1-n}}{\zeta_2^{1-n}-\zeta_1^{1-n}}\times$$
$$\times(t_{p2}-t_{p1}+A_{\zeta=\zeta_2}-A_{\zeta=\zeta_1}); \quad \text{(II.14)}$$

pour la densité du flux thermique

$$q=\lambda\left[\frac{dA}{d\zeta}-\frac{1-n}{\zeta^n(\zeta_2^{1-n}-\zeta_1^{1-n})}(t_{p2}-t_{p1}+A_{\zeta=\zeta_2}-A_{\zeta=\zeta_1})\right]. \quad \text{(II.15)}$$

Les tableaux II.1, II.2 et II.3 donnent les formules du champ thermique et des champs q, Q_l et Q pour un mur plan indéfini, un cylindre creux indéfini et une sphère creuse. Une partie de ces formules présente un cas particulier de (II.12), (II.13), (II.14) et (II.15). Pour déduire les autres on a appliqué la même méthode que pour les formules (II.12) et (II.13).

La première formule du point 1 du tableau II.1 est visualisée sur la figure II.4. D'après cette dernière, en présence des sources de chaleur internes la température à l'intérieur d'un mur plan indéfini peut dépasser la valeur maximale à sa surface si le critère de Pomérantsev Po > 2, où $\mathrm{Po}=\frac{q_V l^2}{\lambda(t_{p1}-t_{p2})}$, et baisser au-dessous de sa valeur minimale lorsque Po < —2.

La deuxième formule du point 1 du tableau II.1 entraîne que dans le cas d'une surface isolée $x = 0$ le groupement $q_V l^2/(2\lambda)$ acquiert le sens de la chute totale de température dans un mur plan indéfini à source interne de chaleur avec refroidissement unilatéral.

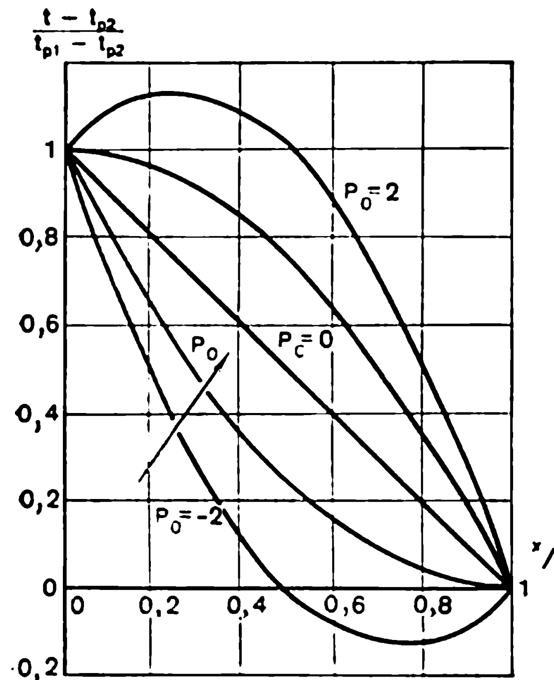


Fig. II.4. Distribution de la température dans un mur plan indéfini à source interne permanente de chaleur

On aboutit à la même conclusion en dérivant la première formule du point 1 du tableau II.1 par rapport à x et en annulant la dérivée obtenue pour $x = 0$.

Lorsque $t_{p1} = t_{p2} = t_p$, on obtient

$$t - t_p = \frac{q_V l x}{2\lambda}\left(1 - \frac{x}{l}\right). \qquad \text{(II.16)}$$

Dans ce cas la valeur maximale de la température s'obtient au centre du mur plan indéfini ($x/l = 0{,}5$):

$$t_{max} - t_p = 0{,}125 q_V l^2/\lambda. \qquad \text{(II.17)}$$

Exemple 1. Une pile sphérique aux diamètres intérieur et extérieur respectifs $D_1 = 600$ mm et $D_2 = 900$ mm est faite en un matériau à conductivité thermique $\lambda = 50$ W/(m·K). Calculer la température de la surface extérieure de la pile, si la densité du flux thermique qui passe par celle-ci $q = 10\,000$ W/m², et la température de la surface intérieure $t_{p1} = 1500$ °C.

Solution. Appliquons la première formule du point 4 du tableau II.3 pour $q_V = 0$. On en tire

$$t_{p2} = t_{p1} - qR_2 (R_2/R_1 - 1)/\lambda = [1500 - 10\cdot 0,45\ (1,5 - 1)/50]\ °C = 1455\ °C.$$

Exemple 2. Aux faces d'une barre isolée suivant sa surface latérale d'une longueur $l = 300$ mm et d'un diamètre $D = 25$ mm on maintient les températures $t_{p1} = 300$ °C et $t_{p2} = 200$ °C. La barre est le siège où se dégage, sous l'effet du courant électrique, le flux thermique $Q = 500$ W. En adoptant $\lambda = 400$ W/(m·K), calculer la température maximale de la barre et les valeurs de la densité du flux thermique à ses faces.

Solution. Cherchons la puissance spécifique de la source de chaleur permanente qui agit dans la barre en appliquant à cet effet la relation évidente

$$q_V = Q/V = 4Q/(\pi D^2 l) = 4\cdot 500\cdot 10^6/(3,14\cdot 625\cdot 0,3)\ \text{W/m}^3 = 3,4\cdot 10^6\ \text{W/m}^3.$$

Vu que la surface latérale est isolée, la barre peut être envisagée comme un mur plan indéfini. Donc, pour calculer la température et le flux thermique, on recourt à la première et la deuxième formules du point 1 du tableau II.1.

En dérivant la première formule par rapport à x et en annulant la dérivée ainsi obtenue, on trouve la coordonnée qui correspond à la valeur extrémale de la température. Il vient

$$\frac{x}{l}\Big|_{\max}=\left[\frac{q_V l^2}{\lambda(t_{p1}-t_{p2})}-2\right]\Big/2\,\frac{q_V l^2}{\lambda(t_{p1}-t_{p2})}.$$

On vérifie sans peine par les méthodes mathématiques usuelles que cette valeur de la coordonnée correspond au maximum de la température dans la barre.

En portant $\frac{x}{l}\Big|_{\max}$ dans la première formule du point 1 du tableau II.1, on obtient

$$t_{\max}=(t_{p1}-t_{p2})\left[\frac{q_V l^2}{\lambda(t_{p1}-t_{p2})}+2\right]^2\Big/8\,\frac{q_V l^2}{\lambda(t_{p1}-t_{p2})}+$$
$$+t_{p2}=\left[\frac{100\,(7{,}65+2)^2}{8\cdot 7{,}65}+200\right]\ ^\circ\mathrm{C}=352{,}16\ ^\circ\mathrm{C}.$$

La deuxième formule permet de calculer la densité du flux thermique à la face de la barre ($x=0$)

$$q_{x=0}=\frac{\lambda(t_{p1}-t_{p2})}{l}\left[1-\frac{q_V l^2}{2\lambda(t_{p1}-t_{p2})}\right]=$$
$$=\frac{400\cdot 100}{0{,}3}\left(1-\frac{7{,}65}{2}\right)\ \mathrm{W/m^2}=-3{,}767\cdot 10^5\ \mathrm{W/m^2}.$$

D'après cette même formule pour $x=l$ on a

$$q_{x=l}=\frac{\lambda(t_{p1}-t_{p2})}{l}\left[1+\frac{q_V l^2}{2\lambda(t_{p1}-t_{p2})}\right]=$$
$$=\frac{400\cdot 100}{0{,}3}\left(1+\frac{7{,}65}{2}\right)\ \mathrm{W/m^2}=6{,}433\cdot 10^5\ \mathrm{W/m^2}.$$

§ II.3. Champ thermique dans un corps à conductivité dépendant de la température et à source de chaleur interne permanente, dont la puissance spécifique est fonction arbitraire de la coordonnée

Dans ce cas la solution générale de l'équation différentielle de la conductivité thermique (II.5) est de la forme

$$\int \lambda(t)\,dt=C_1\frac{\zeta^{1-n}}{1-n}+C_2-\int\frac{d\zeta}{\zeta^n}\int q_V\zeta^n\,d\zeta. \qquad \text{(II.18)}$$

Supposons que la conductivité thermique est fonction de la température, de la forme

$$\lambda(t)=\lambda_0+at+bt^2+ct^3+\ldots, \qquad \text{(II.19)}$$

où λ_0 est la conductivité à $t = 0$ °C; a, b, c, les constantes expérimentales, et l'émission aux surfaces est définie par les conditions aux limites du Ier genre. Alors, la solution générale (II.18) peut s'écrire

$$\lambda_0 t + \frac{a}{2} t^2 + \frac{b}{3} t^3 + \frac{c}{4} t^4 + \ldots = C_1 \frac{\zeta^{1-n}}{1-n} + C_2 - B, \quad \text{(II.20)}$$

où

$$B = \int \frac{d\zeta}{\zeta^n} \int q_V \zeta^n \, d\zeta. \quad \text{(II.21)}$$

Les constantes d'intégration (II.20) se calculent d'après les conditions aux limites

$$\zeta = \zeta_1 \quad \text{et} \quad t = t_{p1}; \quad \zeta = \zeta_2 \quad \text{et} \quad t = t_{p2}. \quad \text{(II.22)}$$

En omettant les calculs intermédiaires peu compliqués, on obtient finalement

$$\lambda_0 (t - t_{p1}) + \frac{a}{2} (t^2 - t_{p1}^2) + \frac{b}{3} (t^3 - t_{p1}^3) + \frac{c}{4} (t^4 - t_{p1}^4) + \ldots = B_{\zeta=\zeta_1} - B +$$
$$+ \Big[\lambda_0 (t_{p2} - t_{p1}) + \frac{a}{2} (t_{p2}^2 - t_{p1}^2) + \frac{b}{3} (t_{p2}^3 - t_{p1}^3) +$$
$$+ \frac{c}{4} (t_{p2}^4 - t_{p1}^4) + \ldots + B_{\zeta=\zeta_2} - B_{\zeta=\zeta_1} \Big] (\zeta^{1-n} - \zeta_1^{1-n})/(\zeta_2^{1-n} - \zeta_1^{1-n}). \quad \text{(II.23)}$$

En dérivant la formule (II.23) par rapport à ζ et en portant ensuite la dérivée dans la formule de la loi de Fourier généralisée:

$$q = -\lambda (t) \, dt/d\zeta, \quad \text{(II.24)}$$

on a

$$q = \frac{dB}{d\zeta} - (1-n) \frac{B_{\zeta=\zeta_2} - B_{\zeta=\zeta_1} + \lambda_0 (t_{p2} - t_{p1}) + \frac{a}{2} (t_{p2}^2 - t_{p1}^2)}{\zeta^n (\zeta_2^{1-n} - \zeta_1^{1-n})} +$$
$$+ \frac{\frac{b}{3} (t_{p2}^3 - t_{p1}^3) + \frac{c}{4} (t_{p2}^4 - t_{p1}^4) + \ldots}{\zeta^n (\zeta_2^{1-n} - \zeta_1^{1-n})}. \quad \text{(II.25)}$$

Pour des conditions aux limites plus compliquées, la définition séparée des constantes d'intégration C_1 et C_2 de la solution générale (II.18) est très lourde et pour cette raison on ne parvient pas à obtenir sous une forme explicite les formules du type (II.23) et (II.25).

Introduisons la transformation de Kirchhoff définie par la formule

$$\lambda (t) \, dt/d\zeta = \lambda_{moy} \, du/d\zeta, \quad \text{(II.26)}$$

où λ_{moy} est la moyenne de la conductivité thermique; u, la variation qui dépend de la température.

Sous les conditions aux limites du Ier genre, (II.26) peut être intégrée, d'où

$$\lambda_{moy} = \frac{\int_{t_{p1}}^{t_{p2}} \lambda (t) \, dt}{t_{p2} - t_{p1}}. \quad \text{(II.27)}$$

Ensuite, compte tenu de (II.26), écrivons la fonction primitive (II.18) sous la forme

$$\lambda_{moy} u = C_1 \frac{\zeta^{1-n}}{1-n} + C_2 - \int \frac{d\zeta}{\zeta^n} \int q_V \zeta^n \, d\zeta. \qquad \text{(II.28)}$$

Sous les conditions aux limites du Ier genre la solution de (II.28) est définie par la formule (II.12) avec $\alpha_1 \to \infty$ et $\alpha_2 \to \infty$, et en substituant dans cette formule λ par λ_{moy}, c'est-à-dire

$$u - t_{p1} = A_{\zeta=\zeta_1} - A + \frac{t_{p2} - t_{p1} + A_{\zeta=\zeta_2} - A_{\zeta=\zeta_1}}{\zeta_2^{1-n} - \zeta_1^{1-n}} (\zeta^{1-n} - \zeta_1^{1-n}). \qquad \text{(II.29)}$$

En dérivant (II.29) par rapport à ζ et en retenant que la transformation de Kirchhoff (II.26) est identique à la densité du flux thermique prise avec le signe opposé, on a

$$q = \lambda_{moy} \frac{dA}{d\zeta} - \lambda_{moy} (1-n) \frac{t_{p2} - t_{p1} + A_{\zeta=\zeta_2} - A_{\zeta=\zeta_1}}{\zeta^n (\zeta_2^{1-n} - \zeta_1^{1-n})}, \qquad \text{(II.30)}$$

où A se calcule d'après la relation (II.9) en y remplaçant λ par λ_{moy}.

La formule (II.30) permet de calculer la densité du flux thermique pratiquement pour toute donnée de la relation entre le coefficient de conductivité thermique et la température, la conductivité moyenne λ_{moy} figurant dans cette formule étant déterminée par la formule (II.27).

Par exemple, les formules (II.23) et (II.25) du cylindre creux indéfini à rayons intérieur R_1 et extérieur R_2, si la puissance spécifique de la source de chaleur interne du cylindre est constante et égale à q_V, alors que le coefficient de conductivité thermique est fonction linéaire de la température

$$\lambda = \lambda_0 (1 + at), \qquad \text{(II.31)}$$

s écrivent

$$\frac{(at_1+1)^2 - (at+1)^2}{(at_1+1)^2 - (at_2+1)^2} = \left[1 + \frac{\text{Po}}{2} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \right] \ln \frac{r}{R_1} \Big/ \left[\ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{\text{Po}}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2} \right) \right]$$

et pour le flux thermique linéaire

$$Q_l = 2\pi\lambda_0 (t_1 - t_2) \left[1 + \frac{a}{2} (t_1 + t_2) \right] \left\{ \left[1 + \frac{\text{Po}}{2} \left(1 - \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \right] \Big/ \left[\ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\text{Po} r^2}{R_1^2} \right] \right\},$$

où

$$\text{Po} = \frac{a q_V R_1^2}{\lambda_0 [(at_1+1)^2 - (at_2+1)^2]}$$

est le critère de Pomérantsev.

II.4. Champ thermique dans un corps à source de chaleur interne permanente dont la puissance spécifique est fonction de la température de la forme $q_V = w_0 (1 + bt)$

Dans ce cas l'équation différentielle de la conductivité thermique (II.5) s'écrit

$$\frac{d^2 t}{d\zeta^2} + \frac{n}{\zeta} \frac{dt}{d\zeta} + \frac{w_0}{\lambda} (1 + bt) = 0, \qquad \text{(II.32)}$$

où w_0 est la puissance spécifique de la source de chaleur permanente à $t = 0$ °C; b, la constante expérimentale. Pour

$$t = y^{(1-n)/2}\, z, \qquad \text{(II.33)}$$

où $y = \zeta\sqrt{w_0 b/\lambda}$, (II.32) se ramène à

$$\frac{d^2 z}{dy^2} + \frac{1}{y}\,\frac{dz}{dy} + \left[1 - \frac{(n-1)^2}{4y^2}\right] z + \frac{1}{b}\, y^{(n-1)/2} = 0, \qquad \text{(II.34)}$$

qui est une équation inhomogène de Bessel. Sa solution générale peut être exprimée par la fonction primitive de la forme

$$z = C_1 J_{(n-1)/2}(y) + C_2 Y_{(n-1)/2}(y) - (1/b)\, y^{(n-1)/2} \qquad \text{(II.35)}$$

ou, compte tenu de la substitution (II.33), par la fonction

$$t = C_1 \zeta^{(1-n)/2} J_{(n-1)/2}(\zeta\sqrt{w_0/b\lambda}) + {}$$
$$+ C_2 \zeta^{(1-n)\,2} Y_{(n-1)/2}(\zeta\sqrt{w_0 b/\lambda}) - 1/b. \qquad \text{(II.36)}$$

où $J_{(n-1)/2}(\zeta\sqrt{w_0 b/\lambda})$ et $Y_{(n-1)/2}(\zeta\sqrt{w_0 b/\lambda})$ sont les fonctions de Bessel de première et deuxième espèces de l'ordre $(n-1)/2$, de l'argument $\zeta\sqrt{w_0 b/\lambda}$.

Par exemple, pour une sphère ($n = 2$ et $\zeta = r$), la formule (II.36) devient

$$t = r^{-1/2}\,[C_1 J_{1/2}(r\sqrt{w_0 b/\lambda}) + C_2 Y_{1/2}(r\sqrt{w_0 b/\lambda})] - 1/b. \qquad \text{(II.37)}$$

A l'aide des relations

$$J_{1/2}(x) = (1/\pi)\, Y_{-1/2}(x) = \sqrt{2/(\pi x)}\,\sin x \qquad \text{(II.38)}$$

et

$$Y_{1/2}(x) = -\pi J_{-1/2}(x) = -\sqrt{2\pi/x}\,\cos x$$

(II.37) se transforme ensuite pour devenir

$$t = 1/r\,(A \sin r\sqrt{w_0 b/\lambda} + B \cos r\sqrt{w_0 b/\lambda}) - 1/b, \qquad \text{(II.39)}$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

Supposons qu'à la surface d'une sphère creuse l'émission de la chaleur soit caractérisée par les conditions aux limites du Ier genre: l'équation (II.22) avec $\zeta_1 = R_1$ et $\zeta_2 = R_2$. Alors, les constantes d'intégration peuvent s'obtenir à partir du système

$$\left.\begin{aligned} t_{p2} + 1/b &= (A \sin R_2 \sqrt{w_0 b/\lambda} + B \cos R_2 \sqrt{w_0 b/\lambda})/R_2 \\ t_{p1} + 1/b &= (A \sin R_1 \sqrt{w_0 b/\lambda} + B \cos R_1 \sqrt{w_0 b/\lambda})/R_1 \end{aligned}\right\}. \qquad \text{(II.40)}$$

Résolvons le système (II.40) par rapport à A et B, portons les expressions obtenues dans (II.39) pour déduire la formule du champ thermique dans une sphère creuse

$$(t + 1/b)\, r = 1/[\sin\sqrt{w_0 b/\lambda}\,(R_2 - R_1)]\,[(t_{p2} + 1/b)\, R_2 \sin\sqrt{w_0 b/\lambda}\,(r - R_1) + {}$$
$$+ (t_{p1} + 1/b)\, R_1 \sin\sqrt{w_0 b/\lambda}\,(R_2 - r)]. \qquad \text{(II.41)}$$

La distribution de la température calculée d'après (II.41) possède cette particularité qu'avec

$$\sin\sqrt{w_0 b/\lambda}\,(R_2 - R_1) = 0 \qquad \text{(II.42)}$$

elle peut devenir infinie. (II.42) entraîne

$$w_0 = \pi^2 m^2 \lambda/[b\,(R_2 - R_1)^2], \qquad \text{(II.43)}$$

où $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Avec $m = 0$ ($w_0 = 0$), dans la formule du champ thermique (II.41) on obtient une indétermination du type zéro divisé par zéro. Ce cas doit correspondre à la répartition de la température dans une sphère creuse sans source interne de chaleur. En effet, en levant l'indétermination d'après la règle de L'Hospital, on aura la première formule du point 1 du tableau II.3 si l'on y pose $q_V = 0$. Pour $m = 1$ on trouve

$$w_{0.\,\max} = \frac{\pi^2\lambda}{b\,(R_2 - R_1)^2}. \tag{II.44}$$

Si la puissance spécifique de la source de chaleur interne permanente dépasse $w_{0.\,\max}$, pour t_{p1} et t_{p2} données, il sera impossible d'évacuer le flux thermique des surfaces de la sphère, et le matériau se désagrégera.

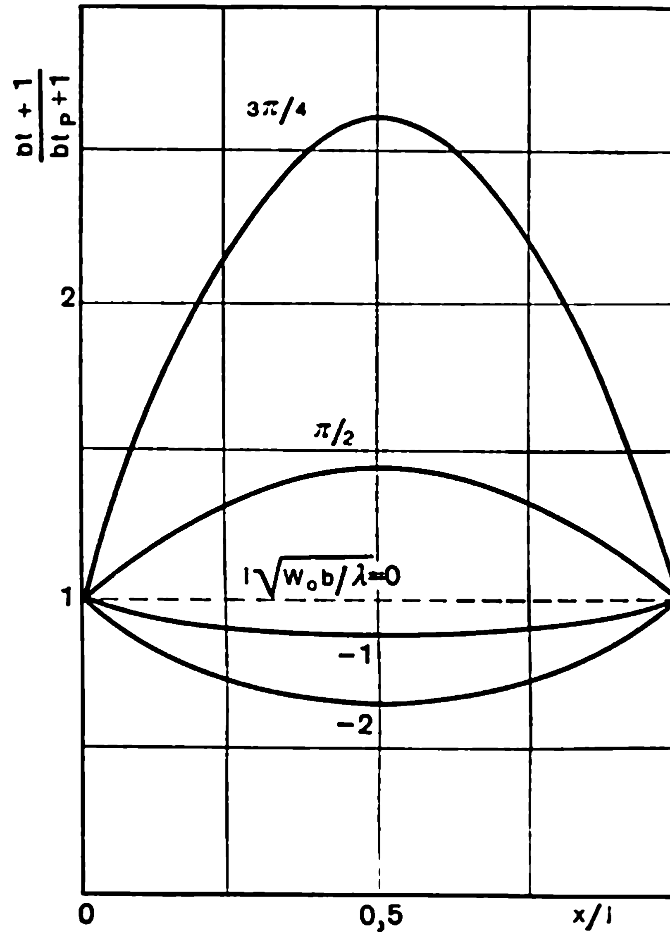


Fig. II.5. Profil du champ thermique dans un mur plan indéfini pour $q_V = w_0 (1 + bt)$ et $t_1 = t_2 = t_0$

Ceci doit être retenu lors de l'analyse du champ thermique aussi bien d'un mur plan indéfini que d'un cylindre indéfini.

Avec $w_0 < 0$ la formule (II.41) devient

$$(t + 1/b)\, r = \frac{1}{\operatorname{sh} \sqrt{w_0 b/\lambda}\,(R_2 - R_1)} \left[(t_{p2} + 1/b)\, R_2 \operatorname{sh} \sqrt{w_0 b/\lambda}\,(r - R_1) + (t_{p1} + 1/b)\, R_1 \operatorname{sh} \sqrt{w_0 b/\lambda}\,(R_2 - r)\right]. \tag{II.45}$$

La figure II.5 traduit le profil du champ thermique d'un mur plan indéfini qui apparaît seulement sous l'action d'une source de chaleur interne ($t_{p1} =$

$= t_{p2} = t_p$). La construction du graphique était guidée par les formules:

pour $w_0 > 0$

$$\frac{bt+1}{bt_p+1}=\frac{\sin\sqrt{w_0b/\lambda}\,x+\sin\sqrt{w_0b/\lambda}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{w_0b\lambda}\,l} \qquad (II.46)$$

et pour $w_0 < 0$

$$\frac{bt+1}{bt_p+1}=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{w_0b/\lambda}\,x+\operatorname{sh}\sqrt{w_0b/\lambda}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{w_0b/\lambda}\,l}. \qquad (II.47)$$

Comme le montre la figure II.5, la température croît avec la puissance de la source de chaleur interne permanente et peut dépasser la valeur admissible définie par la résistance du matériau. Ce fait confirme encore une fois les conclusions tirées de l'analyse de la formule (II.41).

Exemple 3. Déduire la formule du champ thermique et du champ de la densité du flux thermique dans un corps, si le transfert de chaleur sur l'une de ses surfaces ($\zeta = \zeta_1$) est défini par la condition aux limites du I[er] genre, et sur l'autre surface ($\zeta = \zeta_2$), par la condition aux limites du II[e] genre.

La puissance spécifique de la source de chaleur interne permanente est définie par la relation $q_V = w_0\,(1 + bt)$.

R é p o n s e.

$$t+\frac{1}{b}=\frac{q_l}{\lambda a}\left(\frac{\zeta}{\zeta_2}\right)^{(1-n)/2}\sqrt{\frac{\lambda}{w_0b}}\left[J_{(n-1)/2}\left(\sqrt{\frac{w_0b}{\lambda}}\,\zeta\right)\times\right.$$

$$\times Y_{(n-1)/2}\left(\sqrt{\frac{w_0b}{\lambda}}\,\zeta_1\right)-J_{(n-1)/2}\left(\sqrt{\frac{w_0b}{\lambda}}\,\zeta_1\right)Y_{(n-1)/2}\left.\left(\sqrt{\frac{w_0b}{\lambda}}\,\zeta\right)\right]+$$

$$+\frac{t_{p1}+1/b}{a}\left(\frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{(1-n)/2}\left[J_{(n+1)/2}\left(\sqrt{\frac{w_0b}{\lambda}}\,\zeta_2\right)Y_{(n-1)/2}\left(\sqrt{\frac{w_0b}{\lambda}}\,\zeta\right)-\right.$$

$$\left.-J_{(n-1)/2}\left(\sqrt{w_0b/\lambda}\,\zeta\right)Y_{(n+1)/2}\left(\sqrt{\frac{w_0b}{\lambda}}\,\zeta_2\right)\right],$$

où q_l est la densité du flux thermique à la surface $\zeta = \zeta_2$; t_{p1}, la température à la surface $\zeta = \zeta_1$;

$$a=J_{(n+1)/2}\left(\sqrt{\frac{w_0b}{\lambda}}\,\zeta_2\right)Y_{(n-1)/2}\left(\sqrt{\frac{w_0b}{\lambda}}\,\zeta_1\right)-$$

$$-J_{(n-1)/2}\left(\sqrt{\frac{w_0b}{\lambda}}\,\zeta_1\right)Y_{(n+1)/2}\left(\sqrt{\frac{w_0b}{\lambda}}\,\zeta_2\right)$$

et

$$q=\frac{q_l}{a}\left(\frac{\zeta}{\zeta_2}\right)^{(1-n)/2}\left[J_{(n+1)/2}\left(\sqrt{w_0b/\lambda}\,\zeta\right)Y_{(n-1)/2}\left(\sqrt{w_0b/\lambda}\,\zeta_1\right)-\right.$$

$$\left.-J_{(n-1)/2}\left(\sqrt{w_0b/\lambda}\,\zeta_1\right)Y_{(n+1)/2}\left(\sqrt{w_0b/\lambda}\,\zeta\right)\right]-$$

$$-\frac{t_{p1}+1/b}{a}\,\lambda\left(\frac{\zeta}{\zeta_1}\right)^{(1-n)/2}\sqrt{w_0b/\lambda}\,\times$$

$$\times\left[J_{(n+1)/2}\left(\sqrt{w_0b/\lambda}\,\zeta\right)Y_{(n+1)/2}\left(\sqrt{w_0b/\lambda}\,\zeta_2\right)-\right.$$

$$\left.-J_{(n+1)/2}\left(\sqrt{w_0b/\lambda}\,\zeta_2\right)Y_{(n+1)/2}\left(\sqrt{w_0b/\lambda}\,\zeta\right)\right].$$

I n d i c a t i o n. Utiliser la relation

$$dJ_\nu (x)/dx = (\nu/x)\, J_\nu (x) - J_{\nu+1} (x).$$

Exemple 4. Déterminer la valeur admissible maximale $w_{0.\max}$ dans un mur plan indéfini. Les conditions aux limites et l'allure de la variation de la puissance spécifique de la source de chaleur interne permanente sont les mêmes que dans l'exemple 3.

R é p o n s e.

$$w_{0.\,\max} = \pi^2\lambda\,(4bl^2).$$

§ II.5. Champ thermique dans un système complexe à sources de chaleur internes permanentes

Convenons d'entendre par *système complexe* un corps composé de parois planes bien adhérentes entre elles, ou de cylindres creux, ou encore de sphères creuses. Dans le cas général, les épaisseurs et les coefficients de conductivité thermique des corps constitutifs peuvent différer les uns des autres.

Fig. II.6. Mur plan complexe

La figure II.6 représente un système plan complexe (à tranches multiples) composé de k plaques planes indéfinies de différentes épaisseurs et de différents coefficients de conductivité thermique ; chaque plaque est le siège d'une source de chaleur interne permanente à puissance spécifique constante.

Le champ thermique du système complexe est caractérisé par le système de fonctions primitives de la forme

$$
\begin{aligned}
t &= A_1 \frac{\zeta^{1-n}}{1-n} + B_1 - \frac{q_{V_1}\zeta^2}{2\lambda_1 (n+1)} \quad \text{pour} \quad \zeta_1 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_2; \\
t &= A_2 \frac{\zeta^{1-n}}{1-n} + B_2 - \frac{q_{V_2}\zeta^2}{2\lambda_2 (n+1)} \quad \text{pour} \quad \zeta_2 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_3; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
t &= A_j \frac{\zeta^{1-n}}{1-n} + B_j - \frac{q_{V_j}\zeta^2}{2\lambda_j (n+1)} \quad \text{pour} \quad \zeta_j \leqslant \zeta \leqslant \zeta_{j+1}; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
t &= A_k \frac{\zeta^{1-n}}{1-n} + B_k - \frac{q_{V_k}\zeta^2}{2\lambda_k (n+1)} \quad \text{pour} \quad \zeta_k \leqslant \zeta \leqslant \zeta_{k+1},
\end{aligned}
\tag{II.48}
$$

où A_1, B_1; A_2, B_2; . . .; A_k, B_k sont des constantes d'intégration; q_{V1}, q_{V2}, q_{V3}, . . ., q_{Vk}, les puissances spécifiques constantes des sources de chaleur internes.

Si aux surfaces du système complexe l'émission de chaleur est définie par les conditions aux limites du IIIe genre, le système d'équations pour le calcul de $2k$ constantes d'intégration de (II.48) peut être établi de la façon suivante.

Deux équations s'obtiennent à partir de la condition d'échange de chaleur aux surfaces extérieures du système complexe; elles sont de la forme

$$
\begin{aligned}
\frac{A_1}{\zeta_1^n} - \frac{q_{V_1}\zeta_1}{\lambda_1 (n+1)} &= -\frac{\alpha_1}{\lambda_1}\left[t_{01} - A_1 \frac{\zeta_1^{1-n}}{1-n} - B_1 + \frac{q_{V_1}\zeta_1^2}{2\lambda_1 (n+1)}\right]; \\
\frac{A_k}{\zeta_{k+1}^n} - \frac{q_{V_k}\zeta_{k+1}}{\lambda_k (n+1)} &= -\frac{\alpha_2}{\lambda_k}\left[A_k \frac{\zeta_{k+1}^{1-n}}{1-n} + B_k - \frac{q_{V_k}\zeta_{k+1}^2}{2\lambda_k (n+1)} - t_{02}\right].
\end{aligned}
\tag{II.49}
$$

Encore $k - 1$ équations se trouvent à partir de la condition de la jonction suivant les températures dans les plans de contact. Elles sont de la forme

$$
\begin{aligned}
A_1 \frac{\zeta_2^{1-n}}{1-n} + B_1 - \frac{q_{V_1}\zeta_2^2}{2\lambda_1 (n+1)} &= A_2 \frac{\zeta_2^{1-n}}{1-n} + B_2 - \frac{q_{V_2}\zeta_2^2}{2\lambda_2 (n+1)}; \\
A_2 \frac{\zeta_3^{1-n}}{1-n} + B_2 - \frac{q_{V_2}\zeta_3^2}{2\lambda_2 (n+1)} &= A_3 \frac{\zeta_3^{1-n}}{1-n} + B_3 - \frac{q_{V_3}\zeta_3^2}{2\lambda_3 (n+1)}; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_{k-1} \frac{\zeta_k^{1-n}}{1-n} + B_{k-1} - \frac{q_{V_{k-1}}\zeta_k^2}{2\lambda_{k-1} (n+1)} &= A_k \frac{\zeta_k^{1-n}}{1-n} + B_k - \frac{q_{V_k}\zeta_k^2}{2\lambda_k (n+1)}.
\end{aligned}
\tag{II.50}
$$

Les autres $k-1$ équations se composent à partir de la condition de la jonction suivant la densité du flux thermique. Elles peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \frac{A_1}{\zeta_2^n} - \frac{q_{v_1}\zeta_2}{n+1} &= \lambda_2 \frac{A_2}{\zeta_2^n} - \frac{q_{v_2}\zeta_2}{n+1}; \\
\lambda_2 \frac{A_2}{\zeta_3^n} - \frac{q_{v_2}\zeta_3}{n+1} &= \lambda_3 \frac{A_3}{\zeta_3^n} - \frac{q_{v_3}\zeta_3}{n+1}; \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_{k-1} \frac{A_{k-1}}{\zeta_k^n} - \frac{q_{v_{k-1}}\zeta_k}{n+1} &= \lambda_k \frac{A_k}{\zeta_k^n} - \frac{q_{v_k}\zeta_k}{n+1}.
\end{aligned} \tag{II.51}$$

Les conditions (II.50) et (II.51) sont observées par le contact thermique parfait des surfaces. Dans les conditions réelles peuvent apparaître des résistances thermiques de contact supplémentaires dont les valeurs dépendent des facteurs technologiques et de construction.

La résolution du système d'équations (II.49), (II.50) et (II.51) par rapport aux constantes d'intégration est très lourde et pour cette raison nous ne la donnons pas ici. Voici le résultat définitif pour la température du j-ième corps du système complexe

$$\begin{aligned}
t_j = &\left[\frac{A_1\lambda_1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_j(n+1)} \sum_{i=2}^{j} \zeta_i^{n+1}(q_{v_i} - q_{v_{i-1}})\right] \frac{\zeta^{1-n}}{1-n} + B_1 - \\
&- \frac{A_1\lambda_1}{1-n} \sum_{i=2}^{j} \left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_{i-1}}\right) \zeta_i^{1-n} + \frac{1}{2(n+1)} \sum_{i=2}^{j} \zeta_i^2 \left(\frac{q_{v_i}}{\lambda_i} - \frac{q_{v_{i-1}}}{\lambda_{i-1}}\right) - \\
&- \frac{\zeta_j^{1-n}}{\lambda_j(1-n^2)} \sum_{i=2}^{j} \zeta_i^{n+1}(q_{v_i} - q_{v_{i-1}}) + \frac{\zeta_j^{1-n} - \zeta_{j-1}^{1-n}}{\lambda_j(1-n^2)} \times \\
&\times \sum_{i=2}^{j} \zeta_i^{n+1}(q_{v_i} - q_{v_{i-1}}) - \frac{q_{v_j}\zeta^2}{2\lambda_j(n+1)},
\end{aligned} \tag{II.52}$$

où

$$\begin{aligned}
A_1 = \frac{K}{\lambda_1} &\left\{ t_{02} - t_{01} + \frac{q_{v_1}\zeta_1}{n+1}\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{\zeta_1}{2\lambda_1}\right) + \right. \\
&+ \frac{q_{v_k}\zeta_{k+1}}{n+1}\left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\zeta_{k+1}}{2\lambda_k}\right) - \frac{1}{2(n+1)} \sum_{i=2}^{k} \zeta_i^2 \left(\frac{q_{v_i}}{\lambda_i} - \frac{q_{v_{i-1}}}{\lambda_{i-1}}\right) - \\
&- \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{m} \left[\frac{1}{\alpha_2\zeta_{k+1}^n} + \frac{1}{1-n} \sum_{i=m}^{k} \frac{1}{\lambda_i}(\zeta_{i+1}^{1-n} - \zeta_i^{1-n})\right] \times \\
&\left. \times \zeta_i^{n+1}(q_{v_i} - q_{v_{i-1}}) \right\},
\end{aligned} \tag{II.53}$$

où K est le coefficient de transfert de chaleur du système complexe; $m = 2, 3, 4, \ldots, k$;

$$K=\frac{1}{\frac{1}{\alpha_1\zeta_1^n}+\frac{1}{\alpha_2\zeta_{k+1}^n}+\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}(\zeta_{i+1}^{1-n}-\zeta_i^{1-n})}. \qquad (II.54)$$

$$B_1=A_1\lambda_1\left[\frac{1}{\alpha_1\zeta_1^n}-\frac{\zeta_1^{1-n}}{\lambda_1(1-n)}\right]-\frac{q_{V_1}\zeta_1}{\alpha_1(n+1)}+\frac{q_{V_1}\zeta_1^2}{2\lambda_1(n+1)}+t_{01}. \qquad (II.55)$$

Pour $q_{V1} = q_{V2} = q_{V3} = \ldots = 0$ la formule (II.52) devient bien plus simple

$$\frac{t_{01}-t_j}{t_{01}-t_{02}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{\alpha_1\zeta_1^n}+\frac{1}{\lambda_j(1-n)}(\zeta^{1-n}-\zeta_j^{1-n})+\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{\lambda_i}(\zeta_{i+1}^{1-n}-\zeta_i^{1-n})}{\frac{1}{\alpha_1\zeta_1^n}+\frac{1}{\alpha_2\zeta_{k+1}^n}+\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}(\zeta_{i+1}^{1-n}-\zeta_i^{1-n})}. \qquad (II.56)$$

Il est clair que la formule (II.56) est une équation d'une droite aux segments. La température courante d'un système complexe sans sources de chaleur internes peut donc être déterminée graphiquement (fig. II.7).

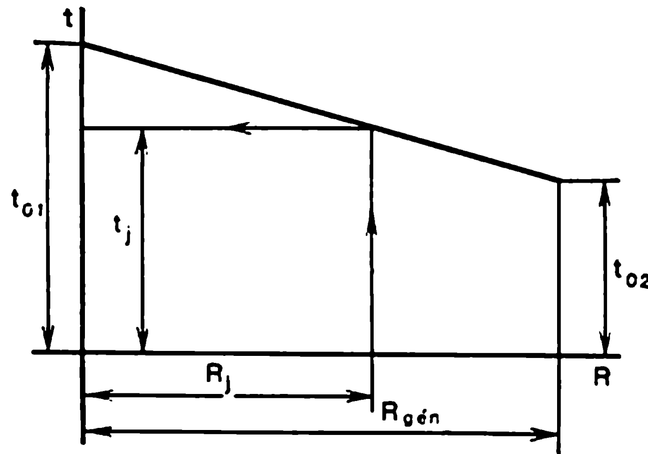


Fig. II.7. Détermination graphique de la température dans un mur complexe

A cet effet on porte sur l'axe horizontal, à une échelle arbitraire, le segment

$$R_{gén}=\frac{1}{\alpha_1\zeta_1^n}+\frac{1}{\alpha_2\zeta_{k+1}^n}+\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}(\zeta_{i+1}^{1-n}-\zeta_i^{1-n}),$$

appelé dans la théorie de l'échange de chaleur *résistance thermique*. Aux extrémités de ce segment on dresse des perpendiculaires sur lesquels on porte, à

l'échelle indépendante de l'échelle retenue pour $R_{gén}$, les températures t_{01} et t_{02}. La droite qui joint les extrémités des segments des températures t_{01} et t_{02} traduit le champ thermique dans le système complexe.

La température d'un plan interne quelconque du j-ième corps se trouve de la façon suivante. De l'origine du segment $R_{gén}$ on porte le segment

$$R_j = \frac{1}{\alpha_1 \zeta_1^n} + \frac{1}{\lambda_j (1-n)} (\zeta^{1-n} - \zeta_j^{1-n}) + \frac{1}{1-n} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\lambda_i} (\zeta_{i+1}^{1-n} - \zeta_i^{1-n}),$$

qui est au fond la résistance thermique du système complexe, jusqu'à la section déterminée par la coordonnée courante ζ. A l'extrémité du segment R_j on dresse une perpendiculaire jusqu'à son intersection avec la droite de la température. La grandeur de cette perpendiculaire à l'échelle de l'axe vertical sera la température cherchée.

En dérivant (II.56) par rapport à ζ et en portant la dérivée dans la formule de la loi de Fourier généralisée (II.24), on obtient la formule de la densité du flux thermique qui passe par le système complexe ne possédant pas de sources de chaleur internes:

$$q = \frac{t_{01} - t_{02}}{\zeta^n \left[\frac{1}{\alpha_1 \zeta_1^n} + \frac{1}{\alpha_2 \zeta_{k+1}^n} + \frac{1}{1-n} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} (\zeta_{i+1}^{1-n} - \zeta_i^{1-n}) \right]}. \qquad \text{(II.57)}$$

On tire de (II.57) comme cas particuliers les formules suivantes:
pour un mur plan indéfini:

$$q = \frac{t_{01} - t_{02}}{1/\alpha_1 - 1/\alpha_2 + \sum_{i=1}^{k} l_i/\lambda_i}; \qquad \text{(II.58)}$$

pour un cylindre creux complexe indéfini:

$$Q_l = \frac{4\pi (t_{01} - t_{02})}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_{i+1}}{R_i}}; \qquad \text{(II.59)}$$

pour une sphère creuse complexe:

$$Q = \frac{4\pi (t_{01} - t_{02})}{\frac{1}{\alpha_1 R_1^2} + \frac{1}{\alpha_2 R_{k+1}^2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_{i+1}} \right)}. \qquad \text{(II.60)}$$

Exemple 5. La surface intérieure d'un cylindre creux indéfini à trois couches est contournée par la vapeur d'eau à $\alpha_1 = 500$ W/(m²·K) et $t_{01} = 200$ °C, et sa surface extérieure, par l'air à $\alpha_2 = 10$ W/(m²·K) et $t_{02} = 20$ °C. Le cylindre médian comporte une source de chaleur interne permanente dont la puissance spécifique $q_V = 10^4$ W/m³.

Calculer la conductivité thermique du cylindre extérieur à laquelle les pertes thermiques de sa surface seront minimales, et la température de la surface extérieure qui correspond à cette condition. Adopter $R_1 = 100$ mm; $R_2 = 150$ mm; $R_3 = 200$ mm; $R_4 = 250$ mm; $\lambda_1 = 50$ W/(m·K) et $\lambda_2 = 200$ W/(m·K).

Solution. Dérivons (II.52) par rapport à $\zeta = r$ sans perdre de vue que $n = 1$; $q_{V1} = q_{V3} = 0$; $\zeta_1 = R_1$; $\zeta_2 = R_2$; $\zeta_3 = R_3$ et $\zeta_4 = R_4$; on obtient

$$\frac{dt_j}{dr} = \left[\frac{A_1\lambda_1}{\lambda_j} - \frac{1}{2\lambda_j} q_V (R_3^2 - R_2^2)\right]\frac{1}{r} - \frac{q_{V_j}^r}{2\lambda_j}.$$

Le flux thermique linéaire qui passe par le cylindre extérieur est déterminé en portant la dérivée supérieure dans la formule de la loi de Fourier

$$Q_l = -2\pi\lambda_3 r\frac{dt}{dr} = -2\pi\left[A_1\lambda_1 - \frac{q_V}{2}(R_3^2 - R_2^2)\right].$$

Pour trouver l'expression extrémale de Q_l en fonction de R_4 (fait partie de A_1), dérivons la dernière formule par rapport à R_4 et annulons la dérivée. Il en résulte

$$R_4 = \lambda_3/\alpha_2.$$

Le rayon ainsi défini est dit *critique*. On peut établir par des méthodes mathématiques usuelles que pour le rayon critique le flux thermique linéaire qui passe par le cylindre indéfini extérieur est minimal.

R_4 et α_2 sont connus; donc

$$\lambda_3 = R_4\alpha_2 = 0{,}25\cdot 10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)} = 2{,}5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}.$$

Cherchons maintenant la valeur numérique du coefficient de transfert de chaleur en utilisant à cet effet (II.54)

$$K = 1\Big/\left[\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \frac{1}{\alpha_2 R_4} + \frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{R_3}{R_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\lambda_3}\ln\frac{R_4}{R_2}\right] = 2{,}1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}.$$

Calculons d'après K trouvé la constante d'intégration A_1 de (II.53):

$$A_1 = \frac{K}{\lambda_1}\left[t_{02} - t_{01} + \frac{q_V}{4\lambda_2}(R_3^2 - R_2^2) + \right.$$
$$\left. + \frac{q_V}{2}\left(\frac{R_3^2 - R_2^2}{\alpha_2 R_4} + \frac{R_3^2 - R_2^2}{\lambda_3}\ln\frac{R_4}{R_3} + \frac{R_2^2}{\lambda_2}\ln\frac{R_3}{R_2}\right)\right] = -5{,}7.$$

La température de la surface extérieure du cylindre complexe indéfini se détermine, en tenant compte de (II.52) et (II.55), d'après la formule:

$$t_{p4} = t_{01} + A_1\lambda_1\left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{R_{i+1}}{R_i}\right) -$$
$$- \frac{q_V}{2\lambda_3}(R_3^2 - R_2^2)\ln\frac{R_4}{R_3} - \frac{q_V}{4\lambda_2}(R_3^2 - R_2^2) + \frac{q_V R_2^2}{2\lambda_3}\ln\frac{R_3}{R_2} = 183{,}4\,^\circ\text{C}.$$

§ II.6. Surfaces à ailettes

La loi de Fourier entraîne que plus la surface F d'extraction de chaleur est grande, plus la quantité de chaleur qui passe par cette surface et qui est dissipée dans le milieu ambiant est grande. Ce fait est utilisé souvent pour résoudre des problèmes de refroidisse-

ment des moteurs à combustion interne, des installations frigorifiques, etc.

La surface des corps est augmentée à l'aide des ailettes, par exemple droites (fig. II.8, *a*) ou annulaires (fig. II.8, *b*), de profils arbitraires. Généralement, le nervurage le plus efficace est déterminé par la forme, les dimensions, le prix, etc., de chaque installation concrète et son choix est établi pour chaque cas concret. Examinons une ailette droite de profil arbitraire quelconque (fig. II.9). Admettons que la température est répartie uniformément suivant l'épaisseur de l'ailette, c'est-à-dire qu'elle ne varie que suivant la coordonnée x. La quantité de chaleur qui passe par la section de l'ailette peut alors se calculer d'après la loi de Fourier (I.2).

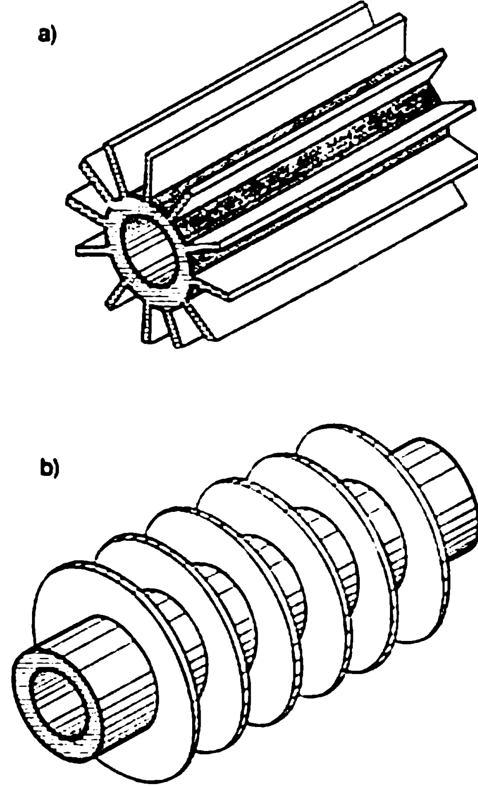


Fig. II.8. Constructions des ailettes

Pour les conditions envisagées

$$Q = -2L\lambda f(x) \frac{dt}{dx}, \qquad \text{(II.61)}$$

où $f(x)$ est la moitié de l'épaisseur de l'ailette dans la section $a'b'c'd'$.

En régime stationnaire, la même quantité de chaleur sera émise dans le milieu ambiant par convection. Si on admet que la surface élémentaire de l'extraction de la chaleur est $2Ldx$, les pertes thermiques par convection peuvent se calculer d'après la loi de Newton-Riehman:

$$dQ = 2L\alpha\,(t - t_0)\,dx, \qquad \text{(II.62)}$$

où t_0 est la température du milieu ambiant de l'ailette.

En additionnant (II.61) et (II.62), on obtient l'équation différentielle caractéristique de l'échange de chaleur dans une ailette droite de profil quelconque

$$-2\lambda L \int_x \frac{d}{dx}\left[f(x)\frac{dt}{dx}\right] dx + 2L\alpha \int_x (t - t_0)\,dx = 0$$

ou

$$f(x)\frac{d^2t}{dx^2} + \frac{df(x)}{dx}\frac{dt}{dx} - \frac{\alpha}{\lambda}(t - t_0) = 0. \qquad \text{(II.63)}$$

Ailette droite de profil rectangulaire (fig. II.10). Dans ce cas $f(x) = \delta$ et donc (II.63) devient plus simple

$$\frac{d^2t}{dx^2} - m^2(t - t_0) = 0, \qquad (II.64)$$

où $m = \sqrt{\alpha/(\lambda\delta)}$ est un groupement.

La solution générale de (II.64) est exprimée par la fonction primitive de la forme

$$t - t_0 = C_1e^{mx} + C_2e^{-mx}. \qquad (II.65)$$

Si on néglige l'émission de chaleur par la tête de l'ailette ($x = l$) et admet que la température du pied de l'ailette ($x = 0$) est égale à t_{pd} on a en omettant les calculs intermédiaires

$$\frac{t - t_0}{t_{pd} - t_0} = \frac{\operatorname{ch} ml\left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\operatorname{ch} ml}. \qquad (II.66)$$

La formule (II.66) définit le champ thermique dans une ailette de profil rectangulaire sous les conditions aux limites considérées.

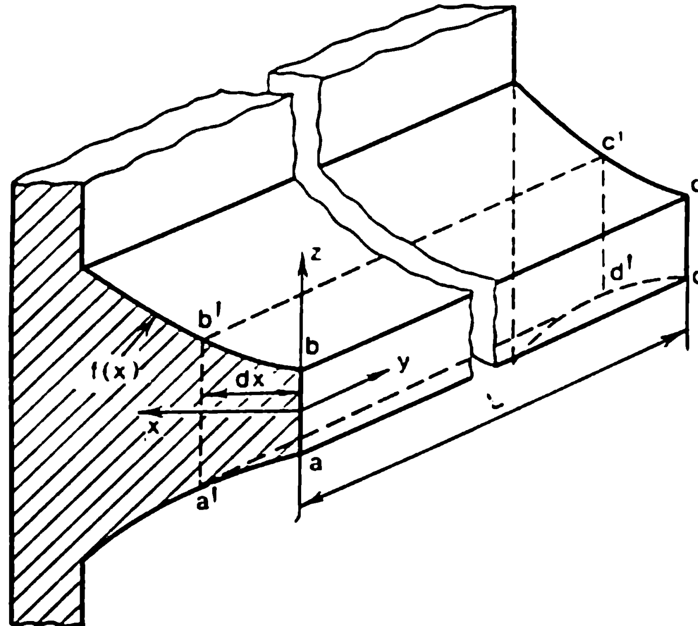


Fig. II.9. Ailette droite de profil quelconque

La caractéristique fonctionnelle de l'ailette est déterminée par son *efficacité*. On entend par ce critère la relation du flux thermique total transmis par l'ailette au flux thermique qui serait transmis par elle si toute sa surface était portée à la température t_{pd}.

Le flux thermique total qui passe par l'ailette et est diffusé à partir de sa surface se calcule, compte tenu de (II.66), suivant la formule

$$Q = 2L\alpha \int_0^l (t - t_0)\,dx = \frac{2L\alpha\,(t_{pd} - t_0)}{\operatorname{ch} ml} \int_0^l \operatorname{ch} ml \left(1 - \frac{x}{l}\right) \times$$

$$\times\, dx = \frac{2L\alpha\,(t_{pd} - t_0)}{m} \operatorname{th} ml. \qquad \text{(II.67)}$$

Le flux thermique qui serait diffusé à partir de la surface de l'ailette si elle se trouvait à la température constante t_{pd} est déterminé par l'expression

$$Q_{pd} = 2Ll\alpha\,(t_{pd} - t_0). \qquad \text{(II.68)}$$

En divisant (II.67) par (II.68), on obtient la formule de l'efficacité de l'ailette de profil rectangulaire

$$\xi = \frac{\operatorname{th} ml}{ml}, \qquad \text{(II.69)}$$

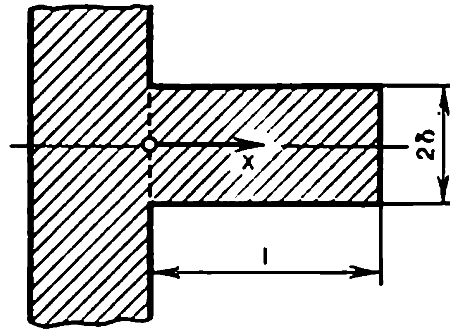


Fig. II.10. Ailette droite de profil rectangulaire

où ξ est l'efficacité.

L'efficacité de l'ailette ξ, comme il s'ensuit de (II.69), varie de 0 à 1 ; la valeur $\xi = 1$ correspond au cas idéal, lorsque la température de toute la surface de la nervure est égale à la température maximale de son pied. C'est également le cas de l'extraction maximale de la chaleur à partir de la surface de la nervure.

D'après l'efficacité de l'ailette il est commode d'évaluer l'influence de sa longueur, sa conductivité thermique, son coefficient de transmission de chaleur, etc. sur l'intensité d'extraction de la chaleur. Ainsi, pour $ml = 1$, l'efficacité de la nervure $\xi = 0{,}716$; et pour $ml = 0{,}5$, ce critère vaut déjà 0,924. Le paramètre ml peut être diminué, et donc, l'efficacité de l'ailette accrue, en renforçant par exemple, la conductivité thermique, en réduisant le coefficient de transmission de chaleur, ou, enfin, en diminuant la longueur de l'ailette et augmentant son épaisseur.

Ailette droite de profil triangulaire (fig. II.11). Pour une ailette de cette forme $f(x) = (x/l)\,\delta$. Donc, (II.63) se met sous la forme

$$x \frac{d^2t}{dx^2} + \frac{dt}{dx} - m^2 l\,(t - t_0) = 0. \qquad \text{(II.70)}$$

L'équation différentielle (II.70) est une des formes de l'équation modifiée de Bessel [5]. Sa solution générale peut être donnée par la

fonction primitive de la forme

$$t = t_0 = C_1 I_0 (2m \sqrt{lx}) + C_2 K_0 (2m \sqrt{lx}), \qquad \text{(II.71)}$$

où $I_0 (2m \sqrt{lx})$ et $K_0 (2m \sqrt{lx})$ sont les fonctions modifiées de Bessel d'ordre nul, de première et deuxième espèces de l'argument $2m \sqrt{lx}$.

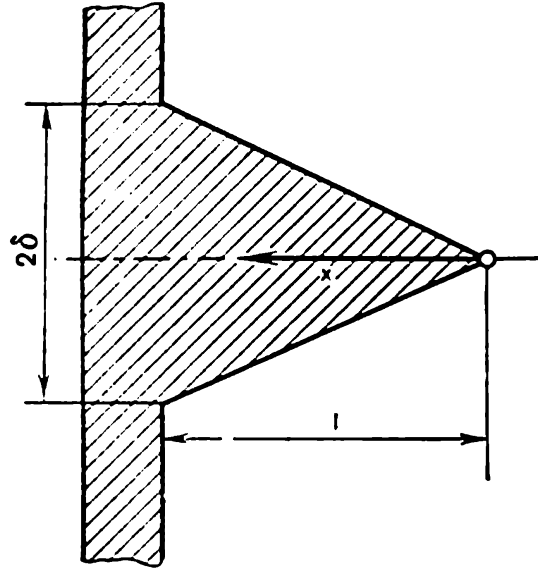


Fig. II.11. Ailette droite de profil triangulaire

En admettant, tout comme pour l'ailette droite de profil rectangulaire, que la température du pied ($x = l$) est égale à t_{pd}, et, en négligeant l'émission de chaleur par la face ($x = 0$), on peut ramener finalement (II.71) à la forme

$$(t - t_0)/(t_{pd} - t_0) = I_0 (2m \sqrt{lx})/I_0 (2ml). \qquad \text{(II.72)}$$

Le flux thermique total qui passe par l'ailette de profil triangulaire se calcule d'après la formule

$$Q = 2L\alpha \int_0^l (t - t_0)\, dx = \frac{2L\alpha (t_{pd} - t_0)}{I_0 (2ml)} \int_0^l I_0 (2m \sqrt{lx})\, dx =$$

$$= \frac{2L\alpha (t_{pd} - t_0)}{mI_0 (2ml)} I_1 (2ml)\ ^{*}), \qquad \text{(II.73)}$$

où $I_1 (2ml)$ est la fonction modifiée de première espèce, du 1[er] ordre de l'argument $2ml$.

---

*) Pour le calcul de l'intégrale on utilise la formule de récurrence

$$\int zI_0 (z)\, dz = zI_1 (z).$$

En connaissant (II.73), on peut calculer l'efficacité de l'ailette à profil triangulaire

$$\xi = \frac{Q}{Q_{pd}} = \frac{I_1(2ml)}{mlI_0(2ml)}, \qquad \text{(II.74)}$$

où Q_{pd} se calcule d'après (II.68).

Pour les mêmes coefficients de transmission de chaleur, conductivité thermique, épaisseur et hauteur, une ailette rectangulaire est plus efficace que celle à profil triangulaire (fig. II.12). Cependant, il faut retenir que pour la forme triangulaire, la hauteur et l'épaisseur du pied étant les mêmes que dans le cas rectangulaire, le débit de métal est plus petit et, par suite, l'ailette est moins onéreuse. Lorsque l'efficacité de l'ailette est envisagée dans cette optique, la préférence doit aller au profil triangulaire. Une telle comparaison est réalisée par [18]. On y donne également le calcul des nervures droites d'autres profils.

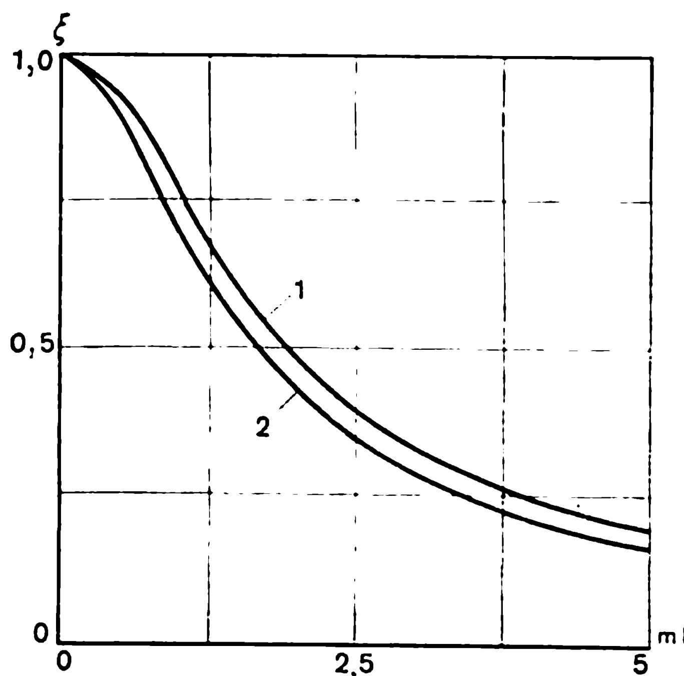


Fig. II.12. Comparaison de l'efficacité des ailettes droites:
1 — profil rectangulaire; *2* — profil triangulaire

Ailette circulaire de profil rectangulaire (fig. II.13). L'analyse est menée de la même façon que pour l'ailette droite. Dans ce cas, l'équation (II.61) est de la forme

$$Q = -4\pi\lambda\delta \int_r \frac{d}{dr}\left(r\frac{dt}{dr}\right) dr, \qquad \text{(II.75)}$$

et (II.62) peut s'écrire

$$Q = 4\pi\alpha \int\limits_{r} r(t - t_0)\,dr. \qquad \text{(II.76)}$$

En sommant (II.75) et (II.76) on obtient l'équation différentielle de la conductivité thermique d'une ailette circulaire de section rectangulaire. Elle s'écrit

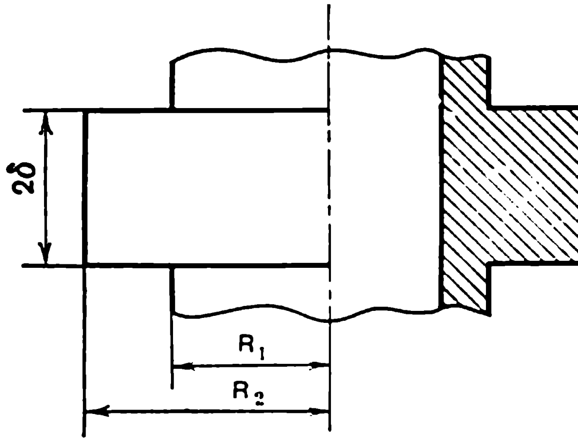


Fig. II.13. Ailette circulaire de profil rectangulaire

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} - m^2(t - t_0) = 0. \qquad \text{(II.77)}$$

(II.77) est l'équation modifiée de Bessel; donc

$$t - t_0 = C_1 I_0(mr) + C_2 K_0(mr). \qquad \text{(II.78)}$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 se déterminent en partant des mêmes conditions aux limites utilisées pour l'analyse des ailettes droites. On aboutit en définitive à la formule

$$\frac{t - t_0}{t_{\text{pd}} - t_0} = \frac{I_0(mr)\,K_1(mR_2) + I_1(mR_2)\,K_0(mr)}{I_0(mR_1)\,K_1(mR_2) + I_1(mR_2)\,K_0(mR_1)}. \qquad \text{(II.79)}$$

Le flux thermique dissipé à partir de la surface de l'ailette annulaire se calcule d'après la loi de Newton-Riehman, qui dans notre cas est de la forme

$$Q = 4\pi\alpha \int\limits_{R_1}^{R_2} r(t - t_0)\,dr. \qquad \text{(II.80)}$$

Pour calculer l'intégrale de (II.80), il faut appliquer la formule de récurrence [cf. renvoi de (II.73)].

On obtient finalement

$$Q = \frac{4\pi\alpha R_1(t_{\text{pd}} - t_0)}{m}\left[\frac{I_1(mR_2)\,K_1(mR_1) - I_1(mR_1)\,K_1(mR_2)}{I_0(mR_1)\,K_1(mR_2) + I_1(mR_2)\,K_0(mR_1)}\right]. \qquad \text{(II.81)}$$

Le flux thermique dissipé à partir de la surface d'une ailette annulaire portée à une température partout égale à t_{pd} se calcule d'après la formule (II.80) en y remplaçant t par t_{pd}:

$$Q_{\text{pd}} = 2\pi\alpha(t_{\text{pd}} - t_0)(R_2^2 - R_1^2). \qquad \text{(II.82)}$$

De la sorte, l'efficacité d'une ailette annulaire de profil rectangulaire

$$\xi = \frac{2R_1}{m\,(R_2^2 - R_1^2)} \left[\frac{I_1(mR_2)\,K_1(mR_1) - I_1(mR_1)\,K_1(mR_2)}{I_0(mR_1)\,K_1(mR_2) + I_1(mR_2)\,K_0(mR_1)} \right]. \quad \text{(II.83)}$$

La formule (II.83) est illustrée par la figure II.14. Il est clair que la diminution du paramètre mR_1 (ce qui équivaut à l'augmentation de la conductivité thermique, de l'épaisseur de l'ailette, à la diminution du rayon du tube et du coefficient de transmission de chaleur) améliore l'efficacité.

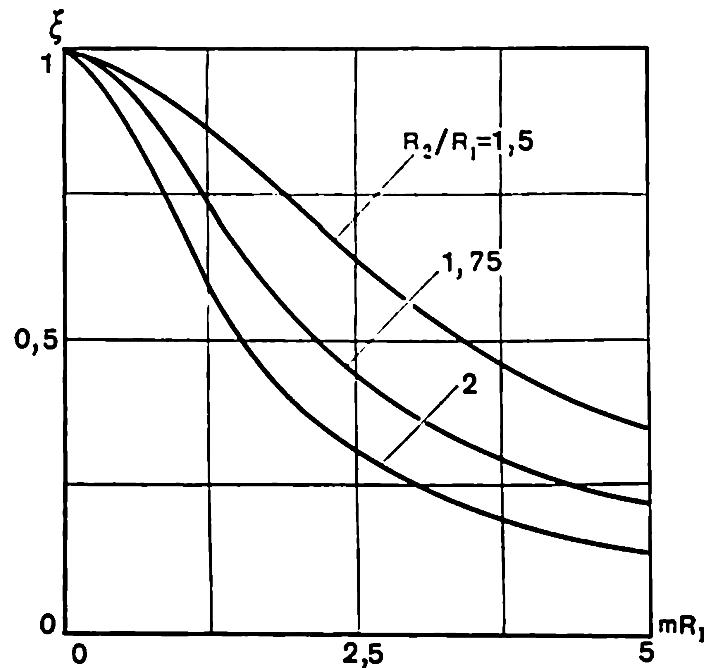


Fig. II.14. Influence du paramètre mR_1 sur l'efficacité d'une ailette circulaire de profil rectangulaire

Exemple 6. Sous quelles conditions une nervure droite de profil rectangulaire diminue l'émission de la chaleur dans le milieu ambiant (présente une résistance thermique supplémentaire)?

R é p o n s e: $\alpha\delta/\lambda > 1$.

I n d i c a t i o n s. a) En calculant les constantes d'intégration de (II.65) il convient de tenir compte de l'émission de chaleur à partir de la face en bout de l'ailette; b) obtenir la formule du flux thermique qui passe par le pied de l'ailette et l'explorer dans le sens de l'extrémum.

Exemple 7. Calculer l'épaisseur optimale (qui correspond à l'extraction de la chaleur maximale) d'une ailette droite de profils rectangulaire et triangulaire, si elles ont les mêmes coefficients de trasmission de chaleur et de conductivité thermique et les mêmes surfaces des sections droites.

R é p o n s e. a) Ailette de profil rectangulaire

$$\delta_{opt} = \left(\frac{S_r^2 \alpha}{4K_r \lambda} \right)^{1/3},$$

où $S_r = 2\delta l$ est la surface de la section droite de l'ailette; $K_r = 1{,}419$ se calcule d'après l'équation transcendente

$$6K_r = \operatorname{sh} 2K_r.$$

b) Ailette de profil triangulaire

$$\delta_{opt} = \left(\frac{S_t^2 \alpha}{K_t^2 \lambda}\right)^{1/3},$$

où $S_t = \delta l$ est la surface de la section droite de l'ailette; $K_t = 2{,}619$ est défini par l'équation transcendante

$$\frac{2}{3} I_0(K_t) I_1(K_t) + I_2(K_t) I_0(K_t) = I_1^2(K_t).$$

I n d i c a t i o n. Utiliser (II.66) et (II.71) pour déduire les formules du flux thermique qui passe par le pied de l'ailette, et les explorer ensuite dans le sens de l'extrémum en fonction de l'épaisseur, en admettant que la surface de la section droite de l'ailette est invariable.

§ II.7. Champ thermique bidimensionnel

Un champ thermique bidimensionnel peut apparaître dans des corps délimités soit par des surfaces planes, soit par des surfaces cylindriques et planes, c'est-à-dire dans des murs et plaques plans demi-limités, ou dans des cylindres pleins et creux demi-limités et limités.

L'équation différentielle qui correspond à ce cas peut s'obtenir à partir de (I.18) en tenant compte de (II.5):

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \zeta} + \frac{n}{\zeta}\frac{\partial t}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0, \qquad \text{(II.84)}$$

où $n = 0$ pour les corps et plaques plans demi-limités; $n = 1$ pour les cylindres pleins et creux demi-limités et limités.

Cherchons la solution générale de (II.84) sous la forme (méthode de séparation des variables, celle de Fourier)

$$t = EZ, \qquad \text{(II.85)}$$

où E est la fonction qui ne dépend que de ζ; Z, la fonction qui ne dépend que de z.

En portant (II.85) dans (II.84), on obtient

$$\frac{1}{E}\frac{d^2E}{d\zeta^2} + \frac{n}{\zeta E}\frac{dE}{d\zeta} = -\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}. \qquad \text{(II.86)}$$

Dans les premier et deuxième membres de (II.86) figurent les fonctions qui dépendent chacune des variables indépendantes entre elles. C'est pourquoi l'égalité de (II.86) ne peut avoir lieu que si le deuxième et le premier membre de cette relation sont égaux à une

même constante. Désignons-la par p^2. Alors, au lieu de (II.86) on aura deux équations différentielles

$$\frac{d^2E}{d\zeta^2}+\frac{n}{\zeta}\frac{dE}{d\zeta}-p^2E=0 \qquad \text{(II.87)}$$

et

$$\frac{d^2Z}{dz^2}+p^2Z=0. \qquad \text{(II.88)}$$

L'équation différentielle (II.87) est une des formes de l'équation modifiée de Bessel. Sa solution générale peut être exprimée par la fonction

$$E=\zeta^{(1-n)/2}\left[C_1I_{(n-1)/2}(p\zeta)+C_2K_{(n-1)/2}(p\zeta)\right]. \qquad \text{(II.89)}$$

La solution générale de l'équation différentielle (II.88) est la fonction primitive de la forme

$$Z = C_3 \sin pz + C_4 \cos pz. \qquad \text{(II.90)}$$

De cette façon, la solution générale de l'équation différentielle de la conductivité thermique (II.84) s'écrit:

$$t = \zeta^{(1-n)/2}\left[C_1I_{(n-1)/2}(p\zeta) + C_2K_{(n-1)/2}(p\zeta)\right] \times$$
$$\times\ (C_3 \sin pz + C_4 \cos pz). \qquad \text{(II.91)}$$

Supposons que la température à la surface latérale d'un cylindre plein limité de rayon R et de longueur l est constante et égale à t_s, et aux faces ($z = 0$, $z = l$) elle est nulle.

La condition d'une température nulle aux faces du cylindre permet de tirer que $C_4 = 0$ et

$$p = \pi m/l, \qquad \text{(II.92)}$$

où $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

D'autre part, $C_2 = 0$, puisque la température sur l'axe du cylindre est finie, et la fonction modifiée de Bessel $K_0(pr)$ tend vers l'infini avec $r \to 0$ (pour un cylindre, $n = 1$, $\zeta = r$).

L'équation (II.92) possède des racines multiples. Par conséquent, pour un cylindre, la solution de son équation différentielle de la conductivité thermique (II.84) aura la forme de la fonction [6]

$$t=\sum_{m=0}^{\infty} A_m I_0\left(\frac{\pi mr}{l}\right)\sin\frac{\pi mz}{l}, \qquad \text{(II.93)}$$

où A_m est une constante.

Si la série (II.93) se récrit pour $r = R$ sous une forme développée, en multipliant ensuite les deuxième et premier membres de l'expression ainsi obtenue par $\sin\frac{\pi m r}{l}$ et l'intégrant de 0 à l, on obtient

$$t_s\int_0^l \sin\frac{\pi m z}{l}\,dz = A_1 I_0\left(\frac{\pi R}{l}\right)\int_0^l \sin\frac{\pi z}{l}\sin\frac{\pi m z}{l}\,dz + A_2 I_0\left(\frac{2\pi R}{l}\right)\int_0^l \sin\frac{2\pi z}{l}\sin\frac{\pi m z}{l}\,dz + \ldots + A_m I_0\left(\frac{\pi m R}{l}\right)\times \int_0^l \left(\sin\frac{\pi m z}{l}\right)^2 dz + \ldots + A_k I_0\left(\frac{\pi k R}{l}\right)\int_0^l \sin\frac{\pi k z}{l}\sin\frac{\pi m z}{l}\,dz + \ldots \tag{II.94}$$

La théorie des séries de Fourier montre que

$$\int_0^l \sin\frac{\pi m z}{l}\sin\frac{\pi k z}{l}\,dz = 0 \quad m \neq k \text{ sont des nombres entiers).}$$

Donc, la série (II.94) se simplifie jusqu'à

$$t_s\int_0^l \sin\frac{\pi m z}{l}\,dz = A_m I_0\left(\frac{\pi m R}{l}\right)\int_0^l \left(\sin\frac{\pi m z}{l}\right)^2 dz. \tag{II.95}$$

(II.95) permet de calculer A_m. On a

$$A_m = \frac{2t_s\,[1-(-1)^m]}{\pi m I_0\left(\frac{\pi m R}{l}\right)}. \tag{II.96}$$

En portant (II.96) dans (II.93), on trouve

$$\frac{t}{t_s} = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{[1-(-1)^m]\,I_0\left(\frac{\pi m r}{l}\right)}{m I_0\left(\frac{\pi m R}{l}\right)}\sin\frac{\pi m z}{l},$$

ou, finalement,

$$\frac{t}{t_s} = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{I_0\left[\frac{\pi(2m+1)r}{l}\right]}{(2m+1)\,I_0\left[\frac{\pi(2m+1)R}{l}\right]}\sin\frac{\pi(2m+1)z}{l}. \tag{II.97}$$

La figure II.15 représente le champ thermique sur l'axe du cylindre plein limité construit d'après (II.97).

Supposons maintenant qu'à la face d'un cylindre plein limité ($z = 0$) la température est égale à t_{l_1}, et à l'autre face ($z = l$) et à la surface ($r = R$), elle est nulle. Dans ce cas, en divisant l'expression (II.86) en deux équations différentielles, il est plus commode de

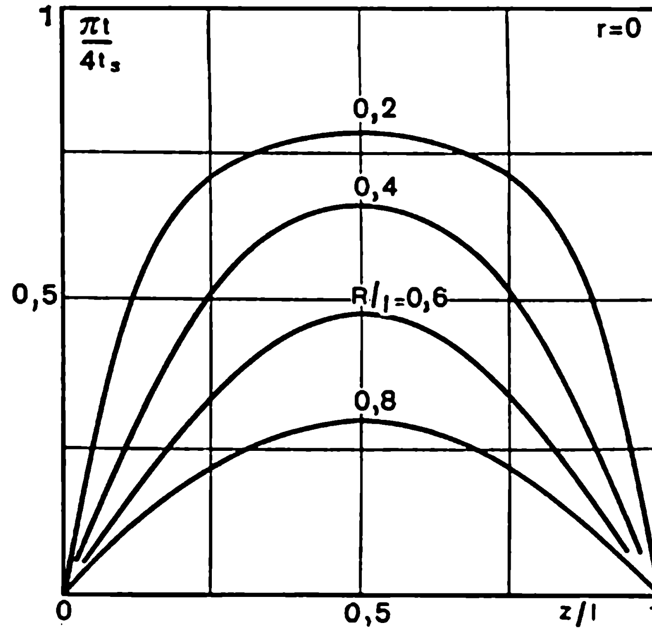


Fig. II.15. Distribution de la température dans un cylindre limité continu à la température nulle des faces en bout

désigner la constante par $-p^2$. Alors, pour le cylindre, la solution de (II.84) peut s'écrire

$$t = [C_1 J_0 (pr) + C_2 Y_0 (pr)] (C_3 e^{pz} + C_4 e^{-pz}). \qquad \text{(II.98)}$$

La condition de la température limite à $r = 0$ ($\lim_{r \to 0} Y_0 (pr) \to \infty$) donne $C_2 = 0$, et la condition de la température nulle à la face ($z = l$), $C_3 = -C_4 e^{-2pl}$. De la sorte, (II.98) se simplifie jusqu'à

$$t = A J_0 (pr) \operatorname{sh} pl (1 - z/l), \qquad \text{(II.99)}$$

où A est la constante d'intégration.

La température de la surface latérale (II.99) peut être égalée à zéro si le paramètre p s'obtient à partir de l'équation $J_0 (pR) = 0$ (tableau II.4 pour $\mathrm{Bi} \to \infty$).

Puisque $J_0 (pR) = 0$ possède des racines multiples, il vient

$$t = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0 (p_m r) \operatorname{sh} p_m l \left(1 - \frac{z}{l}\right). \qquad \text{(II.100)}$$

Tableau II.4

Racines de l'équation caractéristique $pRJ_1(pR) - \mathrm{Bi}\, J_0(pR) = 0$

Bi	p_1R	p_2R	p_3R	p_4R	p_5R	p_6R
0,000	0,0000	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706
0,005	0,1000	3,8331	7,0163	10,1740	13,3241	16,4710
0,01	0,1413	3,8344	7,0171	10,1745	13,3245	16,4713
0,02	0,1995	3,8369	7,0184	10,1754	13,3252	16,4718
0,04	0,2814	3,8421	7,0213	10,1774	13,3267	16,4731
0,06	0,3438	3,8473	7,0241	10,1794	13,3282	16,4743
0,08	0,3960	3,8525	7,0270	10,1813	13,3297	16,4755
0,10	0,4417	3,8577	7,0298	10,1833	13,3312	16,4767
0,12	0,4827	3,8629	7,0327	10,1853	13,3327	16,4780
0,14	0,5201	3,8681	7,0356	10,1873	13,3342	16,4792
0,16	0,5546	3,8773	7,0284	10,1892	13,3358	16,4804
0,18	0,5868	3,8784	7,0412	10,1912	13,3372	16,4816
0,20	0,6170	3,8835	7,0440	10,1931	13,3387	16,4828
0,22	0,6456	3,8887	7,0469	10,1951	13,3402	16,4840
0,26	0,6984	3,8989	7,0526	10,1990	13,3432	16,4865
0,30	0,7465	3,9091	7,0582	10,2029	13,3462	16,4888
0,40	0,8516	3,9344	7,0723	10,2127	13,3537	16,4949
0,50	0,9408	3,9594	7,0864	10,2225	13,3611	16,5010
0,60	0,0184	3,9841	7,1004	10,2322	13,3686	16,5070
0,70	1,0873	4,0085	7,1143	10,2419	13,3761	16,5131
0,80	1,1490	4,0325	7,1282	10,2516	13,3835	16,1591
0,90	1,2048	4,0562	7,1421	10,2613	13,3910	16,5251
1,00	1,2558	4,0795	7,1558	10,2710	13,3984	16,5312
1,20	1,3456	4,1250	7,1831	10,2903	13,4133	16,5432
1,40	1,4225	4,1689	7,2100	10,3094	13,4280	16,5553
1,60	1,4892	4,2112	7,2366	10,3284	13,4427	16,5672
1,80	1,5477	4,2519	7,2627	10,3472	13,4574	16,5792
2,00	1,5994	4,2910	7,2884	10,3658	13,4719	16,5910
2,50	1,7061	4,3819	7,3508	10,4118	13,5080	16,6206
5,00	1,9898	4,7131	7,6177	10,6223	13,6786	16,7630
10,00	2,1795	5,0332	7,9569	10,9363	13,9580	17,0099
25,00	2,3108	5,3068	8,3262	11,3576	14,3997	17,4522
50,00	2,3572	5,4112	8,4840	11,5621	14,6433	17,7272
100,00	2,3809	5,4652	8,5678	11,6747	14,7834	17,8931
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711

Développons la série (II.100) pour $z = 0$, puis multiplions ses premier et deuxième membres par $rJ_0(p_m r)$ et intégrons de 0 à R. Il en résultera

$$t_{t_1} \int_0^R rJ_0(p_m r)\, dr = A_1 \operatorname{sh} p_1 l \int_0^R rJ_0(p_1 r)\, J_0(p_m r)\, dr +$$

$$+A_2 \operatorname{sh} p_2 l \int_0^R rJ_0(p_2 r) J_0(p_m r)\, dr + \ldots + A_m \operatorname{sh} p_m l \int_0^R rJ_0^2(p_m r)\, dr +$$

$$+ \ldots + A_k \operatorname{sh} p_k l \int_0^R rJ_0(p_k r) J_0(p_m r)\, dr + \ldots \qquad \text{(II.101)}$$

Il s'avère que lors du calcul du paramètre p à partir de $J_0(pr) = 0$ [7]

$$\int_0^R rJ_0(p_k r) J_0(p_m r)\, dr = 0, \text{ si } k \neq m.$$

Il s'ensuit que la série (II.101) se simplifie jusqu'à

$$t_{t_1} \int_0^R rJ_0(p_m r)\, dr = A_m \operatorname{sh} p_m l \int_0^R rJ_0^2(p_m r)\, dr\ ^*). \qquad \text{(II.102)}$$

(II.102) permet de calculer la constante d'intégration A_m. On a

$$A_m = \frac{2t_{t_1}}{p_m R \operatorname{sh} p_m l J_1(p_m R)}. \qquad \text{(II.103)}$$

En portant (II.103) dans (II.100) on obtient la formule du champ thermique dont la forme s'écrit finalement

$$\frac{t}{t_{t_1}} = \frac{2}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(p_m r)}{p_m J_1(p_m R)} \cdot \frac{\operatorname{sh} p_m l(1 - z/l)}{\operatorname{sh} p_m l}. \qquad \text{(II.104)}$$

Si, par exemple, les températures à la surface latérale et aux faces du cylindre plein sont différentes de zéro, la solution de (II.84) doit être cherchée sous la forme de la somme

$$t = u + v + w,$$

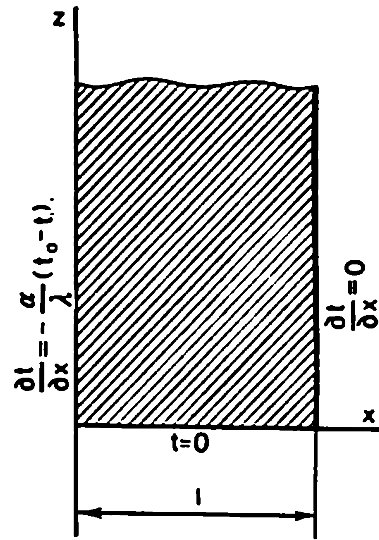


Fig. II.16. Mur plan demi-limité

où u est la solution du problème pour $u = t_s\ (r = R)$; $u = 0\ (z = 0)$ et $u = 0\ (z = l)$; v, sa solution pour $v = 0\ (r = R)$, $v = t_{t_1}\ (z = 0)$

*) D'après le renvoi de la formule (II.73), si l se calcule à partir de $J_0(pR) = 0$,

$$\int_0^R rJ_0^2(pr)\, dr = \frac{R^2}{2} J_1^2(pR).$$

et $v = 0$ ($z = l$) (qui ont été explorées dans ce qui précède); w, celle pour $w = 0$ ($r = R$), $w = 0$ ($z = 0$) et $w = t_{l_2}$ ($z = l$).

Supposons qu'à l'une des surfaces ($x = 0$; $0 \leqslant z < \infty$) d'un mur plan demi-limité (fig. II.16) l'échange de chaleur est défini par les conditions aux limites du IIIe genre, la deuxième surface ($x = l$; $0 \leqslant z < \infty$) est thermiquement isolée et la température de la troisième surface ($z = 0$; $0 \leqslant x \leqslant l$) est égale à zéro.

La solution de l'équation différentielle (II.84) peut s'écrire pour ce cas ($n = 0$ et $\zeta = x$) sous la forme

$$t - t_0 = (C_1 e^{pz} + C_2 e^{-pz})(C_3 \sin px + C_4 \cos px), \qquad \text{(II.105)}$$

et les conditions aux limites peuvent être exprimées de la façon suivante

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_0 - t) \qquad \text{pour} \quad x = 0; \qquad \text{(II.106a)}$$

$$0 \leqslant z < \infty$$

$$\partial t/\partial x = 0 \qquad \text{pour} \quad x = l; \qquad \text{(II.106b)}$$

$$t = 0 \qquad \text{pour} \quad z = 0; \qquad \text{(II.106c)}$$

$$0 \leqslant x \leqslant l$$

$$\partial t/\partial z = 0 \qquad \text{pour} \quad z \to \infty. \qquad \text{(II.106d)}$$

La condition aux limites (II.106d) entraîne que $C_1 = 0$; alors qu'en portant la solution dans (II.106b) on ramène celle-ci à la forme

$$t - t_0 = Be^{-pz} \cos pl \left(1 - \frac{x}{l}\right). \qquad \text{(II.107)}$$

Si, ensuite, on introduit (II.107) dans l'équation (II.106a), on obtient

$$pl \operatorname{tg} pl = \mathrm{Bi}. \qquad \text{(II.108)}$$

L'équation caractéristique (II.108) permet de déterminer le paramètre pl. La solution de (II.108) est donnée par le tableau II.5.

L'équation caractéristique (II.108) possédant des racines multiples, sa solution pour t doit donc être de la forme

$$t - t_0 = \sum_{m=1}^{\infty} B_m e^{-p_m z} \cos p_m l \,(1 - x/l). \qquad \text{(II.109)}$$

La constante B_m de (II.109) se calcule suivant une méthode parfaitement analogue à celle utilisée pour déterminer A_m de la formule (II.93). Ecrivons donc, en omettant les calculs intermédiaires,

$$\frac{t_0 - t}{t_0} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin p_m l \cos p_m l \,(1 - x/l)}{p_m l + \sin p_m l \cos p_m l} e^{-p_m z}. \qquad \text{(II.110)}$$

Tableau II.5

Racines de l'équation caractéristique (II.108)

Bi	$p_1 l$	$p_2 l$	$p_3 l$	$p_4 l$	$p_5 l$	$p_6 l$
0,000	0,0000	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,005	0,0707	3,1432	6,2840	9,4253	12,5668	15,7083
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,02	0,1410	3,1479	6,2864	9,4269	12,5680	15,7092
0,04	0,1987	3,1543	6.2895	9,4290	12,5696	15,7105
0,06	0,2425	3,1606	6,2927	9,4311	12,5711	15,7118
0,08	0,2791	3,1668	6,2959	9,4333	12,5727	15,7131
0,10	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
0,12	0,3396	3,1793	6,3022	9,4375	12,5759	15,7156
0,14	0,3657	3,1855	6,3054	9,4396	12,5775	15,7169
0,16	0,3897	3,1917	6,3085	9,4417	12,5791	15,7181
0,18	0,4119	3,1978	6,3117	9,4438	12,5807	15,7194
0,20	0,4328	3,2039	6,3148	9,4459	12,5823	15,7207
0,22	0,4525	3,2100	6,3180	9,4481	12,5839	15,7220
0,26	0,4888	3,2221	6,3243	9,4523	12,5870	15,7245
0,30	0,5218	3,2341	6,3305	9,4565	12,5902	15,7270
0,40	0,5932	3,2636	6,3461	9,4670	12,5981	15,7334
0,50	0,6533	3,2923	6,3616	9,4775	12,6060	15,7397
0,60	0,7051	3,3204	6,3770	9,4879	12,6139	15,7460
0,70	0,7506	3,3477	6,3923	9,4983	12,6218	15,7524
0,80	0,7910	3,3744	6,4074	9,5087	12,6296	15,7587
0,90	0,8274	3,4003	6,4224	9,5190	12,6375	15,7650
1,00	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
1,20	0,9179	3,4742	6,4669	9,5498	12,6609	15,7839
1,40	0,9666	3,5201	6,4955	9,5700	12,6764	15,7964
1,60	1,0084	3,5636	6,5237	9,5901	12,6918	15,8088
1,80	1,0449	3,6047	6,5513	9,6099	12,7071	15,8213
2,00	1,0769	3,6436	6,5783	9,6296	12,7223	15,8336
2,50	1,1422	3,7318	6,6431	9,6776	12,7599	15,8643
5,00	1,3138	4,0336	6,9096	9,8928	12,9352	16,0107
10,00	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
25,00	1,5105	4,5330	7,5603	10,5947	13,6378	16,6901
50,00	1,5400	4,6202	7,7012	10,7832	13,8666	16,9519
100,00	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
∞	1,5708	4.7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788

Maintenant remplaçons la condition aux limites (II.106b) par la condition aux limites du 1[er] genre

$$t = 0 \text{ pour } x = l \ (0 \leqslant z \leqslant \infty). \qquad \text{(II.111)}$$

Dans ce cas la solution de l'équation différentielle (II.84) pour $n = 0$ et $\zeta = x$ doit être cherchée sous la forme

$$t = u + v, \qquad \text{(II.112)}$$

où u doit vérifier l'équation différentielle

$$d^2u/dx^2 = 0 \tag{II.113}$$

et les conditions aux limites

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_0 - u) \quad \text{pour} \quad x = 0;$$
$$u = 0 \qquad \text{pour} \quad x = l, \tag{II.114}$$

alors que v doit vérifier l'équation différentielle

$$\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2 = 0 \tag{II.115}$$

et les conditions aux limites

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda} v \quad \text{pour} \quad x = 0; \tag{II.116a}$$
$$0 \leqslant z < \infty$$
$$v = 0 \quad \text{pour} \quad x = l; \tag{II.116b}$$
$$v = -u \quad \text{pour} \quad z = 0; \tag{II.116c}$$
$$0 \leqslant x \leqslant l$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{pour} \quad z \to \infty. \tag{II.116d}$$

La solution de l'équation différentielle (II.113) sous les conditions aux limites (II.114) est consignée sur le tableau II.1 (point 7 pour $q_V = 0$). On peut l'écrire

$$\frac{u}{t_0} = \frac{\text{Bi}}{1+\text{Bi}}\left(1 - \frac{x}{l}\right). \tag{II.117}$$

La fonction primitive de l'équation différentielle (II.115) est de la forme

$$v = (C_1 e^{pz} + C_2 e^{-pz})(C_3 \sin px + C_4 \cos px). \tag{II.118}$$

La condition aux limites (II.116d) entraîne que $C_1 = 0$, et la substitution consécutive de (II.118) dans les équations (II.116b) et (II.116a) donne

$$v = \sum_{m=1}^{\infty} D_m e^{-p_m z} \sin p_m l \left(1 - \frac{x}{l}\right), \tag{II.119}$$

où le paramètre pl doit se calculer à partir de l'équation caractéristique

$$pl \operatorname{ctg} pl + \text{Bi} = 0. \tag{II.120}$$

Tableau II.6

Racines de l'équation caractéristique (II.120)

Bi	$p_1 l$	$p_2 l$	$p_3 l$	$p_4 l$	$p_5 l$	$p_6 l$
0,0	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788
0,1	1,6320	4,7335	7,8667	11,0047	14,1443	17,2845
0,2	1,6887	4,7544	7,8794	11,0137	14,1513	17,2903
0,3	1,7414	4,7751	7,8920	11,0228	14,1584	17,2961
0,4	1,7906	4,7956	7,9046	11,0318	14,1654	17,3019
0,5	1,8366	4,8158	7,9171	11,0409	14,1724	17,3076
0,6	1,8798	4,8358	7,9295	11,0498	14,1795	17,3134
0,7	1,9203	4,8556	7,9419	11,0588	14,1865	17,3192
0,8	1,9586	4,8751	7,9542	11,0677	14,1935	17,3249
0,9	1,9947	4,8943	7,9665	11,0767	14,2005	17,3306
1,0	2,0288	4,9132	7,9787	11,0856	14,2075	17,3364
1,5	2,1746	5,0037	8,0385	11,1296	14,2421	17,3649
2,0	2,2889	5,0870	8,0962	11,1727	14,2764	17,3932
3,0	2,4557	5,2329	8,2045	11,2560	14,3434	17,4490
4,0	2,5704	5,3540	8,3029	11,3349	14,4080	17,5034
5,0	2,6537	5,4544	8,3914	11,4086	14,4699	17,5562
6,0	2,7165	5,5378	8,4703	11,4773	14,5288	17,6072
7,0	2,7654	5,6078	8,5406	11,5408	14,5847	17,6562
8,0	2,8044	5,6669	8,6031	11,5994	14,6374	17,7032
9,0	2,8363	5,7172	8,6587	11,6532	14,6870	17,7481
10,0	2,8628	5,7606	8,7083	11,7027	14,7335	17,7908
20,0	2,9930	5,9921	9,0019	12,0250	15,0625	18,1136
40,0	3,0651	6,1311	9,1987	12,2688	15,3417	18,4180
60,0	3,0901	6,1805	9,2715	12,3632	15,4559	18,5497
100	3,1105	6,2211	9,3317	12,4426	15,5537	18,6650
∞	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496

Les solutions de (II.120) sont données par le tableau II.6.

La multiplication des premier et deuxième membres de (II.119) avec $z = 0$ par $\sin p_m l\,(1 - x/l)$ et l'intégration consécutive de 0 à l compte tenu de la condition aux limites (II.106c) de l'expression obtenue conduit à

$$-\frac{\mathrm{Bi}\, t_0}{1+\mathrm{Bi}} \int_0^l \left(1-\frac{x}{l}\right) \sin p_m l \left(1-\frac{x}{l}\right) dx =$$

$$= D_m \int_0^l \sin^2 p_m l \left(1-\frac{x}{l}\right) dx. \qquad \text{(II.121)}$$

(II.121) permet de déterminer la constante D_m. En la portant dans (II.118), on a

$$v = \frac{2\mathrm{Bi}\, t_0}{1+\mathrm{Bi}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m l \cos p_m l - \sin p_m l}{p_m l\,(p_m l - \sin p_m l \cos p_m l)}\, e^{-p_m z} \sin p_m l \left(1-\frac{x}{l}\right). \qquad \text{(II.122)}$$

En additionnant (II.117) et (II.122), on obtient la formule de la distribution de la température dans un mur plan demi-limité sous les conditions aux limites envisagées. On peut la mettre sous la forme suivante

$$\frac{t}{t_0}=\frac{\mathrm{Bi}}{1+\mathrm{Bi}}\left[1-\frac{x}{l}+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p_m l\cos p_m l-\sin p_m l}{p_m l\,(p_m l-\sin p_m l\cos p_m l)}\times\right.$$
$$\left.\times e^{-p_m z}\sin p_m l\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]. \qquad \text{(II.123)}$$

Il est aisé de vérifier par des méthodes mathématiques usuelles que (II.123) satisfait aux conditions aux limites et initiale imposées.

Exemple 8. Déduire la formule du champ thermique d'un cylindre plein demi-limité, si la température de sa surface latérale ($r = R$) est t_s, et de sa face ($z = 0$), t_f.

Réponse.

$$\frac{t-t_s}{t_f-t_s}=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(p_m r)}{p_m R J_1(p_m R)}\,e^{-p_m z}.$$

Le paramètre p se calcule d'après l'équation caractéristique $J_0(pR) = 0$.

Exemple 9. Comment s'écrira la formule du champ thermique de l'exemple 8 si on remplace les conditions aux limites du Ier genre par celles du IIIe genre?

Réponse.

$$\frac{t-t_0}{t_f-t_0}=2\mathrm{Bi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(p_m r)}{(\mathrm{Bi}^2+p_m^2R^2)\,J_0(p_m R)}\,e^{-p_m z},$$

où le paramètre pR se calcule d'après l'équation caractéristique $pRJ_1(pR) - \mathrm{Bi}\,J_0(pR) = 0$ (cf. tableau II.4).

Exemple 10. Déduire la formule du champ thermique d'un mur plan demi-limité si deux de ses surfaces ($x = 0$; $x = l$, $0 \leqslant z < \infty$) sont maintenues à la température nulle et la troisième surface ($z = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$), à la température t_p.

Le mur plan demi-limité possède une source de chaleur interne à puissance spécifique constante q_V.

Réponse.

$$t-\frac{q_V x(l-x)}{2\lambda}=\frac{2t_p}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sin(\pi x/e)}{\operatorname{sh}(\pi z/e)}-$$
$$-\frac{4q_V l^2}{\lambda\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin[\pi(2m+1)x/l]}{(2m+1)^3}\,e^{-\frac{\pi(2m+1)z}{l}}.$$

Indication. Utiliser la substitution

$$\theta=t-\frac{q_V x(l-x)}{2\lambda}.$$

Exemple 11. Déduire la formule du champ thermique d'un cylindre plein de rayon R et de longueur l, s'il comporte une source de chaleur interne à puissance spécifique constante.

A la face du cylindre ($z = 0$) l'émission de chaleur est déterminée par les conditions aux limites du IIe genre, et à la face ($z = l$), du Ier genre. La surface latérale est maintenue à la température nulle.

R é p o n s e.

$$t+\frac{q_V z^2}{2\lambda}=2\left(t_{t_2}+\frac{q_V l^2}{2\lambda}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(p_m r)}{p_m R J_1(p_m R)}\,\frac{\operatorname{ch} p_m z}{\operatorname{ch} p_m l}+$$

$$+\frac{2q_0 R}{\lambda}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_0(p_m r)}{p_m^2 R^2 J_1(p_m R)}\cdot\frac{\operatorname{ch} p_m l\,(1-z/l)}{\operatorname{ch} p_m l},$$

où t_{t_2} est la température à la face $z = l$; q_0, la densité du flux thermique à la face $z = 0$.

Le paramètre p se calcule d'après l'équation caractéristique $J_0(pR) = 0$.

I n d i c a t i o n. Utiliser la substitution

$$t=\theta-\frac{q_V z^2}{2\lambda}.$$

CHAPITRE III

PROCESSUS NON STATIONNAIRES DE CONDUCTIVITÉ THERMIQUE

§ III.1. Méthodes principales de résolution de l'équation de la conductivité thermique en régime non stationnaire

L'équation différentielle de la conductivité thermique en l'absence des sources de chaleur interne est de la forme

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = a\nabla^2 T. \qquad \text{(III.1)}$$

(III.1) est une équation différentielle homogène linéaire du deuxième ordre aux dérivées partielles. Ses résolutions jouissent de la propriété de superposition, analogue aux résolutions de l'équation différentielle homogène ordinaire du deuxième ordre pour laquelle la solution est donnée par l'expression $C_1T_1 + C_2T_2$, où T_1 et T_2 sont les solutions partielles de l'équation, et C_1 et C_2, des constantes arbitraires. (III.1) étant une équation aux dérivées partielles, elle possède un nombre infini de solutions partielles.

L'équation différentielle de la conductivité thermique se rapporte à la catégorie de ce qu'on appelle équations différentielles de la physique mathématique, dont la résolution a imposé l'établissement des méthodes aussi bien classiques qu'approchées. Aux méthodes classiques on rapporte, par exemple, celle de séparation des variables et la méthode des sources. Par sa structure harmonieuse et le niveau d'élaboration, la transformation intégrale peut être également rangée parmi les méthodes classiques. Actuellement, on recourt largement aux méthodes approchées qui permettent pratiquement de résoudre tout problème technique. Parmi ces méthodes il y a celles des différences finies (méthode des réseaux) et des analogies (analogie électrique et hydraulique).

Méthode de séparation des variables. Cette méthode a été établie par Fourier: son application aux problèmes de la conductivité thermique consiste à trouver l'ensemble des solutions partielles de l'équation (III.1) qui, comme nous l'avons déjà dit, sont ensuite sommées

$$T = C_1T_1 + C_2T_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{i=\infty} C_iT_i. \qquad \text{(III.2)}$$

La légitimité de l'application du principe de superposition à une série infinie, tout comme sa dérivation et intégration terme à terme, est démontrée dans les

ouvrages de physique mathématique. Un fait important est l'allure bornée de la fonction T ($T < M$) pour toutes les valeurs des coordonnées et du temps $\tau \geqslant 0$.

La solution de l'équation (III.1) se présente sous la forme de produit de deux fonctions, dont l'une dépend seulement du temps $T(\tau)$, et l'autre $\psi(x, y, z)$, seulement des coordonnées, c est-à-dire

$$T = CT(\tau)\,\psi(x, y, z), \tag{III.3}$$

où C est une constante arbitraire.

En dérivant la fonction T par rapport au temps et aux coordonnées et en portant ces dérivées dans l'équation (III.1), on obtient

$$T'(\tau)\,\psi(x, y, z) = aT(\tau)\,\nabla^2\psi(x, y, z). \tag{III.4}$$

Séparant les variables dépendant du temps de celles qui dépendent des coordonnées, ramenons l'équation (III.4) à la forme

$$T'(\tau)/T(\tau) = a\nabla^2\psi(x, y, z)/\psi(x, y, z). \tag{III.5}$$

Le premier membre de l'expression (III.5) ne dépendant pas des coordonnées, et le deuxième, du temps (l'égalité étant vérifiée quelles que soient les valeurs du temps et des coordonnées), les deuxième et premier membres représentent une valeur constante λ:

$$(1/a)\,T'(\tau)/T(\tau) = \lambda; \tag{III.6}$$

$$\nabla^2\psi(x, y, z)/\psi(x, y, z) = \lambda. \tag{III.7}$$

Chacune des équations (III.6) et (III.7) est différentielle et linéaire. La solution de (III.6) s'écrit

$$T(\tau) = Ce^{a\lambda\tau}. \tag{III.8}$$

La forme de la fonction $T(\tau)$ indique que pour les processus qui tendent vers l'équilibre thermique, la quantité λ doit être inférieure à zéro ($\lambda < 0$), car s'il n'en est pas ainsi, la condition de la fonction $T = T(\tau)\cdot\psi(x, y, z) < M$ limitée ne serait pas observée. Ainsi, on peut noter

$$\lambda = -k^2. \tag{III.9}$$

Il en résulte que l'équation (III.7) devient

$$\nabla^2\psi(x, y, z) + k^2\psi(x, y, z) = 0. \tag{III.10}$$

La solution de (III.10), appelée *équation de Pockels*, est définie par la forme géométrique du corps. Les constantes d'intégration se calculent à partir des conditions aux limites (température, flux thermique ou conditions d'échange de chaleur à la surface du corps). Dans les cas les plus simples, lorsque ψ est fonction d'une seule coordonnée (par exemple, de x), l équation (III.10) est une simple équation différentielle du deuxième ordre, dont la solution peut être mise sous la forme d'une somme de deux solutions partielles:

$$\psi(x) = C_1A(kx) + C_2B(kx), \tag{III.11}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes, et $A(kx)$ et $B(kx)$, des intégrales linéairement indépendantes de l'équation (III.10), c'est-à-dire tels que leur rapport n'est pas une grandeur constante: $A(kx)/B(kx) \neq$ const. En portant les expressions (III.8) et (III.11) dans (III.3) et en réunissant les constantes, on obtient

$$T = e^{-ak^2\tau}\,[DA(kx) + EB(kx)], \tag{III.12}$$

où D et E sont des constantes.

Cette expression, tout en vérifiant l'équation (III.1), est, pourtant, inapplicable au calcul du champ thermique, ne permettant pas de définir les cons-

tantes D et E. Par exemple, si par condition pour l'instant initial (avec $\tau = 0$) la température est constante: $T = T_0 =$ const, ceci ne résulte pas de l'équation (III.12) du fait que dans ce cas il s'avère que la constante est égale à la variable: $T_0 = DA\ (kx) + EB\ (kx)$, ce qui ne doit pas avoir lieu. Pour obtenir la solution générale de l'équation de la conductivité thermique susceptible de satisfaire aux conditions initiales, on prend la somme des solutions partielles dans chacune desquelles les constantes D et E ont leur valeur définie. En réalisant la sélection correspondante des constantes D et E, on peut s'approcher aussi près que l'on veut de la distribution de la température initiale donnée.

Ainsi, les solutions partielles s'écrivent

$$T_1 = D_1 A\ (k_1 x)\ e^{-ak_1^2\tau} + E_1 B\ (k_1 x)\ e^{-ak_1^2\tau};$$
$$T_2 = D_2 A\ (k_2 x)\ e^{-ak_2^2\tau} + E_2 B\ (k_2 x)\ e^{-ak_2^2\tau}, \qquad (III.13)$$

etc.

La solution générale est de la forme

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} D_n A\ (k_n x)\ e^{-ak_n^2\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n B\ (k_n x)\ e^{-ak_n^2\tau}. \qquad (III.14)$$

La condition nécessaire de la résolution du problème est le développement possible de la fonction qui décrit la distribution initiale de la température $T_0\ (x)$ en série par rapport aux fonctions propres

$$T_0\ (x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n A\ (k_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n B\ (k_n x).$$

L'application de la méthode de séparation des variables est montrée dans ce qui suit sur l'exemple du champ thermique non stationnaire d'une plaque plane, d'un cylindre, d'une sphère.

La **méthode des sources** est une des méthodes classiques particulièrement indiquée pour résoudre des problèmes de conductivité thermique d'un domaine indéfini ou demi-limité. L'exemple d'un tel problème peut être fourni par l'étude du champ thermique non stationnaire dans le sol dans le cas de la variation des conditions extérieures.

Le sens physique de la méthode des sources consiste dans le fait que le processus de propagation de la chaleur dans le corps par conductivité thermique se présente comme l'ensemble des processus d'égalisation de la température d'une multitude des sources de chaleur, réparties aussi bien dans l'espace que dans le temps.

Considérons le problème de détermination du champ thermique unidimensionnel non stationnaire pour un domaine indéfini sous des conditions initiales données. Comme modèle physique d'un tel problème peut servir une barre de longueur infinie à section droite d'une surface $F = 1\ m^2$ constante suivant la longueur, dont la surface latérale est thermiquement isolée. La distribution initiale de la température dans la barre est donnée.

Ce problème vérifie l'équation (III.1), c'est-à-dire

$$\partial T/\partial\tau = a\partial^2 T/\partial x^2 \quad \text{pour} \quad -\infty < x < +\infty.$$

A $\tau = 0$, la distribution initiale de la température dans la barre est $T\ (x,\ 0) = T_0\ (x)$.

Comme nous l'avons montré au paragraphe précédent, la méthode de séparation des variables permet d'obtenir à partir de l'équation (III.1) deux équations différentielles linéaires ordinaires, et notamment

$$T' + ak^2 T = 0; \quad \psi'' + k^2\psi = 0.$$

Les solutions partielles de ces équations sont

$$T = C_1 e^{-ak^2\tau} \text{ et } \psi = C_2 e^{\pm ikx}, \tag{III.15}$$

et la solution partielle de l'équation (III.1) est

$$T(k) = T(\tau)\,\psi(x) = C(k)\,e^{-ak^2\tau \pm ikx}. \tag{III.16}$$

La fonction $T(k)$ satisfait à la condition de limitation. Ici k est un nombre réel quelconque ($-\infty < k < +\infty$); on retient donc dans (III.16) le signe plus.

Composons la fonction

$$T(x, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k)\,e^{-ak^2\tau + ikx}\,dk, \tag{III.17}$$

qui, si les dérivées peuvent se calculer par dérivation sous le signe somme, vérifie (III.1) comme une somme des solutions partielles de cette équation. En utilisant les conditions initiales, on a

$$T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(k)\,e^{ikx}\,dk. \tag{III.18}$$

Les coefficients $C(k)$ se trouvent d'après la formule de la transformation inverse de l intégrale de Fourier, c'est-à-dire

$$C(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi)\,e^{-ik\xi}\,d\xi. \tag{III.19}$$

En portant (III.19) dans (III.18) et en changeant l'ordre d'intégration, on obtient

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi)\,e^{-ik\xi}\,d\xi\right) e^{-ak^2\tau + ikx}\,dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2\tau + ik(x-\xi)}\,dk\right) T(\xi)\,d\xi. \tag{III.20}$$

Après les transformations, l'intégrale placée entre parenthèses se ramène à la forme

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ak^2\tau + ik(x-\xi)}\,dk = \frac{1}{2\sqrt{\pi a\tau}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}}. \tag{III.21}$$

Cette expression s'appelle *solution fondamentale de l'équation de la conductivité thermique*. La solution s'appelle aussi fonction de source sur une droite infinie, notée comme suit:

$$G(x, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a\tau}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}}. \tag{III.22}$$

La vérification immédiate peut montrer que la fonction

$$G(x, \xi, \tau-\tau_0)=\frac{Q}{2C\rho\sqrt{\pi a(\tau-\tau_0)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\tau-\tau_0)}} \qquad \text{(III.123)}$$

est la température au point x à l'instant τ, si à l'instant initial $\tau = \tau_0$ au point de coordonnée ξ la quantité de chaleur dégagée $Q = C\rho$ (on peut retenir τ_0 nul), où C est la capacité calorifique; ρ, la densité du matériau de la barre.

En effet, la fonction (III.23) vérifie l'équation de la conductivité thermique (III.1) du fait que

$$\frac{\partial G}{\partial x}=-\frac{1}{2\pi}\frac{x-\xi}{2[a(\tau-\tau_0)]^{3/2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\tau-\tau_0)}};$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{[a(\tau-\tau_0)]^{3/2}}+\frac{(x-\xi)^2}{4[a(\tau-\tau_0)]^{5/2}}\right]e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\tau-\tau_0)}};$$

$$\frac{\partial G}{\partial \tau}=\frac{a}{2\pi}\left[-\frac{1}{2[a(\tau-\tau_0)]^{3/2}}+\frac{(x-\xi)^2}{4[a(\tau-\tau_0)]^{5/2}}\right]e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\tau-\tau_0)}}$$

et, par suite,

$$\partial G/\partial\tau = a\partial^2 G/\partial x^2.$$

La quantité de chaleur dans la barre à l'instant $\tau > \tau_0$

$$C\rho\int_{-\infty}^{+\infty}G(x, \xi, \tau-\tau_0)\,dx=\frac{Q}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a(\tau-\tau_0)}}\frac{dx}{2a(\tau-\tau_0)}=$$

$$=\frac{Q}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=Q=\rho C, \qquad \text{(III.24)}$$

étant donné que

$$\alpha=\frac{x-\xi}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau_0)}}; \qquad d\alpha=\frac{dx}{2\sqrt{a(\tau-\tau_0)}};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha=\sqrt{\pi}.$$

L'équation (III.24) implique que la quantité de chaleur dans la barre ne change pas avec le temps. La fonction (III.23) dépend du temps seulement par l'intermédiaire de $\nu = a(\tau - \tau_0)$, et elle peut s'écrire

$$G=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu}}. \qquad \text{(III.25)}$$

La forme de la fonction G est donnée par la figure III.1, d'où il ressort que presque toute l'aire sous la courbe se trouve au-dessus de l'intervalle $(\xi - \varepsilon)$ — — $(\xi + \varepsilon)$, où ε peut être aussi petit que l'on veut, si $\nu = a(\tau - \tau_0)$ est suffi-

samment petit. La valeur de l'aire multipliée par ($C\rho$) est égale à la quantité de chaleur amenée à l'instant initial. Pour de petites valeurs de ν presque toute la chaleur se concentre au voisinage du point ξ. Par conséquent, à l'instant $\tau = \tau_0$ toute la quantité de chaleur se trouve au point ξ, alors que pour de petits ν la température en ce point est infiniment grande.

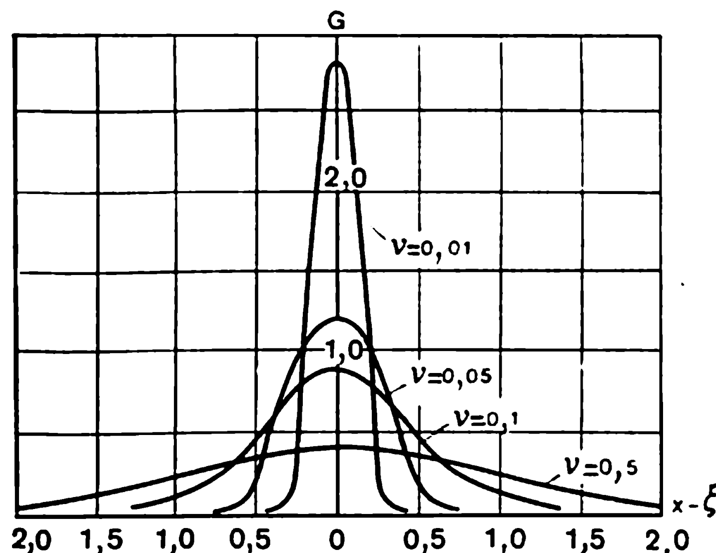


Fig. III.1. Forme de la fonction G

Il est intéressant de noter le fait suivant: la formule (III.23) montre qu'en tout point x la température produite par une source de chaleur ponctuelle instantanée qui agit à l'instant initial $\tau = 0$ diffère de zéro pour les moments de temps aussi petits que l'on veut. Ce résultat peut être envisagé comme conséquence de la propagation rapide de la température et, par suite, de la chaleur. Pourtant, ceci contredit aux idées moléculaires et cinétiques sur la nature de la chaleur. Ce désaccord s'explique par l'application dans la déduction de l'équation différentielle de la conductivité thermique des idées phénoménologiques sur le transfert de chaleur, qui ne tiennent pas compte de l'inertie du mouvement des molécules.

En reprenant l'expression (III.20), mettons-la sous la forme

$$T(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a\tau}}\, d\xi. \qquad \text{(III.26)}$$

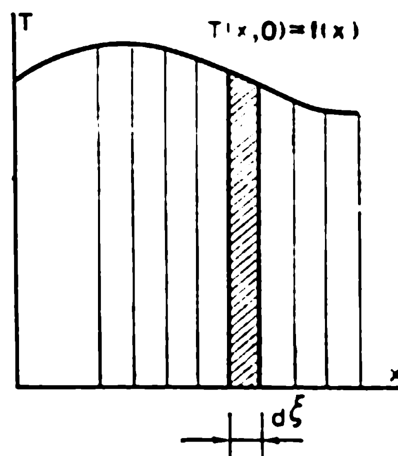


Fig. III.2. Distribution initiale de la température

Cette formule constitue précisément la solution générale du problème de définition du champ thermique dans un corps indéfini unidimensionnel. Pour l'instant initial, l'équation (III.26) est une substitution de la distribution initiale de la température par la somme des solutions partielles (fig. III.2).

Méthodes de transformation intégrale. Pour résoudre de nombreux problèmes sur la conductivité thermique, les méthodes classiques ne suffisent pas, et

de nos jours on recourt largement aux différentes méthodes de transformation intégrale des équations différentielles et des conditions aux limites. Le principe de ces méthodes consiste dans le fait qu'on soumet à l'étude non pas les fonctions elles-mêmes définies par la position du problème, mais leur modification, ce qu'on appelle leur transformée, la fonction elle-même se nommant alors original. Si la transformation se fait par rapport à une coordonnée spatiale x, la transformation intégrale de la fonction de l'original $f(x)$ peut être mise sous la forme

$$f(p)=\int_0^\infty K(p, x)\, f(x)\, dx, \tag{III.27}$$

où $f(p)$ est la transformée de la fonction $f(x)$; $K(p, x)$, le noyau de la transformation; p, un certain paramètre.

Les limites d'intégration peuvent être aussi bien infinies que finies; dans ce dernier cas la transformation intégrale est dite finie et s'écrit

$$f(p)=\int_a^b K(p, x)\, f(x)\, dx.$$

La forme du noyau de la transformation est déterminée par les conditions du problème envisagé. Ainsi, pour les corps d'une étendue indéfinie, il est commode d'employer la transformation complexe de Fourier, telle que $K(p, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$ et pour laquelle les limites d'intégration sont prises de $-\infty$ à $+\infty$.

Lorsqu'à la surface du corps les conditions aux limites du I[er] genre (la valeur de la fonction) sont données, il convient d'employer la transformation de Fourier en sinus; en cas des conditions aux limites du II[e] genre, la transformation de Fourier en cosinus. Les noyaux des transformations ont alors respectivement la forme

$$K(p, x) = \sqrt{2/\pi}\sin(p, x),$$
$$K(p, x) = \sqrt{2/\pi}\cos(p, x). \tag{III.28}$$

Pour les corps à symétrie axiale (par exemple, pour un cylindre) le noyau de la transformation doit être une fonction de Bessel

$$K(p, x) = rJ(pr), \tag{III.29}$$

où $J(pr)$ est la fonction de Bessel; r, la variable indépendante qui change de 0 à R (R est le rayon extérieur). La transformation intégrale dans ce cas porte le nom de transformation de Hankel.

Pour résoudre les problèmes de la conductivité thermique non stationnaire, les plus usitées sont les méthodes de la transformation intégrale de Laplace et la méthode opérationnelle de Heaviside. Dans la méthode de transformation de Laplace, la transformation intégrale de la fonction qui dépend du temps $f(\tau)$ est définie par la formule

$$f(p)=\int_0^\infty f(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau. \tag{III.30}$$

L'application de la méthode des transformations intégrales aux équations différentielles aux dérivées partielles permet d'obtenir pour le cas unidimensionnel une équation différentielle ordinaire par rapport à la transformée. Alors que

l'application des transformations intégrales aux équations différentielles ordinaires les transforme en équations algébriques par rapport aux transformées. En cherchant ensuite la valeur de la fonction qui constitue la transformée, il faut (pour résoudre le problème) passer à l'original. Ce passage se fait d'après ce qu'on appelle les formules d'inversion:

pour la transformation complexe de Fourier

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(p)\,e^{-ipx}\,dp; \qquad \text{(III.31)}$$

pour la transformation de Fourier en sinus

$$f(x)=\sqrt{2/\pi}\int_{0}^{\infty} f(p)\sin(px)\,dp; \qquad \text{(III.32)}$$

pour la transformation de Fourier en cosinus

$$f(x)=\sqrt{2/\pi}\int_{0}^{\infty} f(p)\cos(px)\,dp; \qquad \text{(III.33)}$$

pour la transformation de Hankel

$$f(r)=\int_{0}^{\infty} rf(p)\,J(pr)\,dp; \qquad \text{(III.34)}$$

pour la transformation de Laplace

$$f(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(p)\,e^{p\tau}\,dp. \qquad \text{(III.35)}$$

Vu la large application de la méthode opérationnelle, examinons-la de plus près.

La transformation de Laplace est réalisée d'après la formule (III.30), où le paramètre $p=\sigma+i\xi$ est une certaine grandeur complexe qui, avec σ constant et ξ variant de $-\infty$ à $+\infty$, change de $\sigma-i\infty$ à $\sigma+i\infty$ (fig. III.3), en parcourant dans le domaine complexe p la droite $\operatorname{Re}(p)=\sigma$, parallèle à l'axe imaginaire. A la transformation de Laplace peuvent être soumises les fonctions aux propriétés suivantes:

1. Pour des valeurs négatives de l'argument, la fonction correspondante est nulle

$$f(\tau)=0 \quad \text{pour} \quad \tau<0.$$

2. Pour des valeurs positives de l'argument, l'ordre de croissance des valeurs absolues des fonctions avec la croissance de l'argument ne dépasse pas l'ordre de croissance d'une certaine fonction exponentielle

$$|f(\tau)|\leqslant Me^{\sigma_0\tau} \quad \text{pour} \quad \tau>0.$$

Ainsi, la fonction e^{τ^2} ne possède pas de transformée du fait que l'intégrale de Laplace diverge.

3. La fonction $f(\tau)$ doit vérifier les conditions de Dirichlet, c'est-à-dire l'intervalle dans lequel la fonction $f(\tau)$ est définie peut être divisé en un nombre fini d intervalles dans chacun desquels $f(\tau)$ est continue et monotone, et en tout point de discontinuité les valeurs des fonctions $f(\tau+0)$ et $f(\tau-0)$ existent.

Sous les contraintes indiquées, la transformée $f(p)$ est une fonction analytique dans le demi-plan à droite de la ligne droite $\operatorname{Re}(p)=\sigma_0$ (fig. III.3), c'est-à-

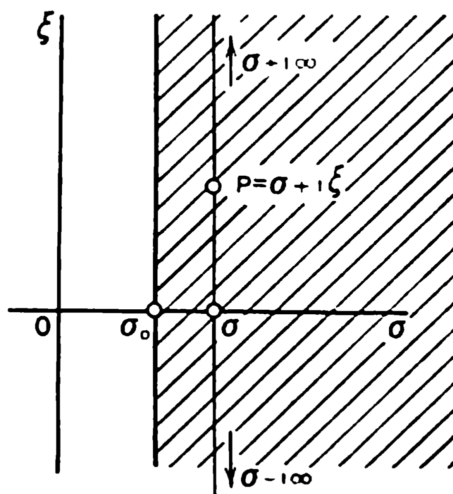


Fig. III.3. Domaine d'existence de l'image $f(p)$ de la fonction $f(\tau)$

dire la fonction $f(p)$ possède dans le domaine indiqué les dérivées de tous les ordres et tous ses points singuliers reposent dans le domaine complexe à gauche de la droite σ_0.

Trouver la transformée

1) $f(\tau)=C=\text{const}$ $(\tau>0)$:

$$f(p)=\int_0^\infty Ce^{-p\tau}\,d\tau=\frac{C}{p}\;e^{-p\tau}\Big|_0^\infty=\frac{C}{p} \tag{III.36}$$

(pour $p>0$);

2) $f(\tau)=C\tau$:

$$f(p)=\int_0^\infty C\tau e^{-p\tau}\,d\tau=\frac{C}{p^2}\,; \tag{III.37}$$

3) $f(\tau)=e^{k\tau}$ $(\tau>0)$:

$$f(p)=\int_0^\infty e^{-(p-k)\tau}\,d\tau=\frac{1}{p-k} \tag{III.38}$$

(pour $p>k$).

Mais si $f(\tau)=e^{-k\tau}$, il vient

$$f(p)=\frac{1}{p+k}. \tag{III.39}$$

Dans les ouvrages de référence et la littérature sur le calcul opérationnel on trouve de multiples données sous la forme des transformées de différents originaux des fonctions.

Voici les propriétés principales de la transformée de Laplace.

L i n é a r i t é. Les exemples mentionnés entraînent que si C = const et à l'original $f(\tau)$ correspond la transformée $f(p)$, à la fonction $Cf(\tau)$ correspond la transformée $Cf(p)$. Ensuite, si les fonctions $f_1(\tau)$ et $f_2(\tau)$ possèdent respectivement les transformées $f_1(p)$ et $f_2(p)$, on vérifie l'égalité

$$f_1(\tau) + f_2(\tau) \doteqdot f_1(p) + f_2(p). \qquad \text{(III.40)}$$

c'est-à-dire la transformée de la somme des originaux est égale à la somme des transformées de ces originaux. Par exemple,

$$f(\tau) = \sin(\omega\tau) = \frac{1}{2i}\left(e^{+i\omega\tau} - e^{-i\omega\tau}\right),$$

alors

$$f(p) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Pour

$$f(\tau) = \cos(\omega\tau) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}\right)$$

la transformée est de la forme

$$f(p) = 2\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}.$$

T r a n s f o r m é e d e l a d é r i v é e. Si $\varphi(\tau) = f'(\tau)$, en utilisant la règle d'intégration par parties, on obtient

$$\varphi(p) = \int_0^\infty \varphi(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau = e^{-p\tau} f(\tau)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(\tau)\, e^{-p\tau}\, d\tau. \qquad \text{(III.41)}$$

Si $f(\tau)$ appartient aux fonctions à propriétés 1, 2, 3, alors $e^{-p\tau} f(\tau) \to 0$ avec $\tau \to \infty$ et $e^{-p\tau} f(\tau) \to f(0)$ avec $\tau \to 0$. Dans ce cas l'expression (III.41) se ramène à la forme

$$\varphi(p) = f'(p) = pf(p) - f(0), \qquad \text{(III.42)}$$

c'est-à-dire la dérivation de l'original de la fonction correspond à la multiplication de la transformée par p avec soustraction ultérieure de la constante $f(0)$. Pour une dérivée du deuxième ordre $\psi(\tau) = f''(\tau)$

$$\psi(p) = \int_0^\infty f''(\tau)\, e^{-p\tau} d\tau = e^{-p\tau} f'(\tau)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f'(\tau)\, e^{-p\tau} d\tau = -f'(0) +$$

$$+ p\left[e^{-p\tau} f(\tau)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(\tau)\, e^{-p\tau} d\tau\right] = p^2 f(p) - pf(0) - f'(0). \qquad \text{(III.43)}$$

Dans le cas général, si $F(\tau) = f^{(n)}(\tau)$, la transformée de cette fonction se calcule d'après la formule

$$F(p) = \int_0^\infty f^{(n)}(\tau)\, e^{-p\tau} d\tau = p^n f(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-1} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \tag{III.44}$$

Pour chercher la fonction primitive de l'original d'après sa transformée, on peut utiliser la formule (III.35). La méthodologie de l'intégration dans le plan complexe est exposée en détail dans les ouvrages sur la théorie des fonctions de la variable complexe. Pourtant, pour les originaux et les transformées, on utilise le plus souvent des tables toutes prêtes [24]; d'autre part, au lieu de la formule (III.35) on peut utiliser la formule d'inversion suivante (c'est-à-dire trouver l'original d'après sa transformée):

$$f(\tau) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{\tau}\right)^{n+1} f_p^{(n)} \left(\frac{n}{\tau}\right) \right], \tag{III.45}$$

où $f(p)$ est la transformée de la fonction $f(\tau)$ dans laquelle au lieu de la grandeur p on a porté (n/τ); par exemple, $f(p) = \dfrac{1}{p+1}$. Calculer $f(\tau)$. Puisque $f_p^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(p+1)^{n+1}}$, alors, en vertu de (III.45)

$$f(\tau) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{\tau}\right)^{n+1} \frac{(-1)^n n!}{\left(\frac{n}{\tau}+1\right)^{n+1}} \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\tau/n)^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\tau/n)^n} = \frac{1}{e^\tau} = e^{-\tau}. \tag{III.46}$$

La formule (III.45) permet de calculer l'original seulement à l'aide des opérations de dérivation et du passage à la limite. Pour plusieurs cas particuliers il existe également d'autres formules d'inversion.

A titre d'illustration de l'application de la transformation de Laplace, examinons la transformation de l'équation différentielle unidimensionnelle de la conductivité thermique $\dfrac{\partial T}{\partial \tau} = a \dfrac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}$:

$$\int_0^\infty \frac{\partial T}{\partial \tau} e^{-p\tau} d\tau = pT(x, p) - T(x, 0), \tag{III.47}$$

où $T(x, p)$ est la transformée de l'original $T(x, \tau)$; $T(x, 0)$, la distribution initiale de la température:

$$\int_0^\infty a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} e^{-p\tau} d\tau = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty T(x, \tau)\, e^{-p\tau} d\tau = a \frac{d^2 T(p, x)}{dx^2}. \tag{III.48}$$

De la sorte, l'équation (III.1) aux dérivées partielles se transforme en une équation différentielle ordinaire par rapport à la transformée

$$a \frac{d^2 T(x, p)}{dx^2} - pT(x, p) + T(x, 0) = 0. \tag{III.49}$$

Considérons le cas le plus simple, lorsque la distribution initiale de la température est la même en tous les points du corps et égale à zéro

$$T(x,\ 0) = 0. \tag{III.50}$$

Alors, l'équation (III.49) se met sous la forme

$$\frac{d^2T(x,\ p)}{dx^2} - \frac{p}{a} T(x,\ p) = 0. \tag{III.51}$$

La solution de cette équation s'écrit:

$$T(x,\ p) = A_1 e^{\sqrt{\frac{p}{a}}x} + B_1 e^{-\sqrt{\frac{p}{a}}x} = A \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{a}}\, x + B \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{a}}\, x, \tag{III.52}$$

où $A_1 = \frac{A+B}{2}$ et $B_1 = \frac{A-B}{2}$ sont les grandeurs constantes par rapport à x mais dépendant de p. Ces constantes se déterminent à partir des conditions aux limites, après quoi à l'aide du tableau des transformées on trouve l'original $T(x,\ \tau)$.

§ III.2. Processus non stationnaires de conductivité thermique dans une plaque indéfinie

Examinons le problème d'un corps qui tend vers l'équilibre thermique.

On donne une plaque d'épaisseur 2δ, dont les dimensions dans le sens des axes y et z sont illimitées.

Les conditions physiques déterminent les valeurs du coefficient de conductivité thermique du matériau de la plaque (λ = const), de la capacité calorifique (C=const), de la densité ρ; la plaque ne possède pas de sources de chaleur internes. La plaque à l'instant initial ayant une température uniforme t_0 est plongée dans un courant de fluide à température constante t_f différente de t_0.

Les conditions aux limites sont définies par les valeurs constantes et identiques des coefficients de transmission de chaleur α aux deux surfaces de la plaque.

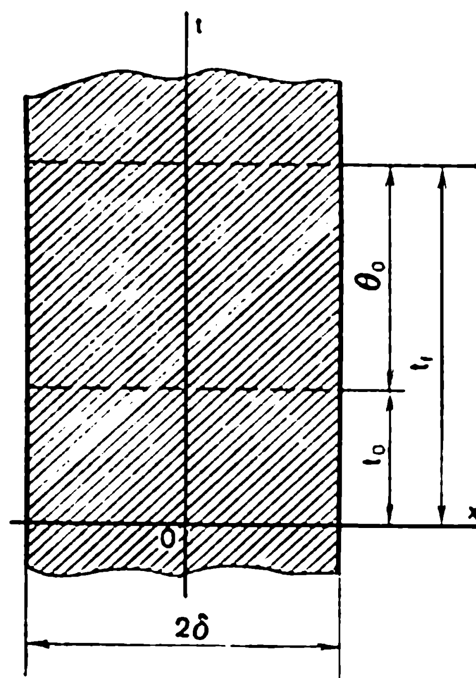


Fig. III.4. Schématisation du calcul du chauffage d'une plaque plane

Les dimensions linéaires des surfaces de la plaque étant grandes par rapport à son épaisseur, la température change seulement dans le sens perpendiculaire à la surface de la plaque, c'est-à-dire le champ thermique est unidimensionnel. D'autre part, la symétrie des

conditions aux limites par rapport au plan médian fait qu'à tout instant le champ thermique est également symétrique par rapport à ce plan. Pour le problème envisagé il est commode de situer l'origine des coordonnées au centre de la plaque, d'après la figure III.4, en orientant l'axe OX suivant la normale à l'axe de la plaque.

Pour la commodité des calculs ultérieurs, la température est lue à partir de l'ambiante : $\vartheta = t_f - t$.

Alors, l'équation différentielle de la conductivité thermique (III.1) s'écrit

$$\partial\vartheta/\partial\tau = a\partial^2\vartheta/\partial x^2, \qquad \text{(III.53)}$$

puisque

$$\partial t/\partial\tau = -\partial\vartheta/\partial\tau \text{ et } \partial^2 t/\partial x^2 = -\partial^2\vartheta/\partial x^2. \qquad \text{(III.54)}$$

Les conditions d'univalence se mettent sous la forme :
conditions initiales

$$\text{avec } \tau = 0,\ \vartheta = \vartheta_0 = t_f - t_0;$$
$$\text{avec } \tau \to \infty,\ \vartheta \to 0 \text{ pour } -\delta \leqslant x \leqslant +\delta; \qquad \text{(III.55)}$$

conditions aux limites

$$\lambda\, \partial\vartheta/\partial x = -\alpha\vartheta \text{ pour } x = +\delta;$$
$$\qquad \text{(III.56)}$$
$$\lambda\, \partial\vartheta/\partial x = \alpha\vartheta \quad \text{pour } x = -\delta.$$

La dernière équation peut être remplacée par la condition plus simple de la symétrie du champ thermique

$$\partial\vartheta/\partial x = 0 \text{ avec } x = 0. \qquad \text{(III.57)}$$

Résolvons le problème posé par la méthode de séparation des variables en présentant la fonction cherchée ϑ sous la forme de produit de deux fonctions $\psi(x)$ et $T(\tau)$, dont chacune ne dépend que d'un seul argument

$$\vartheta = \psi(x)\, T(\tau). \qquad \text{(III.58)}$$

En portant (III.58) dans (III.53), on obtient

$$\psi(x)\,\frac{\partial T(\tau)}{\partial\tau} = a\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\cdot T(\tau), \qquad \text{(III.59)}$$

ou, en séparant les variables,

$$\frac{1}{a}\,\frac{T'}{T} = \frac{\psi''}{\psi}. \qquad \text{(III.60)}$$

Le premier membre de l'équation (III.60) ne dépendant pas de la coordonnée x, et le deuxième, du temps τ, la valeur totale des premier et deuxième membres ne doit dépendre ni de x ni de τ :

$$\frac{1}{a}\,\frac{T'}{T} = \text{const}; \quad \frac{\psi''}{\psi} = \text{const}. \qquad \text{(III.61)}$$

La condition (III.55) entraîne que lors de l'échauffement de la plaque, $\partial\vartheta/\partial\tau < 0$ (donc, également, $\partial T/\partial\tau < 0$); par conséquent la constante de l'équation (III.61) doit être négative. (Dans le cas du refroidissement de la plaque avec $t_f > t_0$, la conclusion sur le signe de la constante sera la même.)

Désignons la constante par $(-k^2)$ et, en résolvant les équations (III.61), obtenons

$$T(\tau) = C_1 e^{-ak^2\tau}; \tag{III.62}$$

$$\psi(x) = C_2 \sin(kx) + C_3 \cos(kx), \tag{III.63}$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes d'intégration qui, tout comme la valeur de la constante k, s'obtiennent à partir des conditions initiales et aux limites.

En utilisant la condition de symétrie (III.57) $\partial\vartheta/\partial x\,|_{x=0} = 0$, on a

$$\partial\psi/\partial x\,|_{x=0} = 0. \tag{III.64}$$

En dérivant (III.63) et en tenant compte de (III.64), on trouve $C_2 = 0$; donc

$$\psi(x) = C_3 \cos(kx). \tag{III.65}$$

L'expression du champ de la température excédentaire est de la forme

$$\vartheta = Ce^{-ak^2\tau}\cos(kx), \tag{III.66}$$

où $C = C_1C_3$.

Utilisons la condition aux limites (III.56) sous la forme

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{x=\delta} = -\frac{\alpha}{\lambda}\,\vartheta\,|_{x=\delta} \tag{III.67}$$

pour obtenir, en y portant l'équation (III.66) et la dérivée $\partial\vartheta/\partial x$ avec la valeur de $x = \delta$,

$$-kCe^{-ak^2\tau}\sin(k\delta) = -\frac{\alpha}{\lambda}Ce^{-ak^2\tau}\cos(k\delta), \tag{III.68}$$

ou, en réduisant les deux membres de l'égalité par $Ce^{-ak^2\tau}$, aboutissons à l'équation transcendante de la détermination de la constante k

$$k\lambda/\alpha = \operatorname{cotg}(k\delta), \tag{III.69}$$

ou

$$k\delta\lambda/(\alpha\delta) = \operatorname{cotg}(k\delta). \tag{III.70}$$

Introduisons la notation $k\delta = n$ et $\alpha\delta/\lambda = \mathrm{Bi}$ (critère de Biot); il vient

$$n/\mathrm{Bi} = \operatorname{cotg}(n). \tag{III.71}$$

L'équation (III.71) s'appelle *équation caractéristique*; on peut la résoudre graphiquement en cherchant les points d'intersection de la droite $y_1 = n/\text{Bi}$ avec les cotangentoïdes $y_2 = \text{cotg}\,(n)$. La figure III.5 schématise la résolution graphique de l'équation (III.71).

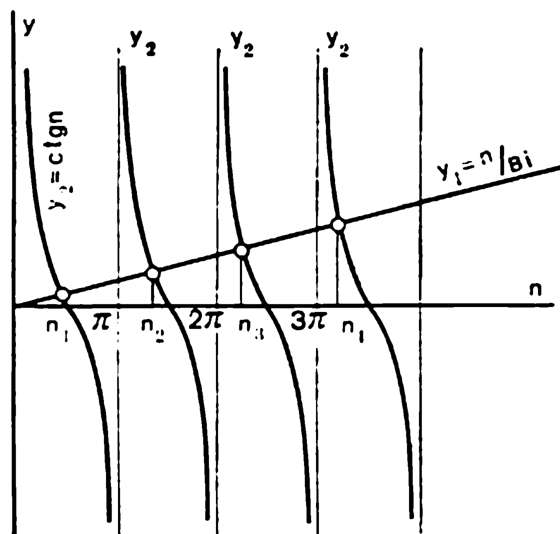


Fig. III.5. Solution de l'équation (III.71)

Comme le montre le dessin, l'équation (III.71) possède un nombre infini de solutions n_i; ces grandeurs s'appellent *nombres propres* du problème. Les valeurs des nombres propres dépendent du numéro d'ordre i et du nombre Bi. Le caractère de cette dépendance est visualisé sur la figure III.6.

Pour $\text{Bi} \to \infty$ la droite $y_1 = n/\text{Bi}$ coïncide avec l'axe des abscisses, et les racines de l'équation (III.71) ont les valeurs

$$n_1 = \pi/2;\; n_2 = 3\pi/2;\; n_3 = 5\pi/2;\; \ldots;\; n_i = (2i - 1)\,\pi/2.$$

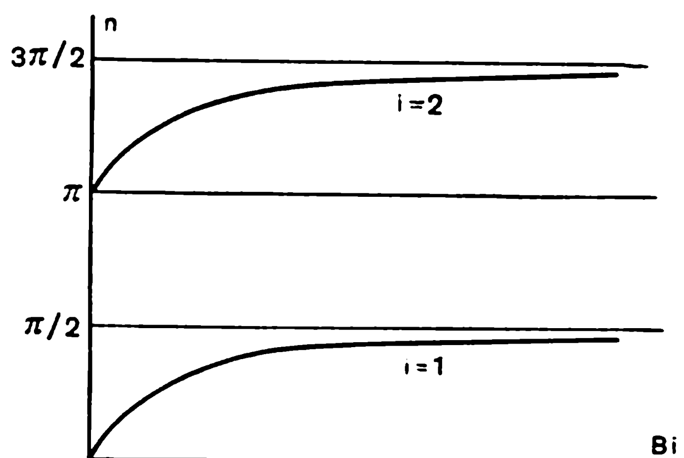


Fig. III.6. Détermination des nombres propres n_i

Pour $\text{Bi} \to 0$ la droite $y_1 = n/\text{Bi}$ coïncide avec l'axe des ordonnées et les nombres propres deviennent

$$n_1 = 0;\; n_2 = \pi;\; n_3 = 2\pi;\; \ldots;\; n_i = (i - 1)\,\pi,$$

où $i = 1, 2, 3.$

De la sorte, en partant de l'équation (III.66), chaque valeur du nombre propre n_i conduit aux solutions partielles

$$\vartheta_1 = C_1 \cos(n_1 x/\delta) \exp(-a n_1^2 \tau/\delta^2);$$
$$\vartheta_2 = C_2 \cos(n_2 x/\delta) \exp(-a n_2^2 \tau/\delta^2);$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\vartheta_i = C_i \cos(n_i x/\delta) \exp(-a n_i^2 \tau/\delta^2); \qquad \text{(III.72)}$$

La solution générale de l'équation différentielle (III.53) se calcule comme la somme des solutions partielles

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos(n_i x/\delta)\, e^{-n_i^2 a\tau/\delta^2}. \qquad \text{(III.73)}$$

La fonction ϑ vérifie les conditions aux limites, puisque ces dernières sont vérifiées par tous les termes de la série. Les constantes C_i sont déterminées à partir des conditions initiales (III.55)

$$\vartheta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_i \cos(n_i x/\delta), \qquad \text{(III.74)}$$

c'est-à-dire les C_i sont les coefficients de Fourier de la fonction ϑ_0 lors de son développement suivant les cosinus dans l'intervalle de $-\delta$ à $+\delta$.

Pour le calcul des coefficients C_i, les premier et deuxième membres de (III.74) sont multipliés par $\cos(n_j x/\delta)\, dx$ et intégrés de $-\delta$ à $+\delta$, alors que j prend toutes les valeurs entières, y compris i:

$$\vartheta_0 \int_{-\delta}^{+\delta} \cos(n_j x/\delta)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_i \int_{-\delta}^{+\delta} \cos(n_i x/\delta) \cos(n_j x/\delta)\, dx. \qquad \text{(III.75)}$$

On montre sans peine (propriété d'orthogonalité) que

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \cos\left(n_i \frac{x}{\delta}\right) \cos\left(n_j \frac{x}{\delta}\right) dx =$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j; \\ \int_{-\delta}^{+\delta} \cos^2(n_i x/\delta)\, dx & \text{pour } i = j. \end{cases} \qquad \text{(III.76)}$$

Il s'ensuit que l'expression déterminant C_i s'écrit

$$C_i = \frac{\vartheta_0 \int\limits_{-\delta}^{+\delta} \cos (n_i x/\delta)\, dx}{\int\limits_{-\delta}^{+\delta} \cos^2 (n_i x/\delta)\, dx} = \frac{\vartheta_0 \frac{2\delta}{n_i} \sin n_i}{\delta \left(1 + \frac{1}{2n_i} \sin 2n_i\right)} = \vartheta_0 \frac{2 \sin n_i}{n_i + \sin n_i \cos n_i}. \tag{III.77}$$

En portant (III.77) dans (III.73), on obtient l'expression définitive pour le champ thermique de la plaque homogène chauffée symétriquement

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_0 \frac{2 \sin n_i}{n_i + \sin n_i \cos n_i} \cos (n_i x/\delta)\, e^{-n_i^2 a\tau/\delta^2}. \tag{III.78}$$

En retenant que $a\tau/\delta^2 = \mathrm{Fo}$ est le nombre de Fourier, écrivons l'expression sans dimensions de la chute de températures ou pression thermique

$$\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n_i}{n_i + \sin n_i \cos n_i} \cos \left(n_i \frac{x}{\delta}\right) e^{-n_i^2 \mathrm{Fo}}. \tag{III.79}$$

Dans la plupart des problèmes pratiques il convient de déterminer la température aux points caractéristiques des corps. Ainsi, pour une plaque, le plus d'intérêt présente soit la température à la surface $x = \pm\delta$, soit dans le plan médian $x = 0$. Pour ces cas la coordonnée sans dimensions $\bar{x} = x/\delta$ prend les valeurs 1 ou 0. L'expression $\frac{2 \sin n_i}{n_i + \sin n_i \cos n_i}$ est fonction seulement de n_i, c'est-à-dire fonction du numéro d'ordre et du critère Bi. Puisque les n_i sont les nombres dont la valeur croît avec le numéro d'ordre, les termes consécutifs de la série jouent un rôle de plus en plus petit avec la croissance de n_i [il convient de retenir que $\cos (n_i\bar{x})$ est une grandeur limitée, et $\exp (-n_i^2\mathrm{Fo})$ est une grandeur rapidement décroissante].

Les explorations montrent qu'avec $\mathrm{Fo} \geqslant 0{,}3$, la série (III.79) devient rapidement convergente et peut être avec une précision suffisante remplacée par le premier terme de la série

$$\Theta = \frac{2 \sin n_1}{n_1 + \sin n_1 \cos n_1} \cos (n_1\bar{x}) \exp (-n_1^2\mathrm{Fo}). \tag{III.80}$$

Pour l'axe de la plaque ($\bar{x} = 0$) on a

$$\Theta_{\bar{x}=0} = N(\mathrm{Bi}) \exp (-n_1^2\mathrm{Fo}) = f_1 (\mathrm{Bi};\ \mathrm{Fo}); \tag{III.81}$$

pour la surface extérieure ($\bar{x} = 1$),

$$\Theta_{\bar{x}=1} = P(\mathrm{Bi}) \exp (-n_1^2\mathrm{Fo}) = f_2 (\mathrm{Bi};\ \mathrm{Fo}), \tag{III.82}$$

où N (Bi) et P (Bi) sont les fonctions qui ne dépendent que du nombre de Biot.

De cette façon, pour les coordonnées données, la chute sans dimensions des températures n'est fonction que de deux nombres: Bi et Fo. En calculant le logarithme des équations (III.81) et (III.82), on obtient les expressions

$$\ln \Theta_{\bar{x}=0} = \ln N(\mathrm{Bi}) - n_1^2 \mathrm{Fo}; \quad \ln \Theta_{\bar{x}=1} = \ln (P(\mathrm{Bi}) - n_1^2 \mathrm{Fo}). \quad \text{(III.83)}$$

Il est commode de représenter (III.83) en coordonnées semi-logarithmiques (fig. III.7, III.8).

On porte en ordonnées les logarithmes d'Euler de la grandeur $\bar{\Theta}_{\bar{x}=1}$ ou $\bar{\Theta}_{\bar{x}=0}$, et en abscisses, le nombre de Fourier.

Le nombre de Biot est utilisé comme paramètre. En recourant aux graphiques, on peut réaliser les calculs suivants:

1) pour la durée de l'échauffement de la plaque (c'est-à-dire le nombre Fo étant donné) et l'intensité du transfert de chaleur par sa surface (c'est-à-dire le nombre Bi étant donné) données on calcule $\bar{\Theta}_{\bar{x}=0}$ et $\bar{\Theta}_{\bar{x}=1}$;

2) pour les $\bar{\Theta}_{\bar{x}=1}$ ou $\bar{\Theta}_{\bar{x}=0}$ et Bi donnés, on calcule la durée de l'échauffement, c'est-à-dire Fo;

3) pour Fo et $\bar{\Theta}_{\bar{x}=1}$ (ou $\bar{\Theta}_{\bar{x}=0}$) donnés, on détermine l'intensité du transfert de chaleur par la surface de la plaque, c'est-à-dire Bi.

L'équation (III.79) entraîne que dans la plaque le champ thermique a à tout instant la forme d'une courbe symétrique [cos $(n_i \bar{x})$ est une fonction paire]. Le minimum de la courbe se trouve sur l'axe de la plaque.

Pour tout instant les tangentes aux courbes de la température aux points $\bar{x} = \pm 1$ passent par les mêmes points $\pm N$ disposés symétriquement (fig. III.9).

Ces points sont dits *directeurs* et se trouvent par rapport à la surface de la plaque à une distance relative $\bar{x} = 1/\mathrm{Bi}$.

Pour le démontrer, ramenons les conditions aux limites (III.67)

$$-\partial\vartheta/\partial x = (\alpha/\lambda)\,\vartheta \text{ pour } x = +\delta$$

à la forme sans dimensions en multipliant les deux membres de l'égalité par δ/ϑ_0:

$$-\left[\frac{\partial\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)}{\partial\left(\frac{x}{\delta}\right)}\right]_{x=+\delta} = \frac{\alpha\delta}{\lambda}\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)_{x=+\delta}. \quad \text{(III.84)}$$

L'équation (III.84) s'écrit

$$\partial\Theta/\partial\bar{x}\,|_{\bar{x}=1} = -\mathrm{Bi}\,\Theta\,|_{\bar{x}=1}. \quad \text{(III.85)}$$

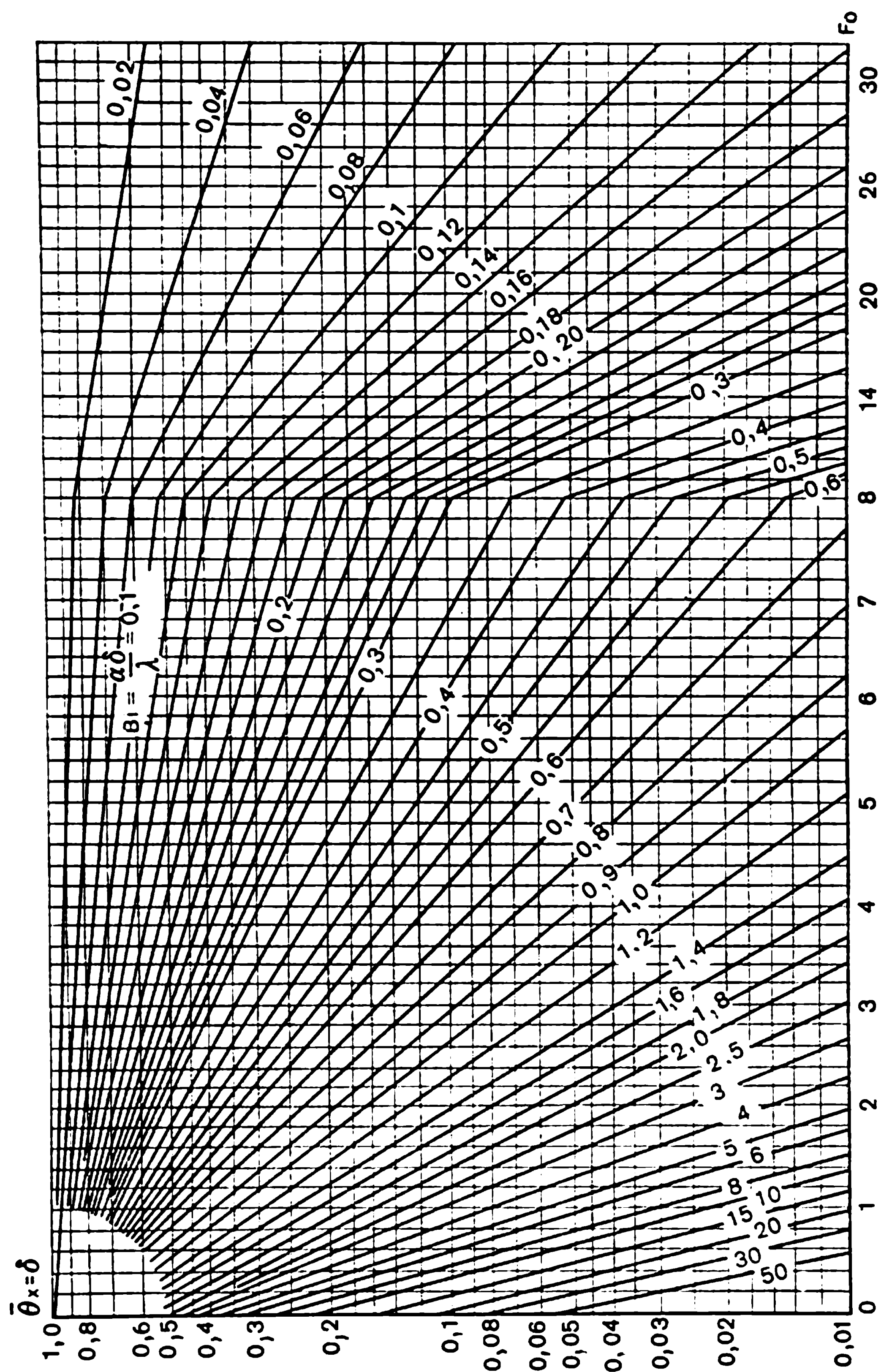


Fig. III.7. Relation entre la chute de températures sans dimension et les nombres de Fourier et de Biot pour la surface d'une plaque

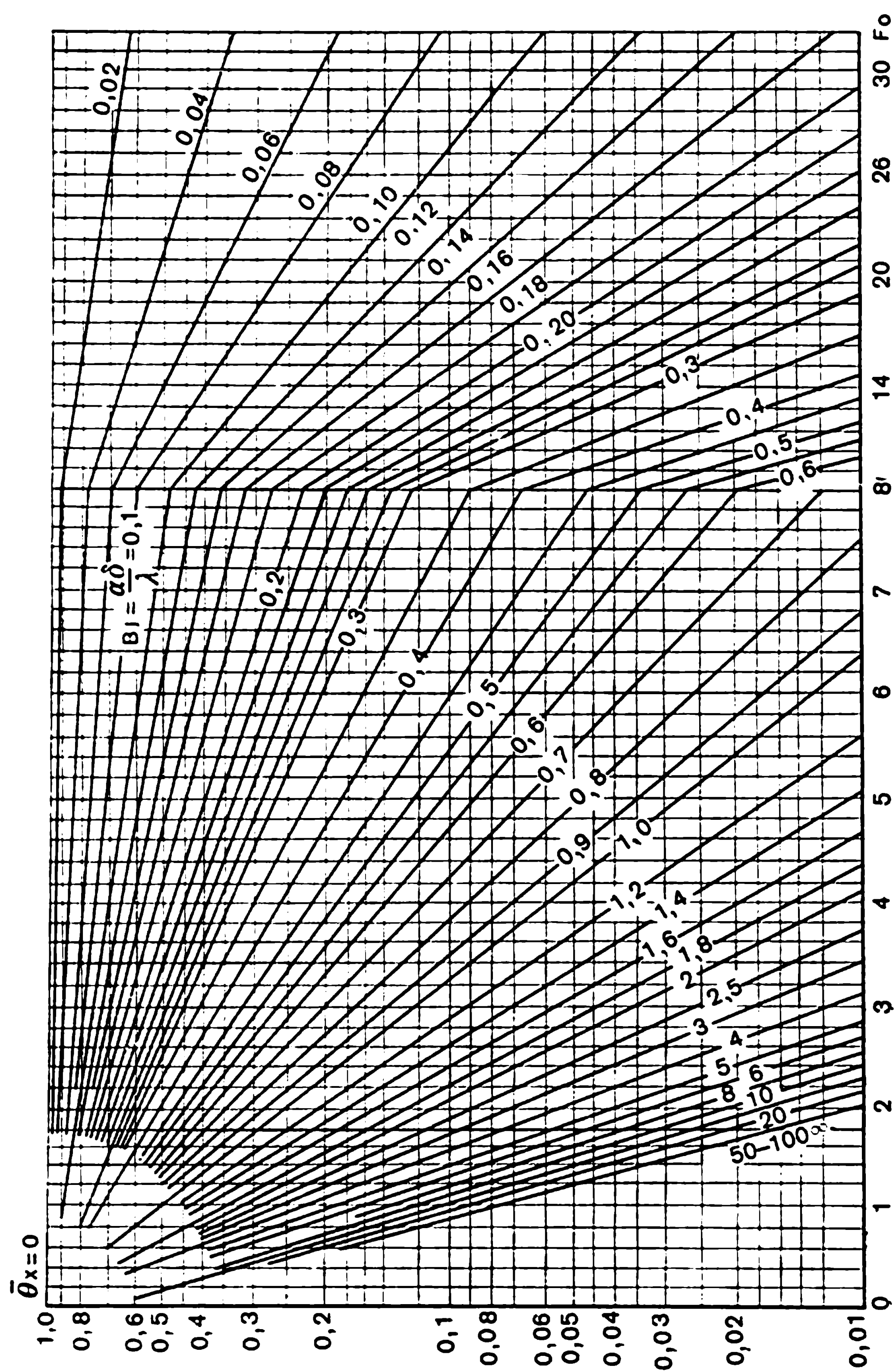


Fig. III.8. Relation entre la chute de températures sans dimension et les nombres de Fourier et de Biot pour le milieu d'une plaque

D'après le schéma de la figure III.9

$$-(\partial\Theta/\partial\bar{x})_{\bar{x}=1}=\Theta\,|_{\bar{x}=1}/\bar{x}_0=\operatorname{tg}\varphi. \qquad \text{(III.86)}$$

La comparaison des équations (III.85) et (III.86) entraîne

$$1/\bar{x}_0 = \text{Bi}. \qquad \text{(III.87)}$$

En portant dans l'équation (III.87) les grandeurs à dimensions, on trouve que

$$x_0 = \lambda/\alpha, \qquad \text{(III.88)}$$

c'est-à-dire la distance du point N par rapport à la surface de la plaque est déterminée par les conditions d'univalence; donc, les

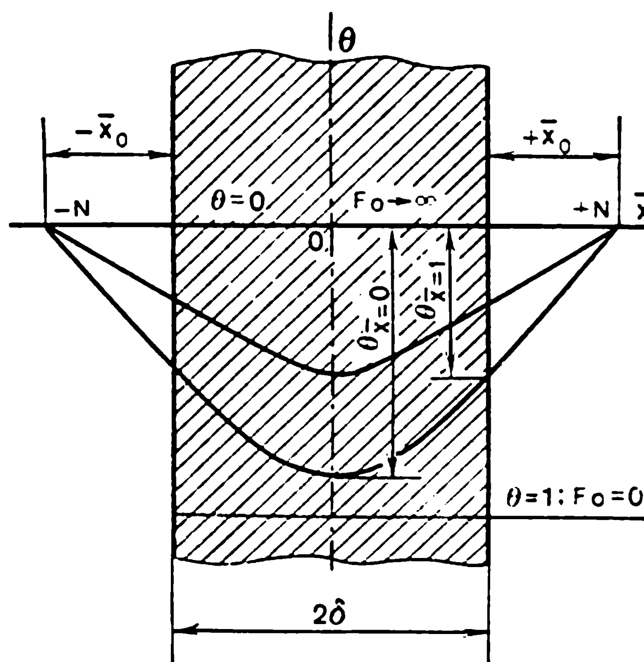


Fig. III.9. Variation du champ thermique d'une plaque **indéfinie**

tangentes à toutes les courbes de la température au point de leur intersection avec la surface de la plaque sous les conditions d'univalence invariables passent toujours par le point N.

§ III.3. Quantité de chaleur absorbée par une plaque subissant le chauffage

La quantité de chaleur amenée dans la plaque des deux côtés en un temps de $\tau = 0$ à $\tau = \infty$ est égale à la variation de l'enthalpie de la plaque pendant cette période (la température en tous les points de la plaque atteint la température du liquide)

$$Q_\infty = 2\delta f\rho c\,(t_0 - t_l). \qquad \text{(III.89)}$$

où t_0 est la température de la plaque à l'instant initial

En un intervalle de temps arbitraire de 0 à τ_1 l'enthalpie change de

$$Q = 2\delta f\rho c\,(t_0 - t_{1\,\text{moy}}) =$$
$$= 2\delta f\rho c\,(t_0 - t_l)\,[1 - (t_{1\,\text{moy}} - t_l)/(t_0 - t_l)] = Q_\infty(1 - \Theta_{\text{moy}}), \tag{III.90}$$

où $\Theta_{\text{moy}} = (t_1^{\text{moy}} - t_l)/(t_0 - t_l)$ est la chute moyenne sans dimensions des températures à l'instant τ_1; $t_{1\,\text{moy}}$, la température moyenne suivant l'épaisseur de la plaque à l'instant τ_1.

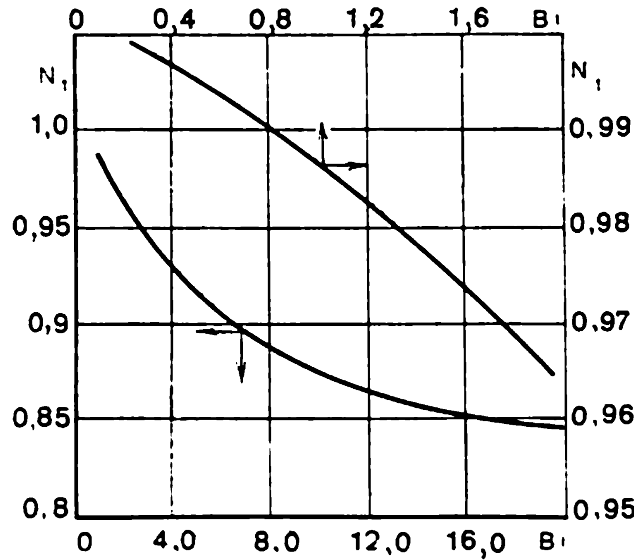


Fig. III.10. Détermination de la grandeur N_1

Conformément au théorème de la moyenne, la grandeur peut se calculer d'après l'expression

$$\Theta_{\text{moy}} = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \Theta\,dx. \tag{III.91}$$

En portant dans cette expression la valeur de Θ tirée de l'équation (III.79), on a, après l'intégration,

$$\Theta_{\text{moy}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2\sin^2(n_i)}{n_i^2 + n_i \sin n_i \cos n_i} \exp(-n_i^2\text{Fo}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} N_i \exp(-n_i^2\text{Fo}), \tag{III.92}$$

où les N_i sont les coefficients qui dépendent du nombre Bi.

Pour les nombres Fo $\geqslant$ 0,3 la série (III.92) devient rapidement convergente, et des problèmes pratiques se résolvent en se bornant au premier terme de la série

$$\Theta_{moy} = \frac{2 \sin^2 n_1}{n_1^2 + n_1 \sin n_1 \cos n_1} \exp(-n_1^2 \mathrm{Fo}) = N_1 e^{-n_1^2 \mathrm{Fo}}. \quad \text{(III.93)}$$

Les valeurs du coefficient N_1 sont représentées sur la figure III.10.

§ III.4. Influence des nombres de Biot et de Fourier sur le champ thermique de la plaque

Pour les grandes valeurs des nombres de Biot (Bi $\to \infty$) les nombres propres prennent les valeurs (cf. fig. III.6)

$$n_1 \to \pi/2;\ n_2 \to 3\pi/2;\ \ldots;\ n_i \to (2i-1)\,\pi/2;$$

de plus, $\sin n_i = \sin(2i-1)\,\pi/2 = (-1)^{i-1}$; $\cos n_i = \cos(2i-1)\,\pi/2 = 0$. L'équation (III.79) devient

$$\Theta\,|_{\mathrm{Bi}\to\infty} \to \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{(-1)^{i-1} \cos\left[(2i-1)\frac{\pi}{2}\bar{x}\right] \Big/ (2i-1)\right\} \times$$

$$\times \exp\left[-(2i-1)^2 \frac{\pi^2}{4} \mathrm{Fo}\right].$$

Cette expression entraîne que pour la surface de la plaque ($\bar{x} = 1$)

$$\Theta_{\bar{x}=1}\,|_{\mathrm{Bi}\to\infty} = 0. \quad \text{(III.94)}$$

La distribution de la température en d'autres points de la plaque dépend du rapport entre les résistances thermiques interne et externe.

Si $\delta/\lambda \gg 1/\alpha$, dès le début du processus la température de la surface devient égale à celle du fluide chauffant t_f, c'est-à-dire les conditions aux limites du IIIe genre se transforment en celles du Ier genre.

Avec $\delta/\lambda \ll 1/\alpha$ les valeurs du nombre de Biot sont petites (Bi $\to$ 0).

Dans ces conditions $n_1 \to 0$;

$$n_2 \to \pi;$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$n_i \to (i-1)\,\pi;$$

l'équation (III.77) implique donc

$$C_1 = \lim_{n_1 \to 0} \frac{2 \sin n_1}{n_1 + \sin n_1 \cos n_1} = 1;$$

$$C_2 = C_3 = \ldots = C_i = 0$$

et $\Theta\,|_{\mathrm{Bi}\to 0} \to 1$, c'est-à-dire à tout instant la température suivant l'épaisseur de la plaque est constante et a la même valeur.

Pour Bi > 0, mais Bi ≪ 1, tg $n_1 \approx n_1$ et l'équation transcendante $n_1/\mathrm{Bi} = 1/\mathrm{tg}\, n_1$ entraîne que $n_1 \approx \sqrt{\mathrm{Bi}}$. Donc, pour Bi ≪ 1

$$\Theta \cong \cos(\bar{x}\sqrt{\mathrm{Bi}}) \exp(-\mathrm{Bi\ Fo}) \qquad \text{(III.95)}$$

le champ thermique varie surtout dans le temps par suite de la petitesse de Bi.

Les figures III.11 et III.12 visualisent l'allure de la variation du champ thermique dans les différents cas de la variation de Bi.

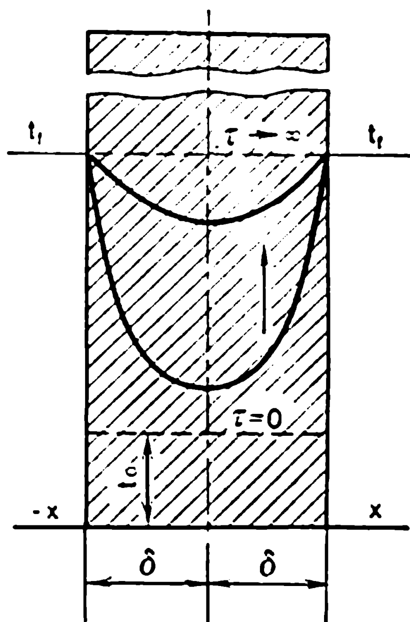


Fig. III.11. Variation du champ thermique dans une plaque indéfinie pour de grands nombres de Biot

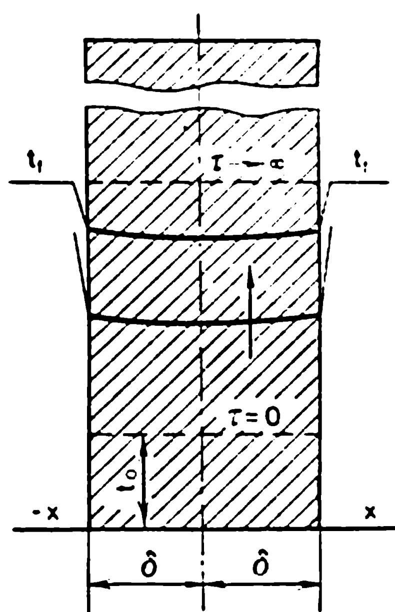


Fig. III.12. Variation du champ thermique dans une plaque indéfinie pour de petits nombres de Biot

Les calculs effectués montrent que la variation représentée sur la figure III.11 a lieu avec Bi ⩾ 100, et la condition Bi ≪ 1 est pratiquement observée avec Bi ⩽ 0,1 (fig. III.12).

Le nombre de Fourier Fo intervient dans le champ thermique de la façon suivante: dans l'équation (III.79) son augmentation améliore la convergence de la série. Comme nous l'avons déjà dit, avec Fo ⩾ 0,3 la série peut être remplacée par son premier terme (III.80)

$$\Theta = 2\,\frac{\sin n_1 \cos(n_1\bar{x})}{n_1 + \sin n_1 \cos n_1} \exp(-n_1^2 \mathrm{Fo}). \qquad \text{(III.96)}$$

Le domaine où la formule (III.79) dégénère en (III.80) s'appelle *régime thermique régulier*; dans ces conditions le champ de la chute de la température reste similaire à lui-même à tous les instants qui suivent; les processus de ce type sont dits *similaires dans le temps.*

§ III.5. Conductivité des corps formés par l'intersection des plaques

Les corps tels que les barres rectangulaires, les parallélépipèdes, peuvent être envisagés comme résultant de l'intersection de deux ou trois plaques réciproquement perpendiculaires, jouissant de mêmes conditions d'univalence que les surfaces respectives du corps considéré.

Examinons le champ thermique d'une barre rectangulaire en matériau homogène isotrope. La barre est constituée par l'intersection de deux plaques indéfinies. Lors de l'échauffement de la barre, le champ non stationnaire de la température excédentaire vérifie l'équation de Fourier

$$\partial\vartheta/\partial\tau = a\,(\partial^2\vartheta/\partial x^2 + \partial^2\vartheta/\partial y^2), \qquad \text{(III.97)}$$

où

$$\vartheta = t_1 - t.$$

Les conditions initiales et aux limites adoptées pour les plaques sont les mêmes pour

$$-\delta_x \leqslant x \leqslant +\delta_x;$$
$$-\delta_y \leqslant y \leqslant +\delta_y;$$

$$\vartheta = \vartheta_0 = t_1 - t_0 \quad \text{avec } \tau = 0;$$
$$\vartheta = 0 \quad \text{avec } \tau \to \infty; \qquad \text{(III.98)}$$
$$\lambda\partial\vartheta/\partial x + \alpha\vartheta = 0 \quad \text{avec } x = +\delta x;$$
$$\lambda\partial\vartheta/\partial y + \alpha\vartheta = 0 \quad \text{avec } y = +\delta y \qquad \text{(III.99)}$$
$$\partial\vartheta/\partial x = 0 \quad \text{avec } x = 0;\ -\delta_y \leqslant y \leqslant +\delta_y;$$
$$\partial\vartheta/\partial y = 0 \quad \text{avec } y = 0;\ -\delta_x \leqslant x \leqslant +\delta_x. \qquad \text{(III.100)}$$

Démontrons que la chute de la température sans dimensions dans la barre est égale au produit des chutes de la température sans dimension dans les plaques

$$\Theta = \Theta_x \cdot \Theta_y, \qquad \text{(III.101)}$$

où

$$\Theta_x = (t_1 - t)/(t_1 - t_0) = \psi_1\,(\mathrm{Fo}_x;\ \mathrm{Bi}_x;\ \bar{x}); \qquad \text{(III.102)}$$

$$\Theta_y = (t_1 - t)/(t_1 - t_0) = \psi_2\,(\mathrm{Fo}_y;\ \mathrm{Bi}_y;\ \bar{y}). \qquad \text{(III.103)}$$

Mettons l'expression (III.101) sous la forme

$$\vartheta = \vartheta_x\vartheta_y/\vartheta_0. \qquad \text{(III.104)}$$

En portant cette dernière équation dans (III.97), on obtient

$$\vartheta_x\vartheta_0\,(\partial\vartheta_y/\partial\tau - a\partial^2\vartheta_y/\partial y^2) + \\ + \vartheta_y\vartheta_0\,(\partial\vartheta_x/\partial\tau - a\partial^2\vartheta_x/\partial x^2) = 0. \qquad \text{(III.105)}$$

L'annulation de toute l'expression résulte de l'annulation des expressions entre parenthèses, puisque ϑ_x et ϑ_y sont les solutions des équations différentielles correspondantes pour les plaques

$\vartheta_x\vartheta_y/\vartheta_0 = 0$ avec $\tau \to \infty$, puisque $\vartheta_x \to 0$ et $\vartheta_y \to 0$ avec $\tau \to \infty$;

$$\text{avec } x = +\delta_x \quad \frac{\vartheta_y}{\vartheta_0}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta_x}{\partial x} + \alpha\vartheta_x\right) = 0; \qquad \text{(III.106)}$$

$$\text{avec } y = +\delta_y \quad \frac{\vartheta_x}{\vartheta_0}\left(\lambda\frac{\partial\vartheta_y}{\partial y} + \alpha\vartheta_y\right) = 0. \qquad \text{(III.107)}$$

D'autre part,

$$\frac{\vartheta_y}{\vartheta_0}\frac{\partial\vartheta_x}{\partial x} = 0 \text{ avec } x = 0; \qquad \text{(III.108)}$$

$$\frac{\vartheta_x}{\vartheta_0}\frac{\partial\vartheta_y}{\partial y} = 0 \text{ avec } y = 0, \qquad \text{(III.109)}$$

puisque les dérivées sont égales à zéro par suite de la symétrie du champ thermique dans chaque plaque prise isolément.

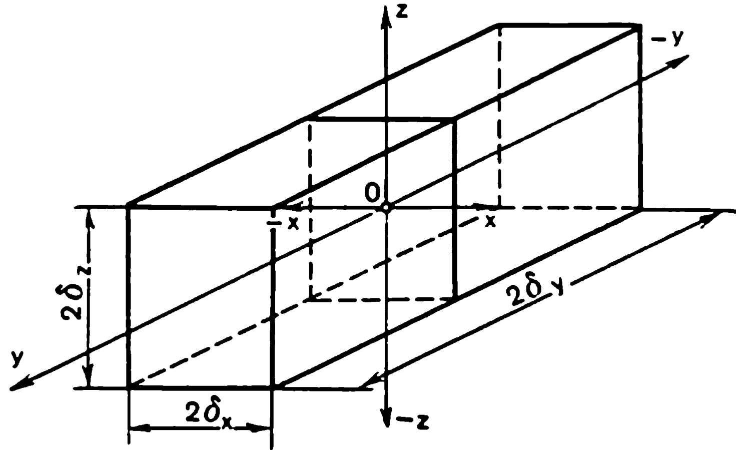


Fig. III.13. Schématisation du calcul du champ thermique d'un parallélépipède

De la sorte, l'expression (III.101) satisfait à l'équation différentielle, aux conditions initiales et aux limites et, par suite, elle est la solution du problème.

Un résultat analogue peut s'obtenir en examinant le champ thermique d'un parallélépipède (fig. III.13) pour lequel la chute de la température sans dimension s'écrit

$$\Theta = \Theta_x\Theta_y\Theta_z = \frac{t_1 - t(x, \tau)}{t_1 - t_0}\,\frac{t_1 - t(y, \tau)}{t_1 - t_0}\,\frac{t_1 - t(z, \tau)}{t_1 - t_0}. \qquad \text{(III.110)}$$

Les solutions indiquées sont vraies également pour la température moyenne du parallélépipède

$$\Theta_{moy} = \Theta_{x\,moy}\Theta_{y\,moy}\Theta_{z\,moy} = \frac{t_1 - t(x, \tau)_{moy}}{t_1 - t_0} \times$$
$$\times \frac{t_1 - t(y, \tau)_{moy}}{t_1 - t_0} \frac{t_1 - t(z, \tau)_{moy}}{t_1 - t_0}. \quad \text{(III.111)}$$

En déterminant la température des points caractéristiques (centre du parallélépipède, centres de ses faces) on peut utiliser les graphiques des figures III.7, III.8 pour chercher Θ_x, Θ_y, Θ_z.

Le procédé décrit de la résolution du problème des corps de dimensions finies peut être appliqué également à la détermination du champ thermique d'un cylindre de longueur finie qui est un corps obtenu par intersection d'un cylindre indéfini et d'une plaque.

§ III.6. Champ thermique d'une plaque à sources de chaleur internes

Considérons le problème qui se distingue du précédent par la répartition régulière dans la plaque des sources de chaleur à puissance constante q_V, W/m². Le champ thermique satisfait à l'équation différentielle

$$\partial t/\partial\tau = a\partial^2 t/\partial x^2 + q_V/(c\rho). \quad \text{(III.112)}$$

La plaque est placée dans un liquide de température t_1 et à l'instant initial possède cette même température. A l'instant initial aussi, dans la plaque commencent à agir des sources de chaleur. Les conditions initiales et aux limites sont de la forme

$$\text{avec } \tau = 0 \ t = t_1, \ -\delta \leqslant x \leqslant +\delta; \quad \text{(III.113)}$$

$$-\lambda\, \partial t/\partial x = \alpha\,(t - t_1) \text{ avec } x = +\delta; \quad \text{(III.114)}$$

$$\partial t/\partial x = 0 \text{ avec } x = 0 \text{ (par condition de symétrie)} \quad \text{(III.115)}$$

Pour résoudre le problème, il est commode de transformer ces équations en introduisant la température *excédentaire* $\vartheta = t_\infty - t$, qui est la différence entre la température du champ stationnaire (s'établissant après un long intervalle de temps) et la température non stationnaire.

La distribution stationnaire des températures est définie par la formule

$$t_\infty = \lim_{\tau\to\infty} t = t_1 + \frac{q_V\delta^2}{2\lambda}\left(1 + \frac{2}{\mathrm{Bi}} - \frac{x^2}{\delta^2}\right). \quad \text{(III.116)}$$

Un tel champ stationnaire vérifie l'équation différentielle et les conditions aux limites

$$\partial t_\infty/\partial\tau = a\partial^2 t_\infty/\partial x^2 + q_V/(c\rho); \qquad \text{(III.117)}$$

$$-\lambda\, \partial t_\infty/\partial x = \alpha\,(t_\infty - t_l) \text{ avec } x = +\delta; \qquad \text{(III.118)}$$

$$\partial t_\infty/\partial x = 0 \text{ avec } x = 0. \qquad \text{(III.119)}$$

Retranchons les équations (III.117), (III.118), (III.119) respectivement de (III.112), (III.114), (III.115) et l'équation (III.116) de (III.113) pour obtenir

$$\partial\vartheta/\partial\tau = a\partial^2\vartheta/\partial x^2; \qquad \text{(III.120)}$$

$$-\lambda\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = \alpha\vartheta \text{ avec } x = +\delta; \qquad \text{(III.121)}$$

$$\vartheta = \frac{q_V\delta^2}{2\lambda}\left(1+\frac{2}{\text{Bi}}-\frac{x^2}{\delta^2}\right) \text{ avec } \tau = 0; \qquad \text{(III.122)}$$

$$\partial\vartheta/\partial x = 0 \text{ avec } \tau \geqslant 0. \qquad \text{(III.123)}$$

Résolvons le système (III.120)-(III.123) par la méthode de séparation des variables pour obtenir l'équation de calcul générale

$$\Theta = \frac{t_\infty - t}{q_V\delta^2/(2\lambda)} = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos(n_i x)\exp(-n_i^2\text{Fo}), \qquad \text{(III.124)}$$

où les nombres propres n_i sont déterminés à partir de l'équation transcendante (III.71) déjà connue, alors que les coefficients

$$C_i = \frac{\int_0^1 (1+2/\text{Bi}-\bar{x}^2)\cos(n_i\bar{x})\,dx}{\int_0^1 \cos(n_i\bar{x})\,dx}. \qquad \text{(III.125)}$$

§ III.7. Champ thermique non stationnaire d'un cylindre infiniment long

Examinons le problème de la détermination du champ thermique dans un cylindre indéfini de rayon R_0 dont la température initiale est t_0. Le cylindre est placé dans un milieu à température constante $t_l > t_0$; le coefficient de transmission de chaleur α reste constant en tous les points de la surface extérieure du cylindre pendant toute la période d'échauffement; ceci fait que le champ thermique isotherme ne dépend que du rayon et du temps.

Dans le cas du problème envisagé, l'équation différentielle de la conductivité thermique s'écrit

$$\frac{\partial t}{\partial\tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}\right), \quad \tau>0; \quad 0\leqslant r\leqslant R_0, \qquad \text{(III.126)}$$

Les conditions d'univalence pour $\tau = 0$; $t = t_0$; $0 \leqslant r \leqslant R_0$

$$-\lambda \partial t/\partial r + \alpha (t_1 - t) = 0; \quad r = R_0, \tag{III.127}$$

$$\partial t/\partial r = 0 \quad \text{pour} \quad r = 0 \tag{III.128}$$

sont tirées de la condition de symétrie $t_{r=0} \neq \infty$, c'est-à-dire au centre du cylindre la valeur de la température est finie.

Après la substitution des variables (en posant $\vartheta = t_1 - t$) le système d'équations qui décrit le champ thermique d'un cylindre indéfini se ramène à la forme

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right); \quad \tau > 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant R_0; \tag{III. 129}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 = t_1 - t_0 \quad \text{pour} \quad \tau = 0; \tag{III.130}$$

$$\lambda \partial \vartheta / \partial r + \alpha \vartheta = 0 \quad \text{pour} \quad r = R_0; \tag{III.131}$$

$$\partial \vartheta / \partial r = 0; \ \vartheta \neq \infty \ \text{pour} \ r = 0. \tag{III.132}$$

La résolution recourt à la méthode de séparation des variables qui, comme dans le cas de la plaque indéfinie, conduit à la solution partielle de la forme

$$\vartheta = Ce^{-ak^2\tau} \psi (r), \tag{III.133}$$

où la fonction $\psi (r)$ dans le problème considéré doit être solution de l'équation de Bessel

$$\psi'' (r) + \frac{1}{r} \psi' (r) + k^2 \psi (r) = 0. \tag{III.134}$$

Puisque ψ dépend seulement du rayon r, représentons la solution générale de l'équation (III.134) comme la somme de deux solutions partielles

$$\psi = \varphi (r) + \mu (r). \tag{III.135}$$

Il en est ainsi du fait que la solution générale de toute équation différentielle homogène linéaire du deuxième ordre de la forme

$$y'' + p (x) y' + q (x) y = 0, \ldots, \tag{a}$$

à laquelle se rapporte également l'équation (III.134), peut s'écrire

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots \tag{b}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes; y_1 et y_2, des solutions linéairement indépendantes de l'équation (a), c'est-à-dire $y_1/y_2 \neq \text{const}$.

Dans ces conditions il suffit de connaître une seule solution linéairement indépendante, par exemple, y_1; la deuxième est donnée alors par la formule

$$y_2 = y_1 \int y_1^{-2} e^{-\int p d\xi} d\xi. \tag{c}$$

La première solution partielle $\varphi (r)$ se calcule à partir de l'équation de Bessel transformée (III.134)

$$r\varphi'' (r) + \varphi' (r) + k^2 r\varphi (r) = 0 \tag{III.136}$$

ou, en remplaçant $r = x/k$ et en retenant que dans ce cas $\varphi'' (r) = k^2 \varphi'' (x)$; $\varphi' (r) = k\varphi' (x)$, on obtient l'équation

$$x\varphi'' + \varphi' + x\varphi = 0. \tag{III.137}$$

La solution de cette équation est cherchée sous la forme de la série exponentielle

$$\varphi = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \qquad \text{(III.138)}$$

En dérivant (III.138) terme à terme, on a

$$\varphi' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots; \qquad \text{(III.139)}$$

$$\varphi'' = 2\cdot 1 a_2 + 3\cdot 2 a_3 x + 4\cdot 3 a_4 x^2 + \ldots \qquad \text{(III.140)}$$

En portant (III.138), (III.139), (III.140) dans (III.137) et en groupant les termes de même exposant de x, on obtient

$$a_1 + (a_0 + 2^2 a_2)\, x + (a_1 + 3^2 a_3)\, x^2 + (a_2 + 4^2 a_4)\, x^3 + \ldots \qquad \text{(III.141)}$$

L'expression (III.141) s'annule pour

$$a_1 = 0; \quad a_0 + 2^2 a_2 = 0; \quad a_1 + 3^2 a_3 = 0; \;\ldots; \quad a_{n-2} + a_n n^2 = 0.$$

Ces égalités amènent que tous les coefficients à indices impairs s'annulent, et les coefficients à indices pairs s'expriment à l'aide de a_0:

$$a_2 = -a_0/2^2;\, a_4 = a_0/2^2\cdot 4^2;\, a_6 = -a_0/2^2\cdot 4^2\cdot 6^2;\, \ldots;\, a_{2n} = (n-1)\, a_0/(2n)^2!$$

Par conséquent, la solution partielle $\varphi\,(x)$ est l'expression

$$\varphi = a_0\,(1 - x^2/2^2 + x^4/(2^2\cdot 4^2) - x^6/(2^2\cdot 4^2\cdot 6^2 + \ldots). \qquad \text{(III.142)}$$

Si on pose $a_0 = 1$, l'intégrale partielle de l'équation (III.137) est égale à la fonction

$$J_0\,(x) = 1 - x^2/2^2 + x^4/(2^2\cdot 4^2) - x^6/(2^2\cdot 4^2\cdot 6^2) + \ldots, \qquad \text{(III.143)}$$

appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre nul.

Pour trouver la deuxième solution partielle, utilisons la formule (c)

$$\mu = \varphi \int \varphi^2 e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\, dx.$$

En portant φ, procédons aux calculs pour obtenir finalement

$$\mu = J_0\,(x) \ln x + x^2/2^2 - [x^4/(2^2\cdot 4^2)]\,(1 + 1/2) + \\ + [x^6/(2^2\cdot 4^2\cdot 6^2)]\,(1 + 1/2 + 1/3) - \ldots \qquad \text{(III.144)}$$

Pour la commodité des calculs, au lieu de la fonction μ portons dans la solution générale (III.135) la fonction $Y_0\,(x)$ liée à μ par la relation

$$Y_0\,(x) = \frac{2}{\pi}\mu + \frac{2}{\pi} J_0\,(x)\,(C - \ln 2), \qquad \text{(III.145)}$$

où $C = 0{,}577$ est la constante d'Euler; $Y_0\,(x)$, la fonction de Bessel de II-ième espèce d'ordre nul.

Les solutions partielles de $J_0\,(x)$ et $Y_0\,(x)$ sont linéairement indépendantes, l'intégrale générale de l'équation (III.134) est

$$\psi\,(x) = C_1 J_0\,(x) + C_2 Y_0\,(x) \qquad \text{(III.146)}$$

ou, en reprenant la variable r $(x = kr)$,

$$\psi\,(r) = C_1 J_0\,(kr) + C_2 Y_0\,(kr). \qquad \text{(III.147)}$$

La température sur l'axe du cylindre ($r = 0$) devant être finie, la solution de (III.147) ne doit pas contenir la fonction Y_0 qui tend vers l'infini avec $r \to 0$; par conséquent, $C_2 = 0$, et la solution de (III.147) devient

$$\theta = Ce^{-ak^2\tau}J_0(kr). \qquad \text{(III.148)}$$

Les constantes k et C se déterminent à partir des conditions aux limites et initiales.

Indiquons au préalable que

$$J_0'(kr) = dJ_0(kr)/dr = -k\,[kr/2 - (kr)^3/(2^2\cdot 4) + (kr)^5/(2^2\cdot 4^2\cdot 6) - \ldots] = -kJ_1(kr). \qquad \text{(III.149)}$$

Ici $J_1(kr)$ est la fonction de Bessel de I-ière espèce du premier ordre. Faisons satisfaire la solution de (III.148) à la condition aux limites

$$-\lambda k C_1 J_1(kR_0)\,e^{-k^2a\tau} = = \alpha C J_0(kR_0)\,e^{-k^2a\tau}.$$

Réduisons par $Ce^{-k^2a\tau}$ pour obtenir

$$J_0(kR_0)/[J_1(kR_0)] = = k\lambda R_0/(\alpha R_0) = kR_0/\mathrm{Bi}. \qquad \text{(III.150)}$$

(III.150) est une équation transcendante résolue par la méthode graphique. Introduisons les notations

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= kR_0/\mathrm{Bi} = n/\mathrm{Bi}; \\ y_2 &= J_0(n)/J_1(n), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.151)}$$

où $kR_0 = n$.

Le graphique de la fonction $y_2 = = J_0(n)/J_1(n)$ rappelle une cotangentoïde mais à période décroissante, le graphique de la fonction y_1 est une ligne droite qui passe par l'origine des coordonnées. La figure III.14 indique la méthode graphique de la détermination des racines de l'équation (III.150).

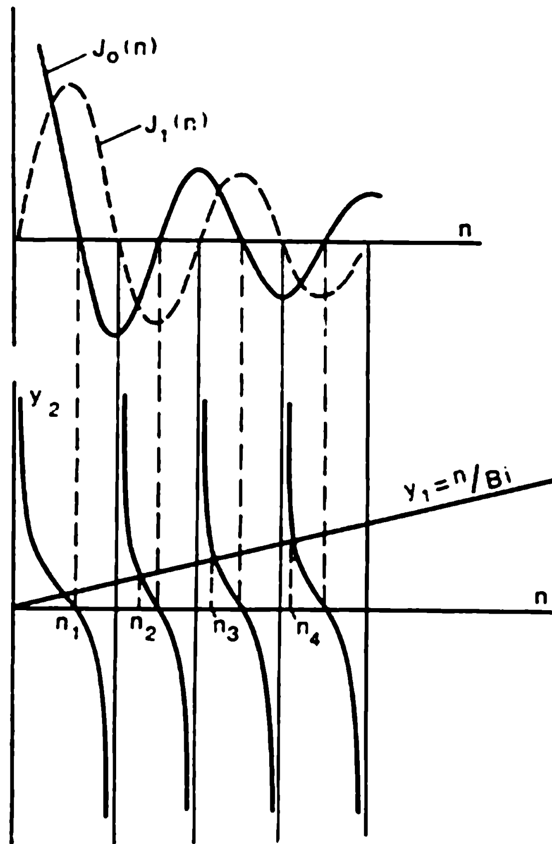


Fig. III.14. Solution de l'équation (III.151)

Comme le montre cette figure, il existe un ensemble infini de racines n_i définies par l'intersection des courbes des fonctions y_1 et y_2.

La solution générale est la somme de toutes les solutions partielles

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0(n_i r/R_0)\,e^{-n_i^2 a\tau/R_0^2}. \qquad \text{(III.152)}$$

Les constantes C_i se déterminent à partir de la condition initiale

$$\vartheta_0 = \sum_{i=1}^{\infty} C_i J_0(n_i r/R_0). \qquad \text{(III.153)}$$

Cette relation représente le développement de la fonction ϑ_0 en série par rapport aux fonctions de Bessel.

Le cours des mathématiques enseigne que le système de fonctions $\sqrt{r}J_0(ar)$, $\sqrt{r}J_0(br)$ est un système orthogonal.

Donc,

$$\int_0^{R_0} rJ_0(n_i r/R_0)\,J_0(n_j r/R_0)\,dr = \begin{cases} 0 & \text{pour } j \neq i; \\ \neq 0 & \text{pour } j = i; \end{cases} \qquad \text{(III.154)}$$

$$\int_0^{R_0} rJ_0^2(n_i r/R_0)\,dr = \frac{R_0^2}{2}\left[J_0^2(n_i) + J_1^2(n_i)\right]; \qquad \text{(III.155)}$$

$$C_i = \frac{\int_0^{R_0} r\vartheta_0 J_0(n_i r/R_0)\,dr}{\int_0^{R_0} rJ_0^2(n_i r/R_0)\,dr} = \frac{\vartheta_0 R_0^2}{n_i} J_1(n_i)\times$$

$$\times\frac{2}{R_0^2\left[J_0^2(n_i)+J_1^2(n_i)\right]} = \vartheta_0 \frac{2J_1(n_i)}{n_i\left[J_0^2(n_i)+J_1^2(n_i)\right]}. \qquad \text{(III.156)}$$

En introduisant la notation $\Theta = \vartheta/\vartheta_0 = (t_1 - t)/(t_1 - t_0)$, on a

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2J_1(n_i)}{n_i\left[J_0^2(n_i)+J_1^2(n_i)\right]} J_0\left(n_i \frac{r}{R_0}\right) \exp(-n_i^2 \mathrm{Fo}). \qquad \text{(III.157)}$$

Dans ce cas, si $\mathrm{Fo} \geqslant 0{,}25$, la convergence de la série (III.157) est très rapide, et pour les calculs pratiques on peut se borner au premier terme de la série. Alors, aux chutes de la température sans dimension à la surface et sur l'axe du cylindre correspondent les formules

$$\Theta_{r=R_0} = \frac{2J_1(n_1)\,J_0(n_1)}{n_1\left[J_0^2(n_1)+J_1^2(n_1)\right]} \exp(-n_1^2\mathrm{Fo}) = N_0[\mathrm{Bi}]\,e^{-n_1^2\mathrm{Fo}}; \qquad \text{(III.158)}$$

$$\Theta_{r=0} = \frac{2J_1(n_1)\,e^{-n_1^2\mathrm{Fo}}}{n_1\left[J_0^2(n_1)+J_1^2(n_1)\right]} = M_0 e^{-n_1^2\mathrm{Fo}}. \qquad \text{(III.159)}$$

Etant donné que dans les formules (III.158), (III.159) Θ n'est fonction que de deux variables: Bi et Fo, pour calculer Θ on utilise les graphiques des figures III.15 et III.16, identiques à ceux de la détermination de Θ dans une plaque.

La chaleur absorbée par le corps en un temps $\tau = 0 \div \infty$ doit être égale à la modification de son enthalpie pendant ce temps

$$Q = \pi R_0^2 l\rho C\,(t_1 - t_0). \qquad \text{(III.160)}$$

Pour l'intervalle de temps limité par τ_1, tout comme pour la plaque,

$$Q_1 = Q\,(1 - \Theta_{\text{moy}}), \qquad \text{(III.161)}$$

où $\Theta_{\text{moy}} = (t_1 - \bar{t})/(t_1 - t_0)$; $\bar{t}$, la température moyenne du cylindre:

$$\Theta_{\text{moy}} = \frac{1}{\pi R_0^2}\int_0^{R_0} \Theta 2\pi r\,dr = 2\int_0^1 \Theta\bar{r}\,d\bar{r}, \qquad \text{(III.162)}$$

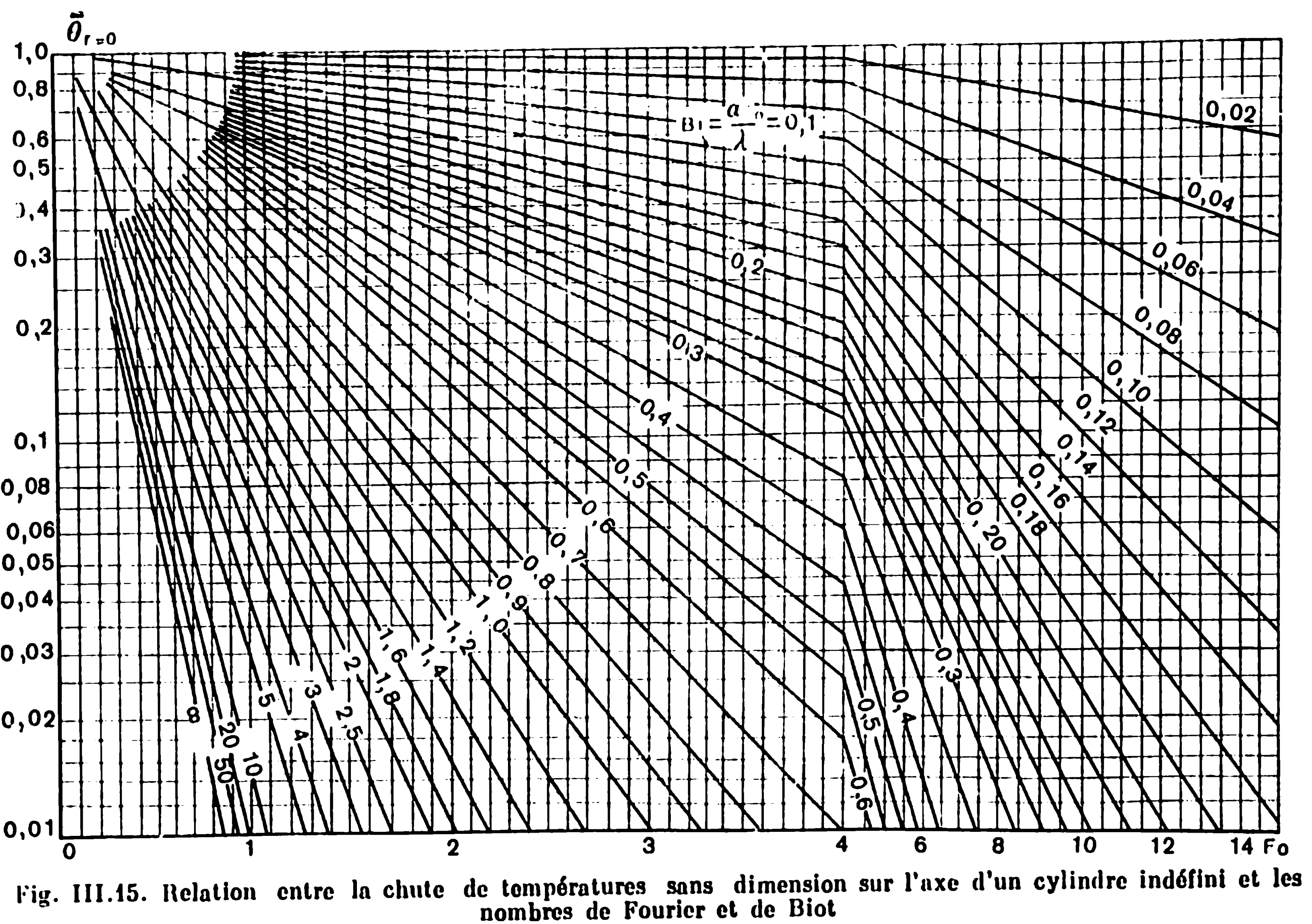


Fig. III.45. Relation entre la chute de températures sans dimension sur l'axe d'un cylindre indéfini et les nombres de Fourier et de Biot

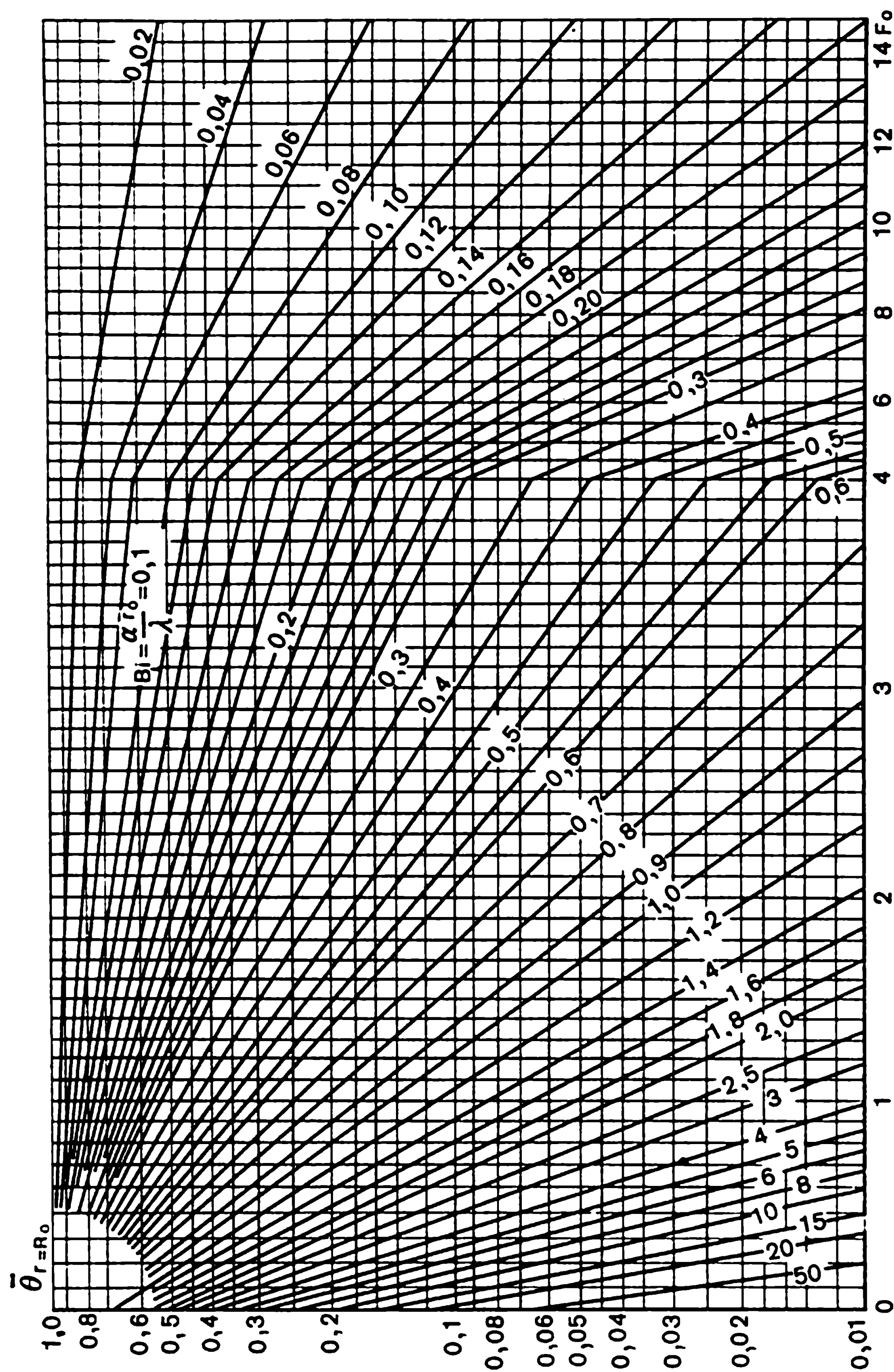


Fig. III.16. Relation entre la chute de températures sans dimension à la surface d'un cylindre indéfini et les nombres de Fourier et de Biot

où $\bar{r} = r/R_0$.

En portant la valeur de Θ tirée de (III.157) dans (III.162) et en intégrant l'expression, on obtient

$$\Theta_{moy} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4J_1^2(n_i)}{n_i^2 [J_0^2(n_i) + J_1^2(n_i)]} \exp(-n_i^2 \mathrm{Fo}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4\mathrm{Bi}^2}{n_i^2 (n_i^2 + \mathrm{Bi}^2)} \exp(-n_i^2 \mathrm{Fo}), \quad \text{(III.163)}$$

puisque $J_0(n_i)/J_1(n_i) = n_i/\mathrm{Bi}$. Dans le cas où $\mathrm{Fo} \gg 0{,}25$,

$$\Theta_{moy} = \frac{4\mathrm{Bi}^2}{n_1^2 (n_1^2 + \mathrm{Bi}^2)} \exp(-n_1^2 \mathrm{Fo}). \quad \text{(III.164)}$$

Comme nous l'avons déjà dit, le champ thermique d'un cylindre de longueur finie est déterminé par la multiplication des solutions obtenues pour le cylindre indéfini et la plaque indéfinie.

§ III.8. Champ thermique non stationnaire d'une sphère

Considérons une sphère à conditions aux limites du IIIe genre ; on donne le coefficient de transmission de chaleur α constant pour toute la surface de la sphère de rayon R_0.

A l'instant initial $\tau = 0$ la température de la sphère est la même en tous points et égale à t_0. La température ambiante $t_l > t_0$. La température excédentaire $\vartheta = t_l - t$.

L'écriture mathématique du problème est donnée par les équations

$$\partial\vartheta/\partial\tau = a\,[\partial^2\vartheta/\partial r^2 + (2/r)\,\partial\vartheta/\partial r]; \quad \text{(III.165)}$$

$$\partial\vartheta/\partial r = -(\alpha/\lambda)\,\vartheta \quad \text{pour} \quad r = R_0. \quad \text{(III.166)}$$

Il s'ensuit des conditions de symétrie

$$\partial\vartheta/\partial r = 0 \quad \text{pour } r = 0; \quad \text{(III.167)}$$

$$\vartheta_0 = t_l - t_0 \quad \text{pour } \tau = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant R_0. \quad \text{(III.168)}$$

Comme dans les cas précédents de la plaque et du cylindre, le problème peut être résolu par séparation des variables. Sans donner tous les calculs, bornons-nous à écrire le résultat définitif

$$\Theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2(\sin n_i - n_i \cos n_i)}{n_i - \sin n_i \cos n_i} \, \frac{\sin(n_i r/R_0)}{n_i r/R_0} \, e^{-n_i^2 \mathrm{Fo}}, \quad \text{(III.169)}$$

où n_i est la racine de l'équation caractéristique

$$\mathrm{tg}\, n = -n/(\mathrm{Bi} - 1). \quad \text{(III.170)}$$

Pour $\mathrm{Bi} \to \infty$, $n_i = i\pi$ et

$$C_i = \frac{2(\sin n_i - n_i \cos n_i)}{n_i - \sin n_i \cos n_i} = 2(-1)^{i+1}.$$

Il en résulte que l'équation (III.169) se met sous la forme

$$\Theta = \sum_{i=1}^{\infty} 2(-1)^{i+1} \frac{1}{i\pi r/R_0} \cdot \sin\left(i\pi \frac{r}{R_0}\right) \exp\left[-(i\pi)^2 \mathrm{Fo}\right]. \qquad \text{(III.171)}$$

Pour de petites valeurs de Bi (Bi < 0,1), les valeurs de C_i tendent vers zéro, sauf $C_1 = 1$ et $n_1^2 = 3$ Bi; alors la valeur de Θ est

$$\Theta = \frac{\sin\left(\sqrt{3\mathrm{Bi}}\, r/R_0\right)}{\sqrt{3\mathrm{Bi}}\, r/R_0} \exp\left(-3\mathrm{Bi}\,\mathrm{Fo}\right). \qquad \text{(III.172)}$$

Pour les Fo ≫ 0,25, l'expression de Θ de l'équation (III.169) peut être donnée par le premier terme de la série

$$\Theta = \frac{2(\sin n_1 - n_1 \cos n_1)\sin(n_1 r/R_0)}{(n_1 - \sin n_1 \cos n_1)\, n_1 r/R_0} \exp\left(-n_1^2 \mathrm{Fo}\right). \qquad \text{(III.173)}$$

Pour calculer la valeur de Θ au centre de la sphère (fig. III.17) ou à sa surface (fig. III.18) on peut faire appel aux graphiques dans lesquels le nombre Bi est un paramètre, et le nombre Fo, l'argument.

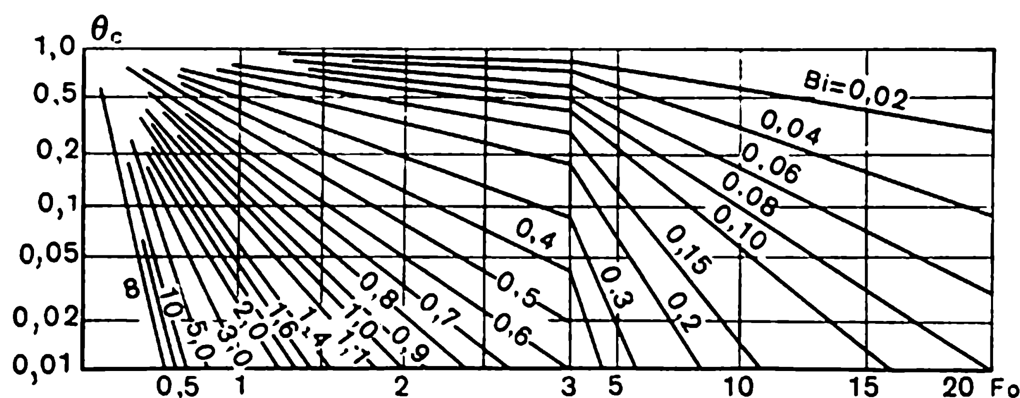


Fig. III.17. Relation entre la chute de températures sans dimension au centre d'une sphère et les nombres de Fourier et de Biot

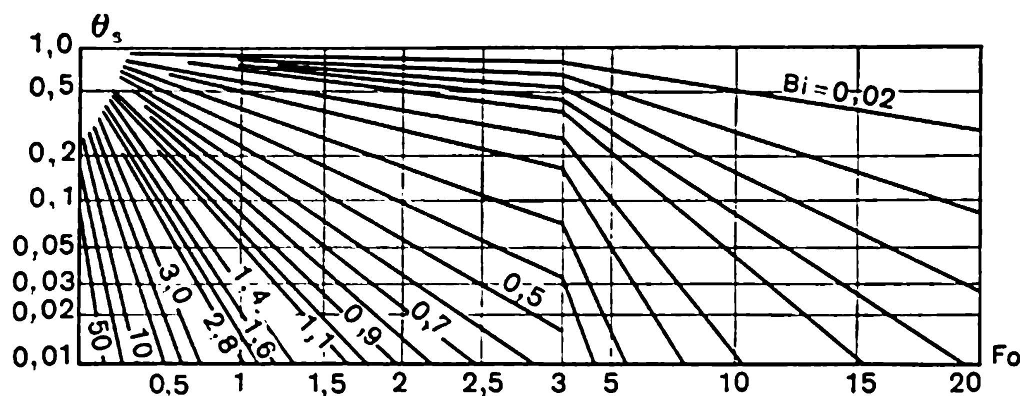


Fig. III.18. Relation entre la chute de températures à la surface d'une sphère et les nombres de Fourier et de Biot

Par analogie avec la plaque et le cylindre, la quantité de chaleur absorbée par la sphère en un temps $\tau = 0 \div \tau_1$ est déterminée par l'équation

$$\frac{Q}{Q_\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{6}{n_i^3} \frac{(\sin n_i - n_i \cos n_i)^2}{n_i - \sin n_i \cos n_i} \left[1 - e^{-n_i^2 \mathrm{Fo}} \right]. \qquad \text{(III.174)}$$

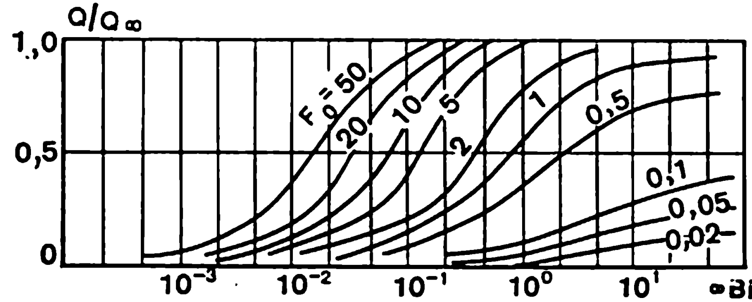


Fig. III.19. Diagramme de la détermination de la quantité de chaleur absorbée par une sphère

(III.174) entraîne que $Q/Q_\infty = f$ (Bi ; Fo) ; Q/Q_∞ est déterminé d'après le graphique de la figure III.19. Ici

$$Q_\infty = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho C (t_1 - t_0) \qquad \text{(III.175)}$$

est l'accroissement total de l'enthalpie de la sphère lors de l'échauffement jusqu'à t_1.

§ III.9. Régime régulier des processus de conduction thermique

On appelle *régime thermique régulier* le processus non stationnaire de conduction thermique tel que le champ de la température excédentaire ϑ est similaire dans le temps, c'est-à-dire reste similaire avec la variation du temps. En analysant les solutions obtenues pour des corps de forme différente (plaque, cylindre, sphère), on aboutit à la conclusion que la température excédentaire peut être représentée par la série

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{\infty} A_i F_i e^{-n_i^2 \mathrm{Fo}}, \qquad \text{(III.176)}$$

où A_i sont les coefficients constants qui dépendent des conditions initiales données (du nombre Bi) et ne dépendent ni des coordonnées, ni du temps ; F_i, la fonction qui dépend des coordonnées et de Bi. L'allure de la forme géométrique intervient sous la forme des facteurs A_i, F_i.

Pour le premier terme de la série, la valeur du facteur affecté à τ (figurant dans Fo) s'appelle *rythme du régime régulier*

$$m = n_1^2 a/\delta^2. \qquad \text{(III.177)}$$

Pour de petites valeurs de τ le champ de la température excédentaire est déterminé d'après la formule (III.176), c'est-à-dire la distribution de la température excédentaire est influencée non seulement par le premier terme, mais aussi par le terme successif de la série. Dans cette période le champ de la température excédentaire est sensiblement influencé par la répartition initiale des températures dans le corps. Cette période s'appelle *processus non stationnaire désordonné.*

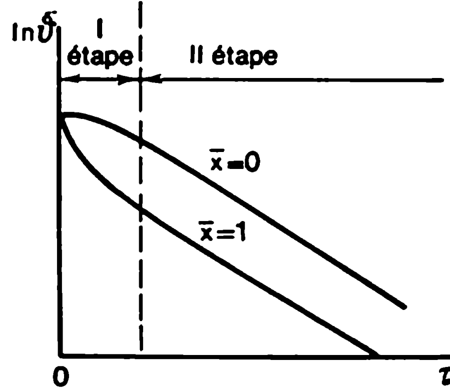


Fig. III.20. Relation entre le logarithme de la température excédentaire et le temps

Les valeurs propres de n_i croissent avec l'augmentation de l'indce i, chaque terme consécutif de la série (III.176) est plus petit que le précédent. Cette décroissance est d'autant plus rapide que τ est plus grand.

A partir d'une certaine valeur de τ (Fo $>$ 0,3) le champ de la température excédentaire est décrit avec une précision suffisante par le premier terme de la série (III.176); depuis ce moment, les conditions initiales jouent un rôle secondaire:

$$\vartheta = A_1 F_1 e^{-m\tau} = \varphi(x)\, e^{-m\tau}. \qquad \text{(III.178)}$$

C'est justement cette période qui porte le nom de régime régulier.

Le calcul du logarithme de l'équation (III.178) amène que

$$\ln \vartheta = -m\tau + \text{const}, \qquad \text{(III.179)}$$

c'est-à-dire que le logarithme népérien de la température excédentaire varie dans le temps suivant une loi linéaire. La figure III.20 visualise cette relation pour deux points du corps ($\bar{x} = 0$; $\bar{x} = 1$) lors de son refroidissement.

En dérivant l'équation (III.179) par rapport au temps, on obtient

$$\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = -m = \text{const}. \qquad \text{(III.180)}$$

On tire de cette expression que le rythme de refroidissement est la vitesse relative de variation de la température dans le corps.

Le rythme de refroidissement peut être déterminé d'après le graphique (fig. III.20), après avoir trouvé au préalable pour les instants τ_1 et τ_2 les valeurs de $\ln \vartheta_1$ et $\ln \vartheta_2$ qui leur correspondent:

$$m = -\text{tg}\,\omega = (\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2)/(\tau_2 - \tau_1).$$

Voici l'ordre dans lequel se fait ordinairement la mesure du rythme du régime régulier. Le corps en matériau testé est placé dans un thermostat où on maintient le liquide à la température constante (fig. III.21). Le liquide est entraîné en mouvement par une hélice et contourne intensément la surface du corps.

Deux thermocouples branchés en « opposé-parallèle » prennent la mesure de la température excédentaire $\vartheta = t - t_1$ en tout point

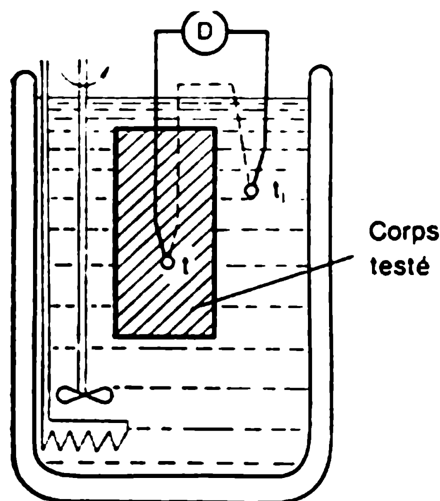


Fig. III.21. Schéma de l'installation expérimentale pour la mesure du coefficient de conductivité thermique par la méthode du régime régulier

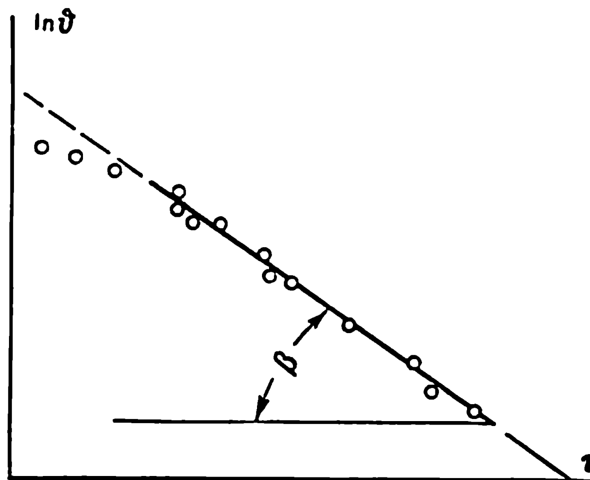


Fig. III.22. Détermination du rythme du régime régulier

du corps à des instants différents. D'après les résultats des mesures on construit la courbe en coordonnées semi-logarithmiques $\ln \vartheta$, τ suivant la figure III.22. La valeur du rythme m se calcule en cherchant le coefficient angulaire de la ligne droite que forment les points expérimentaux après l'établissement du régime régulier. Pourtant, il convient de noter que cette méthode de détermination de la grandeur m convient pour des matériaux à basse conductivité thermique [$\lambda \leqslant 0{,}5$ W/(m·K)]. En effet, pour réaliser l'expérience, il faut assurer $Bi \geqslant 100$; donc, $\lambda \leqslant \alpha\delta/100$ W/(m·K). La valeur du coefficient de transmission thermique α dans les thermostats ne dépasse pas ordinairement 2000, et les dimensions du corps ne dépassent pas $2\delta = 0{,}05$ m. Par conséquent, $\lambda = \alpha\delta/Bi = 2000 \cdot 0{,}05 : (2 \cdot 100) = 0{,}5$ W/(m·K). Cette circonstance délimite l'utilisation du régime régulier pour la mesure de la diffusivité thermique dans les conditions du laboratoire. Le coefficient de transmission de chaleur à la surface du corps baigné par le liquide peut être également établi en profitant du régime régulier de l'échauffement du corps.

Considérons un corps de volume V et de surface F refroidi dans le courant d'un liquide de façon que le nombre de Biot soit petit (Bi $\leqslant$ 1). La distribution de la température dans un corps à petit nombre de Biot est proche d'une distribution uniforme, c'est-à-dire en tout point du corps $t(x, y, z)$ à l'instant donné τ la température ne se distingue que de peu de la température volumique moyenne $\bar{t}(\tau)$ à ce même instant

$$\bar{t}(\tau) = \frac{1}{V}\int_0^V t(x, y, z)\, dV. \qquad \text{(III.181)}$$

La distribution de la température dans le corps est définie par l'équation de Fourier

$$\partial t/\partial\tau = a \text{ div (grad } T) \qquad \text{(III.182)}$$

et par la condition aux limites

$$-\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{n=0} = \alpha\,(t_{n=0} - t_1). \qquad \text{(III.183)}$$

En intégrant l'équation (III.182) suivant le volume V, on a

$$\int_V \frac{\partial t}{\partial\tau}\, dV = a \int_V \text{div (grad } t)\, dV. \qquad \text{(III.184)}$$

Compte tenu de (III.181), le premier membre de cette expression se transforme pour devenir

$$\int_V \frac{\partial t}{\partial\tau}\, dV = V\frac{\partial\bar{t}}{d\tau}. \qquad \text{(III.185)}$$

Quant à son deuxième membre, en vertu du théorème d'Ostrogradski-Gauss et de la condition (III.183), on le ramène à la forme

$$a \int_V \text{div (grad } t)\, dV = \frac{\lambda}{C\rho}\oint_F \left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{n=0} dF =$$

$$= -\frac{1}{C\rho}\oint_F \alpha\,(t_{n=0} - t_1)\, dF = \frac{-1}{C\rho}\,\bar{\alpha}F\,(\bar{t} - t_1), \qquad \text{(III.186)}$$

où $\bar{\alpha}$ est le coefficient de transmission de chaleur moyen suivant la surface.

De la sorte, (III.185) et (III.186) impliquent que

$$V\frac{d\bar{t}}{d\tau} = -\frac{\bar{\alpha}}{C\rho}F\,(\bar{t} - t_1) \qquad \text{(III.187)}$$

ou

$$d\bar{t}/d\tau = -m\vartheta_{\text{moy}}, \qquad \text{(III.188)}$$

où

$$\vartheta_{moy} \equiv t_{moy} - t_1, \quad m = \bar{\alpha}F/(C\rho V).$$

L'intégrale générale de l'équation (III.188) est de la forme

$$\vartheta_{moy} = Ce^{-m\tau}.$$

Par conséquent, dans le cas considéré également (pour les températures moyennes et les coefficients de transmission de chaleur moyens) on est en présence du régime régulier exponentiel. La grandeur m est le rythme de variation dans le temps de la température volumique moyenne.

De cette façon, pour déterminer le coefficient de transmission de chaleur $\bar{\alpha}$ moyen à la surface du corps pour un petit nombre de Biot (Bi $\leqslant$ 1) il faut recourir à l'expression

$$\bar{\alpha} = mC\rho V/F, \tag{III.189}$$

où le rythme m est mesuré par le procédé décrit dans ce qui précède.

Cette méthode d'obtention de la moyenne du coefficient de transmission de chaleur à la surface d'un corps est applicable seulement lorsque la différence de température est petite et les paramètres thermophysiques du liquide et du corps peuvent être envisagés comme des grandeurs constantes.

L'application du régime régulier pour la détermination en laboratoire du coefficient de transmission de chaleur d'un corps soumis à un contournement extérieur est délimitée par la faible valeur du coefficient. En effet, si on adopte comme paramètres initiaux

$$\delta \leqslant 0{,}025 \text{ m}; \ \lambda \leqslant 330 \text{ W/(m·K)}; \ \text{Bi} \leqslant 0{,}1,$$

il vient

$$\bar{\alpha} \leqslant 0{,}1 \cdot 330/0{,}025 \text{ W/(m}^2\text{·K)} \approx 1300 \text{ W/(m}^2\text{·K)}.$$

§ III.10. Processus thermiques périodiques

Il existe plusieurs appareils dans la technique où la répétition du cycle opératoire s'accompagne du processus d'échange de chaleur périodique, c'est-à-dire de variation périodique du champ thermique appelée *ondes thermiques*.

Les exemples de tels processus peuvent être fournis par les variations de température dans les éléments de construction des moteurs à combustion interne, les régénérateurs, les éléments des édifices qui subissent l'action périodique de la radiation solaire, etc.

Dans ce cas la loi de variation du champ thermique ne dépend pas de l'état initial du système, mais d'une certaine fonction périodique du temps.

La résolution de l'équation différentielle de la conductivité thermique peut être réalisée par la méthode de séparation des variables sous la condition que la fonction qui dépend du temps $\varphi(\tau)$ soit périodique. A cette condition satisfait la fonction exponentielle de l'argument imaginaire $\varphi(\tau) = e^{ik\,\mathrm{Fo}}$ $(i = \sqrt{-1})$ qui vérifie également l'équation différentielle de la conductivité thermique.

A titre d'exemple de résolution du problème à champ thermique variant périodiquement, examinons un corps solide demi-limité, dont la température de la surface change périodiquement dans le temps. Le problème se ramène à résoudre l'équation

$$\partial t/\partial\tau = a\partial^2 t/\partial x^2 \qquad \text{(III.190)}$$

sous les conditions aux limites

$$t_{\text{moy}} = f(\tau) \text{ pour } x = 0; \qquad t \neq \infty \text{ pour } x \to \infty. \qquad \text{(III.191)}$$

Si la solution est cherchée sous la forme

$$t = \varphi(\tau)\,\psi(x), \qquad \text{(III.192)}$$

on aboutit finalement à deux équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(\tau) - (\pm ik)\,a\varphi(\tau) &= 0; \\ \psi''(x) - (\pm ik)\,\psi(x) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.193)}$$

dont la résolution donne

$$t = Ce^{\pm ka\tau}e^{\pm\sqrt{k}\sqrt{\pm i}\,x}. \qquad \text{(III.194)}$$

Cette expression possède quatre solutions partielles qui (compte tenu du fait que $\sqrt{-i} = \pm(1+i)\sqrt{1/2}$) sont de la forme

$$\begin{aligned} t_1 &= C_1 \exp[-\sqrt{k/2}\,x + i(ka\tau - \sqrt{k/2}\,x)]; \\ t_2 &= C_2 \exp[-\sqrt{k/2}\,x - i(ka\tau - \sqrt{k/2}\,x)]; \\ t_3 &= C_3 \exp[\sqrt{k/2}\,x + i(ka\tau - \sqrt{k/2}\,x)]; \\ t_4 &= C_4 \exp[\sqrt{k/2}\,x - i(ka\tau - \sqrt{k/2}\,x)]. \end{aligned} \qquad \text{(III.195)}$$

Les deux dernières de ces solutions partielles ne satisfont pas aux conditions physiques du problème, du fait que la température ne doit pas croître infiniment avec la croissance de x. De la sorte, les solutions t_3 et t_4 doivent être rejetées, alors que les solutions restantes t_1 et t_2 donnent dans la somme la solution partielle de la forme

$$t = e^{-\sqrt{k/2}\,x}\,[C_1e^{+i(ak\tau - \sqrt{k/2}\,x)} + C_2e^{-i(ka\tau - \sqrt{k/2}\,x)}], \qquad \text{(III.196)}$$

ou, en passant aux fonctions trigonométriques,

$$t = e^{-\sqrt{k/2}\,x}\,[A\cos(ka\tau - \sqrt{k/2}\,x) + B\sin(ka\tau - \sqrt{k/2}\,x)], \qquad \text{(III.197)}$$

les constantes A, B, k étant déterminées à partir des conditions aux limites. La fonction $t_{moy} = f(\tau)$ étant périodique, on peut l'exprimer par la série de Fourier

$$t_{moy} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n\tau}{\tau_0} + b_n \sin \frac{2\pi n\tau}{\tau_0} \right). \qquad \text{(III.198)}$$

Avec $x = 0$ l'équation (III.197) se met sous la forme

$$t_{x=0} = A \cos (ka\tau) + B \sin (ka\tau). \qquad \text{(III.199)}$$

Il s'ensuit de la comparaison des expressions (III.198) et (III.199) que

$$A = a_n ; \; B = b_n ; \; k = 2\pi n/(\alpha\tau_0). \qquad \text{(III.200)}$$

Le terme constant $a_0/2$ de l'équation (III.198), qui est la valeur moyenne de la température oscillante avec $x = 0$, ne figure pas dans la solution de (III.197), puisqu'il traduit l'irrégularité initiale à l'instant $\tau = 0$.

Ainsi, pour une valeur suffisamment grande de τ la solution de (III.197) est de la forme

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{n\pi}{a\tau_0}}x} \left[a_n \cos \left(\frac{2\pi n}{\tau_0} \tau - \sqrt{\frac{\pi n}{a\tau_0}} x \right) + \right.$$

$$\left. + b_n \sin \left(\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} - \sqrt{\frac{n\pi}{a\tau_0}} x \right) \right]. \qquad \text{(III.201)}$$

Pour un cas plus simple, lorsqu'on envisage les oscillations à la surface autour de la température moyenne

$$t_{moy} = t_{max} \cdot \cos (2\pi n\tau/\tau_0), \qquad \text{(III.202)}$$

la solution de (III.201) se ramène à l'expression

$$t = t_{max} e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{a\tau_0}}x} \cos \left(\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} - \sqrt{\frac{\pi n}{a\tau_0}} x \right), \qquad \text{(III.203)}$$

où t_{max} est la variation absolue maximale de la température de la surface (amplitude maximale).

La valeur maximale de la température a lieu pour $\cos 2m\pi = +1$, c'est-à-dire pour $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$, ou

$$\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} - \sqrt{\frac{n\tau}{a\tau_0}} x = 2m\pi. \qquad \text{(III.204)}$$

L'instant pour lequel la température atteint la valeur maximale

$$\tau_{max} = m \frac{\tau_0}{n} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_0}{an\pi}} x, \qquad \text{(III.205)}$$

d'où il s'ensuit que pour toute distance x, y compris à la surface, les oscillations de la température ont la même période τ_0/n; pourtant, à la distance x de la surface les oscillations sont en retard de phase de $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_0}{an\pi}}\,x$ et, d'autre part, l'amplitude des oscillations diminue par suite de la présence du facteur $\exp\left(-\sqrt{\frac{n\pi}{a\tau_0}}\,x\right)$.

La longueur de l'onde thermique se calcule en égalant la période d'oscillation de la température au retard des oscillations en phase

$$x_0 = 2\sqrt{\pi a\tau_0/n}. \qquad \text{(III.206)}$$

Le flux thermique passant par la surface du corps se calcule d'après la formule

$$Q = -\lambda F \int \frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=0} d\tau, \qquad \text{(III.207)}$$

en déterminant au préalable la valeur du gradient thermique à la surface du corps

$$\frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \sqrt{\frac{\pi n}{a\tau_0}}\left(\sin\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} - \cos\frac{2\pi n\tau}{\tau_0}\right) =$$

$$= -\sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi n}{a\tau_0}}\sin\left(\frac{2\pi n\tau}{\tau_0} - \frac{\pi}{4}\right). \qquad \text{(III.208)}$$

L'intégration de ce gradient pour la période totale donne la valeur nulle du flux thermique, alors que pour la demi-période on a

$$Q_{\tau=\tau_0/2} = t_{\max} F \sqrt{\frac{2}{\pi}\lambda c\rho\tau_0}. \qquad \text{(III.209)}$$

§ III.11. Méthodes numériques de résolution des problèmes de conductivité thermique

Comme nous l'avons montré, dans les cas les plus simples, la solution d'une équation de la conductivité thermique peut s'obtenir par des méthodes analytiques exactes. Pourtant, pour de nombreux problèmes relatifs à la conductivité thermique que pose la technique actuelle, ces méthodes s'avèrent inapplicables. Par exemple, si un mur plan indéfini est baigné des deux côtés par un flux de gaz chauffé à température et à coefficient de transmission de chaleur variables dans le temps, la résolution analytique de ce problème, relativement simple, qui impose le calcul du champ thermique dans le mur, présente dans le cas général de grandes difficultés. Par ailleurs, la solution obtenue s'avère si lourde, que sans programmation du calcul sur ordinateur et composition des tables ou construction des nomogrammes elle s'avère inutilisable pour les applications techniques.

Outre les conditions aux limites variables, l'échange de chaleur intense et les grandes différences de température dont les domaines cosmique, nucléaire, des fusées et bien d'autres sont le siège, rendent nécessaire de tenir compte de l'échange de chaleur radiatif aux frontières du corps, de la variation des propriétés physiques du matériau avec la température, des sources de chaleur internes et des transformations d'état. Ces particularités font qu'en faisant appel aux

mathématiques sans recourir à des hypothèses simplificatrices la résolution des problèmes multidimensionnels non linéaires par des méthodes analytiques exactes, à l'état actuel du formalisme, est impossible. Dans ce cas les plus efficaces sont les méthodes numériques approchées.

Pour résoudre les équations différentielles du type conductivité thermique, la plus usitée est la *méthode des différences finies*. Ses différentes versions ont été élaborées dès les années 1930, mais leur vaste expansion ne date que de l'apparition des calculatrices rapides à volume de mémoire à accès immédiat assez grand.

En résolvant numériquement les problèmes par la méthode aux différences, il est impossible d'obtenir la solution pour tous les points d'un certain domaine de l'espace. Elle ne peut être qu'approchée, et ceci encore seulement pour un certain ensemble fini des points appelé *réseau*.

La procédure de la résolution numérique débute par la substitution à l'équation différentielle de son analogue aux différences finies.

Pour écrire cet analogue de l'équation de départ, il faut, premièrement, remplacer le domaine de la variation continue de l'argument par le domaine discret; deuxièmement, remplacer l'opérateur différentiel de l'équation par ce qu'on appelle opérateur aux différences. Ensuite, la résolution numérique approchée de l'équation différentielle se ramène à la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires (c'est-à-dire d'un système d'équations aux différences finies). La proximité de la solution approchée (aux différences) par rapport à la solution exacte dépend du choix du réseau.

Considérons les méthodes numériques de résolution des problèmes les plus simples de la conductivité thermique non stationnaire. A cet effet, utilisons les équations aux différences établies suivant ce qu'on appelle schéma aux différences finies explicite aussi bien qu'implicite.

Equations aux différences finies explicites. Pour la résolution par la méthode des différences finies de l'équation unidimensionnelle de la conductivité thermique

$$\partial T/\partial\tau = a\partial^2 T/\partial x^2 \tag{III.210}$$

les dérivées qui y figurent sont approximées par les dérivées aux différences finies

$$\partial T/\partial\tau \approx (T_i^{k+1} - T_i^k)/\Delta\tau; \quad \partial T/\partial x \approx (T_{i+1}^k - T_i^k)/\Delta x$$

ou

$$\partial T/\partial x \approx (T_i^k - T_{i-1}^k)/\Delta x,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{T_{i+1}^k - T_i^k}{\Delta x} - \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x}\right) = \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{(\Delta x)^2}.$$

L'analogue aux différences finies est alors de la forme

$$(T_i^{k+1} - T_i^k)/\Delta\tau = a\,(T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k)/(\Delta x)^2. \tag{III.211}$$

Les valeurs des dérivées partielles de la température T par rapport au temps τ et de la température par rapport à la coordonnée x sont remplacées dans (III.211) par leurs valeurs approchées, et les différentielles correspondantes, par les accroissements finis. En particulier, Δx et $\Delta\tau$ sont de petits accroissements des variables indépendantes x et τ (Δx est un pas suivant la coordonnée; $\Delta\tau$, un pas suivant le temps).

Pour résoudre cette équation, la température se calcule seulement pour des points isolés $i = 1, 2, 3, \ldots n$, reposant sur l'axe des x. On suppose alors qu'à chaque instant τ la distribution de la température dans l'intervalle entre les points voisins est linéaire. Lors de la résolution des problèmes multidimensionnels, ces points s'appellent ordinairement nœuds du réseau spatial.

Dans le cas le plus simple, les intervalles entre ces points sont égaux entre eux et à Δx.

L'expression (III.211) doit être envisagée comme un système d'équations algébriques dont le nombre n est égal à celui des températures inconnues. Les indices k et $k+1$ définissent l'instant auquel correspond la valeur de la température; T^k est la valeur de la température à un certain instant τ; T^{k+1}, la valeur de la température à l'instant $\tau + \Delta\tau$. Chacune des équations aux différences finies contient une seule température inconnue T_i^{k+1}. Cette température apparaît dans le nœud i après l'écoulement du petit intervalle de temps $\Delta\tau$. On suppose alors que la température initiale en chaque nœud est T_i^k.

L'approximation aux différences qui vient d'être décrite n'est pas la seule possible.

L'équation (III.211) est construite suivant le schéma aux différences finies explicite classique et se résout sans peine sous une forme explicite par rapport à la fonction inconnue.

Pour le calcul des températures inconnues T_i^{k+1}, le système composé de n équations algébriques du type (III.211) se résout successivement pour chaque pas dans le temps. L'équation doit être alors résolue autant de fois qu'il y a de pas (tranches) dans l'intervalle de temps du calcul.

Lorsqu'on effectue le premier pas dans le temps et le système (III.211) est résolu pour la première fois, les valeurs des températures initiales sont tirées des conditions initiales. (D après les conditions initiales, la distribution des températures à l'instant $\tau = 0$ doit être donnée.) Dans les résolutions successives, les valeurs de T_i^k sont prises à partir de la tranche du temps précédente.

Stabilité du système d'équations aux différences finies explicites. Pour la résolution d'un système d'équations aux différences finies, le choix correct de $\Delta\tau$ et Δx est décisif. En retenant les schémas aux différences finies explicites, la grandeur du pas dans le temps admissible est limitée, et pour les nœuds intérieurs elle dépend du pas choisi d'après la coordonnée et de la diffusivité du matériau $a = \lambda/c\rho$.

La figure III.23 visualise les résultats de la résolution exacte et numérique du problème de la conductivité thermique non stationnaire pour un mur plan divisé en quatre intervalles de temps.

La comparaison montre que les calculs avec $a\Delta\tau/(\Delta x)^2 = 1/2$ fournit des résultats parfaitement satisfaisants, alors qu'avec $a\Delta\tau/(\Delta x)^2 > 1/2$ apparaît le phénomène d'*instabilité*. Il n'est pas lié aux erreurs d'arrondissement, mais résulte des propriétés du système d'équations aux différences finies lui-même.

En résolvant l'équation (III.211) sous une forme explicite par rapport à la fonction inconnue T_i^{k+1}, on obtient

$$T_i^{k+1} = A\,T^k{}_{i+1} + B\,T_i^k + C\,T_{i-1}^k, \qquad \text{(III.212)}$$

où $A = C = a\Delta\tau/(\Delta x)^2$; $B = 1 - 2a\Delta\tau/(\Delta x)^2$. De plus, $A + B + C = 1$.

Pour simplifier le raisonnement, admettons que tous les $T > 0$. Dans le cas général, parmi les valeurs connues T_{i+1}^k, T_i^k et T_{i-1}^k il existe une valeur maximale et une valeur minimale *). Si on avance l'hypothèse suivant laquelle T_{i+1}^k est la valeur maximale et T_{i-1}^k, la valeur minimale, alors, en vertu du fait que $T_i^{k+1} = T_{i+1}^k - B\,(T_{i+1}^k - T_i^k) - C\,(T_{i+1}^k - T_{i+1}^{k-1})$ et $T_i^k = T_{i-1}^k + A\,(T_{i+1}^k - T_{i-1}^k) + B\,(T_i^k - T_{i-1}^k)$, pour des A, B et C positifs la valeur

*) Dans le cas d'un problème bidimensionnel, dans le deuxième membre de (III.212) figurent cinq températures différentes, et dans le cas du problème tridimensionnel, sept températures.

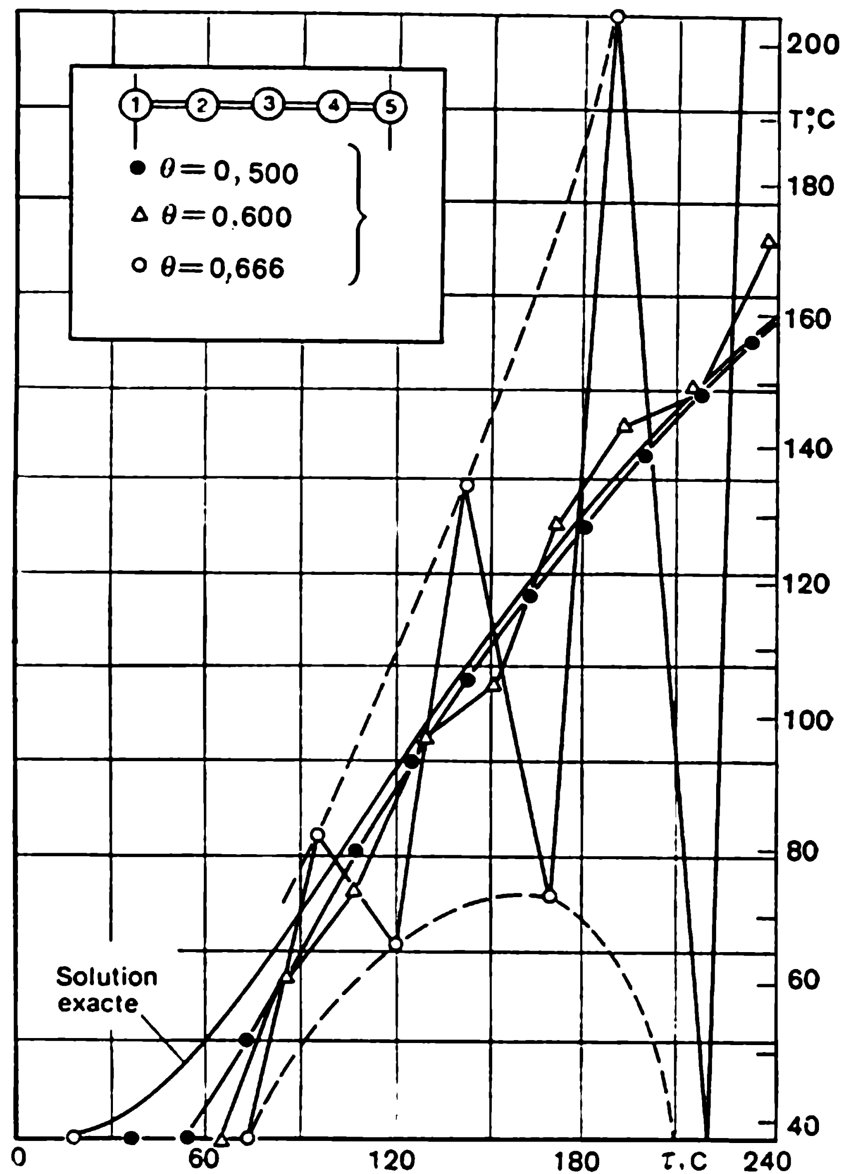


Fig. III.23. Stabilité du système d'équations aux différences finies explicites $[\theta = a\Delta\tau/(\Delta x)^2]$

de la température T_i^{k+1} à calculer par la résolution satisfait à l'inégalité $T_{i+1}^k > T_i^{k+1} > T_{i-1}^k$ et, par suite, est bornée à l'avance. D'après des considérations physiques, A et C ne peuvent être inférieurs à zéro; donc, pour exclure la croissance infinie de T_i^{k+1} au cours de la résolution, il faut, en choisissant $\Delta\tau$, remplir la condition de stabilité suivante du système d'équations aux différences

$$B = (1 - 2a\Delta\tau/(\Delta x)^2) \geqslant 0 \text{ ou } a\Delta\tau/(\Delta x)^2 \leqslant 1/2,$$

$$\text{c'est-à-dire } \Delta\tau_{\text{adm}} = 0{,}5\,(\Delta x)^2/a,$$

où $\Delta\tau_{\text{adm}}$ est la valeur maximale admissible du pas dans le temps.

En appliquant ce procédé, on peut déduire la condition de stabilité pour le cas de résolution des problèmes multidimensionnels suivant le schéma explicite décrit dans ce qui précède, ainsi qu'établir les conditions de stabilité des

équations aux différences qui correspondent aux nœuds reposant à la frontière du corps.

Par exemple, l'équation aux différences unidimensionnelle qui exprime approximativement la condition du bilan thermique pour le nœud limite *1* du réseau aux différences peut s'écrire

$$\alpha_1^k (T_{l1}^k - T_1^k) - \frac{\lambda}{\Delta x} (T_1^k - T_2^k) = c\rho \frac{\Delta x}{2} \frac{T_1^{k+1} - T_1^k}{\Delta\tau}. \qquad \text{(III.213)}$$

Ici le premier terme du premier membre traduit le flux thermique transféré par convection d'un milieu à température T_{l1} vers la surface d'un mur plan indéfini; le deuxième terme, le flux thermique transféré par conductivité thermique du nœud limite *1* vers le nœud *2* du corps solide, et enfin, le deuxième membre rend compte de la variation de l'enthalpie du corps dans la tranche du mur d'une épaisseur $\Delta x/2$ en un petit intervalle de temps $\Delta\tau$.

Tous les termes de cette équation sont rapportés à l'unité de temps et à l'unité de surface du mur à travers laquelle passe le flux thermique.

Après la réduction de l'équation (III.213) à la forme (III.212), on calcule les coefficients affectés aux températures T_1^k et T_2^k. Pour observer les conditions de stabilité, ils doivent être supérieurs à zéro. Par conséquent,

$$\frac{a\Delta\tau}{(\Delta x)^2}\left(1 + \frac{\alpha_1 \Delta x}{\lambda}\right) \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \Delta\tau_{\text{adm}} = \frac{0{,}5}{a/(\Delta x)^2 + \alpha_1/(c\rho\Delta x)}.$$

Les résultats obtenus montrent que pour le nœud limite du réseau la grandeur $\Delta\tau$ dépend non seulement de Δx et de a, mais aussi du coefficient de transmission de chaleur α_1. Cette condition de stabilité est plus rigoureuse pour le nœud limite que pour les nœuds intérieurs. Il est clair que dans les calculs, la valeur choisie de $\Delta\tau_{\text{adm}}$ qui correspond à la condition de stabilité du nœud limite *1*, doit être minimale.

La théorie des équations aux différences finies démontre que si l'on observe les conditions de stabilité avec la diminution de Δx et $\Delta\tau$, la solution du système (III.211) s'approche de la solution exacte de l'équation différentielle correspondante

L'erreur d'approximation du système aux différences examiné est proportionnelle à $\Delta\tau$ et $(\Delta x)^2$. Cependant, dans le cas particulier où $\Delta\tau$ et Δx sont choisis tels que $a\Delta\tau/(\Delta x)^2 = 1/6$, l'erreur d'approximation diminue sensiblement et devient proportionnelle à $(\Delta\tau)^2$ et $(\Delta x)^4$. Cette circonstance peut être utilisée pour élever la précision de la résolution numérique.

L'influence exercée par Δx sur les résultats de la résolution peut être évaluée d'après les données représentées sur la figure III.24. Les courbes *I*, *II* et *III* correspondent aux solutions obtenues pour deux, trois et cinq nœuds.

Equations aux différences finies implicites. Pour améliorer la précision de la résolution, on doit choisir Δx assez petit. Pourtant, dans les schémas explicites la valeur maximale admissible de $\Delta\tau$ est proportionnelle à $(\Delta x)^2$. Ceci résulte des conditions de stabilité. Dans ces circonstances il peut s'avérer que pour achever le processus de résolution il faut réaliser un nombre énorme de pas dans le temps et la solution est pratiquement impossible. L'équation de la chaleur est résolue alors en recourant aux équations aux différences finies implicites de la forme

$$(T_i^{k+1} - T_i^k)/\Delta\tau = a\,(T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1})/(\Delta x)^2. \qquad \text{(III.214)}$$

On dit que les systèmes (III.211) et (III.214) utilisent les différences dans le temps respectivement en avant et en arrière (par rapport à l'instant τ pour lequel sont composées les différences spatiales).

Les schémas aux différences finies explicite et implicite peuvent être réunis

$$\frac{T_i^{k+1}-T_i^k}{\Delta\tau}=a\left[\frac{T_{i+1}^{k+1}-2T_i^{k+1}+T_{i-1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}\sigma+\right.$$
$$\left.+\frac{T_{i+1}^{k}-2T_i^{k}+T_{i-1}^{k}}{(\Delta x)^2}(1-\sigma)\right], \qquad \text{(III.215)}$$

alors, pour $\sigma = 0$ on obtient un système d'équations aux différences finies explicites, et pour $\sigma = 1$, un système d'équations implicites.

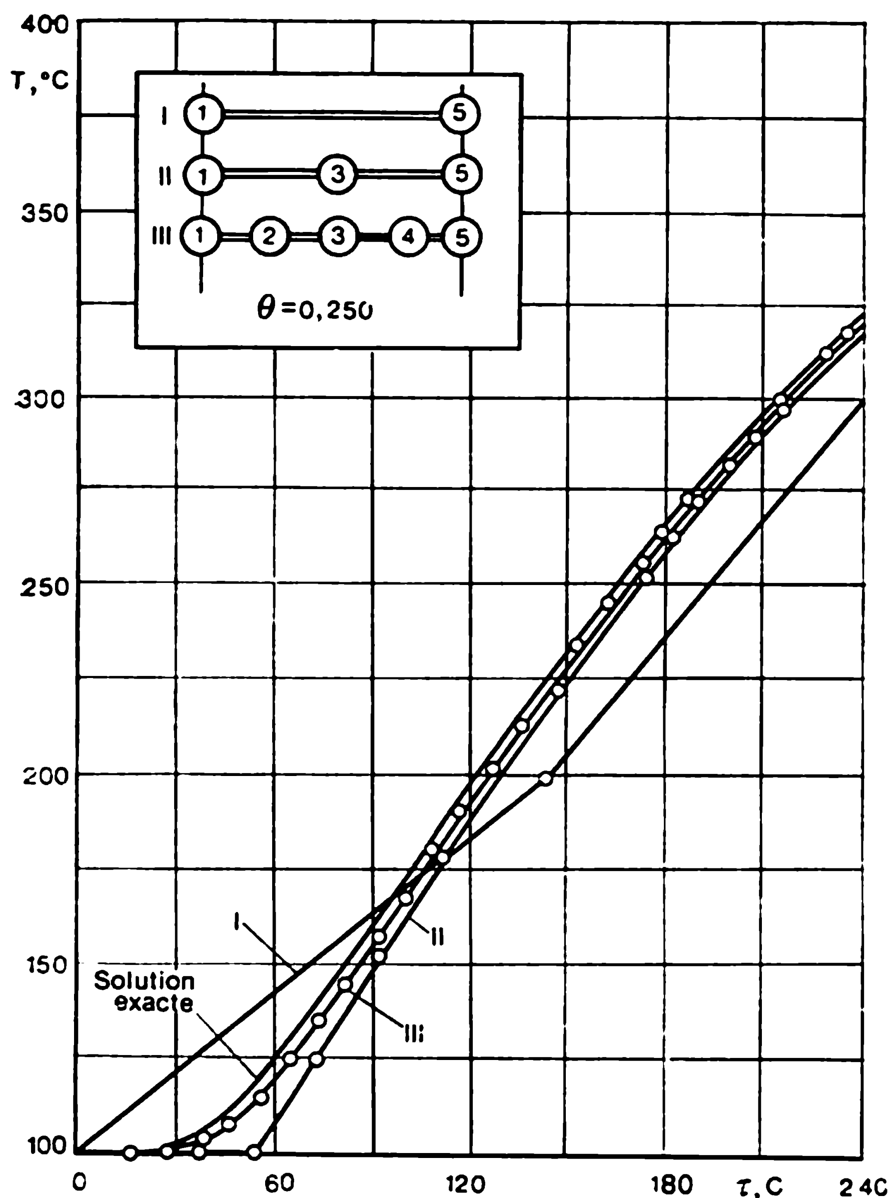


Fig. III.24. Convergence des solutions numériques en fonction de la grandeur du pas suivant la coordonnée Δx

Le choix raisonnable du facteur de poids σ pour le calcul machine permet de réaliser la résolution d'après le schéma qui, dans les conditions données, impose un temps machine minimal.

où Q_V est la quantité de chaleur de l'unité de volume par unité de temps, W/m³; L_V, le travail réalisé par les forces extérieures sur l'unité de volume par unité de temps, W/m³; τ, le temps, s; ρ, la densité du fluide, kg/m³; u, l'énergie interne spécifique, J/kg; w, la vitesse du fluide, m/s.

La thermodynamique enseigne que

$$du = dh - d\,(pv), \tag{IV.7}$$

où p est la pression, Pa; v, le volume spécifique, m³/kg. Donc,

$$du + d\,(w^2/2) = dh + d\,(w^2/2) - v\,dp - p\,dv. \tag{IV.8}$$

Pour calculer Q_V, extrayons du milieu considéré un volume fini V délimité par la surface F.

L'équation du bilan thermique de ce volume, rapportée à l'unité de temps, peut se mettre sous la forme

$$\int_V Q_V\,dV + \int_F (\mathbf{q}\cdot d\mathbf{F}) = \int_V q_V\,dV, \tag{IV.9}$$

où q_V est l'intensité des sources de chaleur internes (telles que les réactions chimiques volumiques, la désintégration radioactive, le travail de frottement, etc.), W/m³.

En utilisant la formule de Gauss-Ostrogradski et sous l'hypothèse de la continuité du milieu, on a

$$\int_F (\mathbf{q}\cdot d\mathbf{F}) = \int_V \operatorname{div}\mathbf{q}\,dV. \tag{IV.10}$$

Tous les paramètres étant des fonctions continues des coordonnées et du temps, compte tenu de (IV.10) on peut écrire

$$\int_V [Q_V + \operatorname{div}\mathbf{q} - q_V]\,dV = 0. \tag{IV.11}$$

En adoptant pour le vecteur du flux thermique l'hypothèse de Fourier, on a

$$Q_V = \operatorname{div}\,(\lambda \operatorname{grad} t) + q_V. \tag{IV.12}$$

Compte tenu des équations (IV.6) et (IV.12), on obtient les équations différentielles de l'énergie sous la forme

$$\operatorname{div}\,(\lambda \operatorname{grad} t) + q_V + L_V + \frac{dp}{d\tau} + p\rho\frac{dv}{d\tau} = \left[\frac{di}{d\tau} + \frac{d\,(w^2/2)}{d\tau}\right]\rho. \tag{IV.13}$$

Pour des vitesses modérées de l'écoulement du fluide, lorsque le travail des forces extérieures et l'énergie cinétique du flux sont

petits par rapport à son enthalpie, l'équation devient sensiblement plus simple

$$\rho Dh/d\tau = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) + q_V, \qquad \text{(IV.14)}$$

où $Dh/d\tau$ est la dérivée substantielle

$$Dh/d\tau = \partial h/\partial\tau + (\overline{w}, \operatorname{grad} i). \qquad \text{(IV.15)}$$

Si on peut admettre que le coefficient de conductivité thermique et la chaleur spécifique sont constants, il vient

$$c\rho \frac{DT}{d\tau} = \lambda \nabla^2 T + q_V \qquad \text{(IV.16)}$$

ou, compte tenu de (IV.15),

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial\tau} + w_x\frac{\partial T}{\partial x} + w_y\frac{\partial T}{\partial y} + w_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \\ = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + q_V. \qquad \text{(IV.17)}$$

Pour un milieu fixe ($w = 0$) on obtient l'équation déjà connue de Fourier-Kirchhoff (I.18)

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial\tau} = \lambda \nabla^2 T + q_V. \qquad \text{(IV.18)}$$

En l'absence de sources de chaleur internes on tire de l'équation (IV.16)

$$\partial T/\partial\tau + (\overline{w}, \operatorname{grad} T) = a\nabla^2 T, \qquad \text{(IV.19)}$$

où a est la diffusivité.

Dans l'équation de l'énergie (IV.12) figure en tant qu'inconnue la vitesse à laquelle se déplace le fluide. Aussi, pour établir la distribution de la température dans un courant de fluide, faut-il résoudre au préalable le problème hydrodynamique, c'est-à-dire déterminer la distribution des vitesses dans un courant de fluide.

Loi de la conservation de la matière pour un courant de fluide. La loi de conservation de la masse du fluide en un volume arbitraire V délimité par la surface F peut s'écrire

$$dM_F = dM. \qquad \text{(IV.20)}$$

Introduisons le vecteur de densité du courant de masse **m**; il vient

$$dM_F = -d\tau \int_V \operatorname{div} \mathbf{m}\, dV. \qquad \text{(IV.21)}$$

La variation de la densité ρ fait que dans un volume V s'accumule la masse

$$dM = \int_V d\rho\, dV = d\tau \int_V \frac{\partial\rho}{\partial\tau}\, dV. \qquad \text{(IV.22)}$$

Portons dM_F et dM des équations (IV.21) et (IV.22) dans l'équation (IV.20)

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div} \mathbf{m} \right) dV = 0. \tag{IV.23}$$

Le volume V est choisi arbitrairement, alors que tous les paramètres du fluide, en vertu de l'hypothèse adoptée de la continuité du milieu, sont des fonctions continues des coordonnées et du temps. L'équation (IV.23) entraîne donc

$$\partial \rho / \partial \tau + \operatorname{div} \mathbf{m} = 0. \tag{IV.24}$$

Le vecteur de la densité du courant de la masse est associé au vecteur de la vitesse et à la densité par la relation évidente

$$\mathbf{m} = \rho \mathbf{w}. \tag{IV.25}$$

Donc

$$\partial \rho / \partial \tau + \operatorname{div} (\rho \mathbf{w}) = 0, \tag{IV.26}$$

ou en coordonnées orthogonales

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w_z) = 0. \tag{IV.27}$$

En particulier, pour un écoulement plan

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y) = 0; \tag{IV.28}$$

pour un écoulement symétrique à l'axe

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r w_x) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r w_y) = 0, \tag{IV.29}$$

où r est la distance suivant la normale à l'axe de symétrie.

L'équation (IV.26) s'appelle *équation de continuité.*

Pour un fluide incompressible $\rho = \text{const}$, et l'équation de continuité est de la forme

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \tag{IV.30}$$

ou

$$\partial w_x / \partial x + \partial w_y / \partial y + \partial w_z / \partial z = 0. \tag{IV.31}$$

Dans l'équation de continuité figurent trois composantes de la vitesse: w_x, w_y, w_z, et cette équation ne suffit pas à elle seule pour déterminer le champ des vitesses $\mathbf{w}$ dans le courant du fluide.

Loi de la conservation de la quantité de mouvement d'un fluide visqueux. Les équations différentielles du mouvement d'un tel fluide se déduisent de la loi de conservation de la quantité de mouvement relative à un flux qui passe par un volume V arbitraire.

La vitesse avec laquelle varie le vecteur principal de la quantité de mouvement du fluide confiné dans un volume V est égale au vecteur principal des forces massiques (poids) et superficielles qui agissent à la surface (forces de pression et de frottement).

Le vecteur principal de la quantité de mouvement du fluide confiné dans le volume V

$$K = \int_V \rho \mathbf{w} \, dV. \tag{IV.32}$$

En vertu de la loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{DK}{d\tau}=\frac{D}{d\tau}\int_V \rho \mathbf{w}\, dV=\int_V \rho \mathbf{M}\, dV+\int_F \mathbf{P}\, dF. \tag{IV.33}$$

En retenant que

$$\frac{D}{d\tau}\int_V \rho \mathbf{w}\, dV=\int_V \rho\frac{D\mathbf{w}}{d\tau}\, dV+\int_V \mathbf{w}\frac{D}{d\tau}(\rho\, dV), \tag{IV.34}$$

et en transformant l'intégrale superficielle de l'équation (IV.33) en intégrale volumique d'après le théorème de Gauss-Ostrogradski,

$$\int_F \mathbf{P}\, dF=\int_V \operatorname{div}\mathbf{P}\, dV, \tag{IV.35}$$

on obtient

$$\int_V (\rho\, d\mathbf{w}/d\tau-\rho\mathbf{M}-\operatorname{div}\mathbf{P})\, dV=0. \tag{IV.36}$$

En utilisant les hypothèses sur le volume arbitraire V et la continuité du milieu, on a

$$\rho D\mathbf{w}/d\tau=\rho\mathbf{M}+\operatorname{div}\mathbf{P}. \tag{IV.37}$$

Compte tenu de

$$D\mathbf{w}/d\tau=\partial\mathbf{w}/\partial\tau+(\mathbf{w},\ \mathrm{grad})\,\mathbf{w}, \tag{IV.38}$$

on obtient l'équation du mouvement du fluide exprimée en tensions $\mathbf{P}$:

$$\rho\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial\tau}+\rho(\mathbf{w},\ \mathrm{grad})\,\mathbf{w}=\rho\mathbf{M}+\operatorname{div}\mathbf{P}. \tag{IV.39}$$

C'est une équation vectorielle et ses projections s'écrivent sous la forme de trois équations

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+w_x\frac{\partial}{\partial x}+w_y\frac{\partial}{\partial y}+w_z\frac{\partial}{\partial z}\right)w_x=\rho M_x+\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z};\\
&\rho\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+w_x\frac{\partial}{\partial x}+w_y\frac{\partial}{\partial y}+w_z\frac{\partial}{\partial z}\right)w_y=\rho M_y+\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z};\\
&\rho\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+w_x\frac{\partial}{\partial x}+w_y\frac{\partial}{\partial y}+w_z\frac{\partial}{\partial z}\right)w_z=\rho M_z+\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z},
\end{aligned} \tag{IV.40}$$

où figurent 12 inconnues: trois composantes du vecteur de la vitesse (w_x, w_y, w_z) et neuf composantes du vecteur de la tension (p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}, p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}).

Lors de l'écoulement d'un liquide visqueux, le courant est le siège d'action de la tension normale et de la tension de cisaillement. La tension normale est conditionnée par les forces de pression, et celle de cisaillement, par le frottement entre les couches liquides se déplaçant à des vitesses différentes.

En vertu de l'hypothèse de Newton, dans un courant plan de fluide visqueux la tension tangentielle (tension de cisaillement) est liée à la dérivée de la vitesse suivant la normale à la direction du courant par une relation simple

$$p_{xy}=\tau_{xz}=\mu\, dw_x/dy. \tag{IV.41}$$

Le coefficient de proportionnalité μ s'appelle viscosité dynamique et se mesure en Pa·s.

On appelle viscosité cinématique ν le rapport μ/ρ; ν est mesurée en m²/s. Les viscosités dynamique et cinématique sont les paramètres physiques du fluide et dépendent de la température et de la pression.

La viscosité dynamique dépend surtout de la température. Pour les fluides aqueux la viscosité dynamique diminue avec l'augmentation de la température, et pour les gaz, elle augmente dans ces conditions.

La viscosité dynamique des gaz en fonction de la température vérifie assez bien la formule de Sutherland

$$\mu = C\,\frac{T^{3/2}}{T+114}; \tag{IV.42}$$

en particulier, pour l'air

$$\mu = 14{,}65\cdot\frac{T^{3/2}}{T+114}. \tag{IV.43}$$

Pour les calculs pratiques on peut utiliser l'équation exponentielle

$$\mu/\mu_0 = (T/T_0)^n, \tag{IV.44}$$

où n dépend de la nature du gaz et de sa température. Dans la marge des températures de 300 à 2000 K on peut adopter $n = 0{,}75$. La loi généralisée de Newton est une relation linéaire entre les tensions et la vitesse de la déformation du fluide qui peut s'écrire sous la forme

$$p_{ij} = \begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) & \text{pour} \quad j \neq i; \\ -p + 2\mu\,\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} & \text{pour} \quad j = i. \end{cases} \tag{IV.45}$$

Ici p est la pression du fluide en un point quelconque du courant; les coordonnées x, y, z sont désignées respectivement par x_i ($i = 1, 2, 3$).

Le fluide qui vérifie la loi généralisée de Newton est dit *newtonien*.

L'équation du mouvement du fluide newtonien s'écrit sous la forme vectorielle

$$\rho\,\frac{D\overline{w}}{d\tau} = \overline{g}\rho + 2\,\mathrm{div}\,(\mu S) - \mathrm{grad}\left(p + \frac{2}{3}\mu\,\mathrm{div}\,\overline{w}\right). \tag{IV.46}$$

Ici $\dfrac{D\overline{w}}{d\tau}$ est le vecteur aux projections $Dw_x/d\tau$, $Dw_y/d\tau$, $Dw_z/d\tau$; S, le tenseur des vitesses des déformations, dont les composantes sont

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w_x}{\partial x}; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right); \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right); \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\right); \quad \frac{\partial w_y}{\partial y}; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right); \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\right); \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z}\right); \quad \frac{\partial w_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{IV.47}$$

Les projections en coordonnées orthogonales de l'équation (IV.46) s'écrivent sous la forme de trois équations

$$\rho \frac{Dw_x}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\mu \operatorname{div} \bar{w}) + g_x\rho;$$

$$\rho \frac{Dw_y}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\right] + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y}\right)\right] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}(\mu \operatorname{div} \bar{w}) + g_y\rho;$$

$$\rho \frac{Dw_z}{d\tau} = g_z\rho - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w_z}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w_z}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\right] + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}(\mu \operatorname{div} \bar{w}). \quad \text{(IV.48)}$$

Pour l'écoulement isotherme d'un fluide incompressible (ρ = const et μ = = const)

$$\rho \frac{D\bar{w}}{d\tau} = \bar{g}\rho - \operatorname{grad} p + \mu\nabla^2\bar{w}; \quad \text{(IV.49)}$$

et ses projections en coordonnées orthogonales

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z}\right) w_x = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 w_x;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z}\right) w_y = g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 w_y;$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_y \frac{\partial}{\partial y} + w_z \frac{\partial}{\partial z}\right) w_z = g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\nabla^2 w_z. \quad \text{(IV.50)}$$

La projection de l'équation du mouvement sur l'axe des x en coordonnées cylindriques est de la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial}{\partial x} + w_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{w_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) w_x = g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_x}{\partial r}\right). \quad \text{(IV.51)}$$

(IV.50) et (IV.26) forment un système fermé composé de quatre équations où figurent quatre inconnues

$$p,\ w_x,\ w_y,\ w_z.$$

Dans le cas où la densité du fluide est variable et dépend de la température, aux équations de continuité et de mouvement viennent s'ajouter les équations d'énergie et d'état qui composent un système fermé de six équations à six inconnues.

Lorsque les processus d'échange de chaleur par convection s'accompagnent de la diffusion, la densité du fluide dépend aussi bien de la température que de la concentration des composantes du mélange. Dans ce cas au système initial (IV.13), (IV.26), (IV.50) il faut ajouter l'équation de la diffusion des composantes.

Equation différentielle de transfert de masse. Examinons le transfert de masse de la matière donnée de densité ρ_k dans un milieu en mouvement.

Supposons que dans le volume terminal extrayé agissent des sources ou des écoulements de la matière donnée d'une intensité j_{V_k} [quantité de la matière dégagée (absorbée) par unité de temps dans une unité de volume].

Alors, il se forme par unité de temps dans le volume V tout entier une quantité de matière égale à

$$\int\limits_V j_{V_k}\,dV. \qquad \text{(IV.52)}$$

La partie de la matière qui passe par la surface S délimitant le volume choisi, compte tenu de la formule de Gauss-Ostrogradski, est définie par la formule

$$\oint\limits_S (\bar{j}_{k_\Sigma}, \overline{dF}) = \int\limits_V \operatorname{div} \bar{j}_{k_\Sigma}\,dV, \qquad \text{(IV.53)}$$

où $\bar{j}_{k_\Sigma}$ est le flux global de la matière dû à la diffusion moléculaire et à la convection.

L'équation du bilan de la matière pour le volume extrait

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial \tau} + \operatorname{div} \bar{j}_{k_\Sigma} - j_{V_k}\right) dV = 0. \qquad \text{(IV.54)}$$

Le volume V extrait étant arbitraire, et toutes les caractéristiques du processus étant des fonctions continues des coordonnées et du temps, on peut écrire

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial \tau} + \operatorname{div} \bar{j}_{k_\Sigma} - j_{V_k} = 0. \qquad \text{(IV.55)}$$

Le flux global de la matière peut être mis sous la forme de la somme des transferts moléculaire et convectif:

$$\bar{j}_{k_\Sigma} = \bar{j}_{k_M} + \rho_k \bar{w}. \qquad \text{(IV.56)}$$

Le transfert moléculaire de la masse a lieu sous l'action du potentiel chimique $\nabla\mu$ et du gradient thermique ∇T.

Pour un mélange binaire on peut écrire

$$\bar{j}_{k_M} = -K_1 \nabla\mu_k - K_2 \nabla T, \qquad \text{(IV.57)}$$

où K_1 et K_2 sont des coefficients constants.

Dans le cas général, le gradient du potentiel chimique de la k-ième composante vaut

$$\nabla\mu_k = \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial \bar{\rho}_k}\right)_{p,\,T} \nabla\bar{\rho}_k + \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial T}\right)_{\bar{\rho}_k,\,T} \nabla T + \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial p}\right)_{\bar{\rho}_k,\,p} \nabla p, \qquad \text{(IV.58)}$$

où $\bar{\rho}_k = \rho_k/\rho$.

Introduisons les notations

$$D = \frac{1}{\rho} K_1 \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial \bar{\rho}_k} \right)_{p,\,T} \quad \textit{coefficient de diffusion};$$

$$K_T = \frac{T}{\rho D} \left[K_2 + K_1 \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial T} \right)_{\bar{\rho}_k,\,p} \right] \textit{coefficient de thermodiffusion};$$

$$K_p = \frac{p}{\rho D} K_1 \left(\frac{\partial \mu_k}{\partial p} \right)_{\bar{\rho}_k,\,T} \quad \textit{rapport de diffusion barométrique.}$$

Alors, il vient

$$\bar{j}_{k_M} = -\rho D \left(\nabla \bar{\rho}_k + (K_T/T)\,\nabla T + (K_p/p)\,\nabla p\right). \tag{IV.59}$$

Le premier terme du deuxième membre de cette équation caractérise le transfert moléculaire de la masse de la k-ième composante sous l'action du gradient des concentrations (loi de diffusion de Fick) ; le deuxième terme $(K_T/T)\nabla T$ détermine le transfert de la masse par thermodiffusion (effet Soret), et le dernier terme $(K_p/p)\,\nabla p$ caractérise la diffusion barométrique (diffusion de la masse sous l'action du gradient de pression générale). Dans la plupart des cas on peut négliger la thermodiffusion et la diffusion barométrique et se borner à la loi de Fick

$$\bar{j}_{k_M} = -\rho D \nabla \bar{\rho}_k. \tag{IV.60}$$

Le transfert par diffusion de la masse dans les mélanges à composantes multiples est un processus plutôt compliqué. Si un mélange de gaz quelconque est constitué de deux groupes de composantes, dont chacune possède des masses moléculaires ou atomiques relatives à peu près égales, le gaz peut être remplacé par un mélange binaire efficace auquel on peut appliquer la loi de Fick.

En vertu des équations (IV.54), (IV.56) et (IV.60) on obtient l'équation différentielle de la diffusion de la k-ième composante

$$\rho \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial \tau} + (\rho \bar{w},\ \mathrm{grad}\ \bar{\rho}_k) = \rho D \nabla^2 \bar{\rho}_k + j_{v_k}, \tag{IV.61}$$

ou en coordonnées orthogonales

$$\rho \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial \tau} + \rho w_x \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial y} + \rho w_z \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial z} =$$
$$= \rho D \left(\frac{\partial^2 \bar{\rho}_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\rho}_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\rho}_k}{\partial z^2} \right) + j_{v_k} \tag{IV.62}$$

et en coordonnées cylindriques

$$\rho \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial \tau} + \rho w_x \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial x} + \frac{1}{r} \rho w_r \frac{\partial (r \bar{\rho}_k)}{\partial r} = \rho D \left(\frac{\partial^2 \bar{\rho}_k}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \bar{\rho}_k)}{\partial r^2} \right). \tag{IV.63}$$

L'équation de la diffusion du type (IV.61) doit s'écrire pour chaque composante du mélange. Le nombre général d'équations de diffusion est d'une unité inférieur à celui des composantes du mélange, puisque pour les parts de masse des composantes on a encore une condition supplémentaire

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{\rho}_k = 1. \tag{IV.64}$$

En particulier, pour le mélange de deux gaz (mélange binaire) il suffit d'ajouter au système d'équations initial une équation de diffusion pour l'une quelconque des composantes du mélange.

Système d'équations pour un fluide animé d'un mouvement turbulent. L'hydrodynamique enseigne que l'écoulement d'un fluide peut être laminaire ou turbulent. Sous le régime *laminaire* les particules du fluide suivent dans le courant des trajectoires principales bien définies, en conservant tout le temps le mouvement dans la direction du vecteur de la vitesse moyenne du courant, alors que les irrégularités engendrées au sein du courant sont amorties sans se développer. En régime *turbulent* le courant est le siège où naissent des pulsations de vitesses, certains volumes du fluide se déplacent transversalement au courant, ces volumes étant sensiblement plus grands que ceux auxquels on peut appliquer la notion de volume différentiel du milieu continu. Par conséquent, les équations générales de l'hydrodynamique sont également applicables à l'écoulement turbulent.

En toute rigueur, l'écoulement turbulent est non stationnaire; pourtant, si les vitesses moyennes par rapport au temps ne changent pas, ou si leur variation est lente, la vitesse réelle peut être mise sous la forme de la somme

$$\mathbf{w} = \overline{\mathbf{w}} + \mathbf{v}, \tag{IV.65}$$

où $\overline{\mathbf{w}}$ est le vecteur de la vitesse moyenne au point donné; $\mathbf{v}$, le vecteur de la composante pulsative de la vitesse réelle qui donne l'écart de la vitesse en valeur et direction par rapport à la vitesse moyenne.

La grandeur de la vitesse moyenne du courant au point donné est déterminée par l'intégrale

$$\overline{\mathbf{w}} = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\Delta\tau} \mathbf{w} \, d\tau, \tag{IV.66}$$

où l'intervalle de temps $\Delta\tau$ doit être assez grand par rapport à la période des pulsations, tout en étant assez petit par rapport à un intervalle de temps quelconque caractéristique du mouvement moyen, pour rendre compte des variations éventuelles des vitesses moyennes dans le temps.

Alors, naturellement,

$$\int_{\Delta\tau} \underline{\mathbf{v}} \, d\tau = 0, \tag{IV.67}$$

puisque pendant la période $\Delta\tau$ toutes les composantes pulsationnelles de la vitesse dans le courant turbulent provoquent des pulsations de pression, de température, de concentration, etc.

Pour déduire les équations du mouvement moyen du courant turbulent, adoptons, suivant Reynolds, les règles suivantes:

1) si

$$\bar{\varphi}=\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\Delta\tau}\varphi\,d\tau, \text{ il vient}$$

$$\bar{\bar{\varphi}}=\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\Delta\tau}\bar{\varphi}\,d\tau=\bar{\varphi};$$

2) $\overline{\bar{\varphi}\psi}=\bar{\varphi}\bar{\psi}$;

3) $\int_{\Delta\tau}\Phi\,d\tau=0,$

où Φ est la composante pulsationnelle de φ.

En portant dans l'équation de Navier-Stockes conformément à (IV.65) les valeurs réelles de la vitesse et en appliquant les règles de moyennage de Reynolds pour le cas de l'écoulement d'un fluide incompressible, on obtient

$$\left.\begin{aligned}
\rho\frac{D\bar{w}_x}{d\tau}&=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2\bar{w}_x+\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{v_x^2})+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v_yv_x})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v_zv_x})\right\};\\
\rho\frac{D\bar{w}_y}{d\tau}&=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2\bar{w}_y+\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{v_xv_y})+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v_y^2})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v_zv_y})\right\};\\
\rho\frac{D\bar{w}_z}{d\tau}&=g\rho-\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}+\mu\nabla^2\bar{w}_z+\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{v_xv_z})+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{v_yv_z})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{v_z^2})\right\};\\
&\frac{\partial\bar{w}_x}{\partial x}+\frac{\partial\bar{w}_y}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}_z}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(IV.68)}$$

Ces équations montrent que les pulsations de la vitesse font apparaître de nouveaux termes qui figurent dans l'accolade, analogues quant au sens aux termes de frottement visqueux. Ces termes s'appellent *tensions* ou *contraintes turbulentes* et caractérisent le transfert supplémentaire de la quantité de mouvement par les volumes molaires du fluide, qui se déplacent sous l'effet des pulsations de la vitesse.

En particulier, pour le courant turbulent stationnaire plan, lorsque la vitesse $\overline{w}$ n'est fonction que de la coordonnée transversale y, on a d'après l'équation (IV.68)

$$-\frac{dp}{dx}+\mu\frac{d^2\overline{w}}{dy^2}+\frac{d}{dy}(-\rho\overline{v_x v_y})=0. \qquad \text{(IV.69)}$$

Introduisons la notion de la *tension turbulente tangentielle*

$$\tau_t=-\rho\overline{v_x v_y}=\mu_t\, d\overline{w}/dy, \qquad \text{(IV.70)}$$

alors on a l'expression des tensions tangentielles globales

$$\tau=(\mu+\mu_t)\, d\overline{w}/dy. \qquad \text{(IV.71)}$$

La grandeur μ_t s'appelle viscosité turbulente. A la différence de la viscosité μ, la viscosité turbulente n'est pas un paramètre physique. Dans un courant turbulent développé $\mu_t \gg \mu$.

Dans un courant turbulent non isotherme les pulsations de la vitesse provoquent les pulsations de la température et

$$T=\overline{T}+\Theta, \qquad \text{(IV.72)}$$

où Θ est la pulsation de la température T.

En appliquant à l'équation (IV.19) les règles de moyennage, on obtient pour le cas ρ = const et λ = const

$$\frac{D\overline{T}}{d\tau}=a\nabla^2\overline{T}+\frac{q_V}{c_p\rho}+\operatorname{div}(-\overline{V\Theta}). \qquad \text{(IV.73)}$$

Introduisons la notion de la *conductivité thermique turbulente* $\lambda_t = -\frac{\rho\overline{V\Theta}}{d\overline{T}/dy}$, pour obtenir

$$\frac{D\overline{T}}{d\tau}=a\operatorname{div}[(1+\lambda_t/\lambda)\operatorname{grad}\overline{T}]+\frac{q_V}{c_p\rho}. \qquad \text{(IV.74)}$$

On peut obtenir d'une façon analogue l'équation de la diffusion de la k-ième composante dans le flux turbulent

$$\overline{\rho}D\overline{\rho}_k/d\tau=\overline{\rho}D\operatorname{div}[(1+D_t/D)\operatorname{grad}\overline{\rho}_k]+\overline{j}_{V_k}. \qquad \text{(IV.75)}$$

où D_t est la diffusion turbulente.

Le système d'équations différentielles de l'écoulement turbulent d'un fluide est un système ouvert, puisque dans les équations du mouvement, de l'énergie et de la diffusion apparaissent des termes inconnus supplémentaires qui caractérisent le transfert turbulent de la chaleur, de la masse et de la quantité de mouvement. Pour fermer ce système, on utilise des hypothèses supplémentaires qui sont à la base des théories semi-empiriques de la turbulence.

§ IV.3. Conditions d'univalence des processus d'échange de chaleur par convection

Le système d'équations différentielles (IV.19), (IV.26), (IV.50) décrit un ensemble infini des processus d'échange de chaleur par convection. Pour dégager un processus concret il faut formuler les conditions d'univalence qui indiquent les conditions géométriques, physiques, temporelles et aux limites.

Les *conditions géométriques* définissent la forme et les dimensions du corps solide à la surface duquel il faut déterminer q ou T, la position de la surface d'échauffement dans le courant du fluide.

Les *conditions physiques* donnent les valeurs numériques des paramètres physiques du fluide μ, ρ, λ et c_p, ainsi que les sources de chaleur internes dans le courant du fluide.

Les *conditions temporelles* rendent compte des particularités de la marche des processus dans le temps et sont données sous la forme de la distribution initiale de la température et des vitesses.

Les *conditions aux limites* caractérisent les conditions aux surfaces d'échange de chaleur et aux frontières du courant.

On admet ordinairement que la composante horizontale de la vitesse à la surface d'échauffement est nulle (condition d'adhérence du fluide à la paroi). La composante verticale de la vitesse à la surface d'échauffement peut être, dans le cas général, une grandeur donnée et différente de zéro.

Les conditions aux limites *relatives à la chaleur* incluent généralement la donnée de la température de la surface d'échauffement et des flux thermiques.

Tout comme dans la théorie de la conductivité thermique, on distingue trois modes de donnée des conditions aux limites relatives à la chaleur.

La condition aux limites du Ier genre prévoit la donnée de la distribution de la température à la surface d'échange de chaleur.

Avec la condition aux limites du IIe genre on connaît la distribution du flux thermique spécifique à la surface d'échange de chaleur.

La condition aux limites du IIIe genre associe la température de la surface d'échange de chaleur à la température ambiante par la donnée du coefficient de transmission de chaleur de la paroi au milieu.

Dans les cas courants, cette dernière condition s'écrit

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\mathrm{p}} = -\frac{\alpha}{\lambda_{\mathrm{p}}}(T_{\mathrm{p}} - T_1). \qquad \text{(IV.76)}$$

Parfois la température de la surface d'échauffement ou le flux thermique dirigé vers la paroi ne peuvent pas être donnés et présentent des paramètres à établir.

Il convient alors d'ajouter au système d'équations différentielles, qui décrivent le processus de propagation de la chaleur dans le courant du liquide, les équations différentielles de la propagation de chaleur dans la paroi et donner les conditions de jonction.

Les conditions de jonction peuvent être données sous la forme d'égalité des températures à la surface de contact des milieux ou sous la forme d'égalité des flux thermiques spécifiques à travers la surface d'échange de chaleur.

CHAPITRE V

PRINCIPES DE LA THÉORIE DE LA SIMILITUDE ET DE LA THÉORIE DES DIMENSIONS

§ V.1. Intérêt de la théorie de la similitude pour la théorie des échanges thermiques

Etudier un phénomène signifie établir la relation entre les grandeurs qui le définissent. L'échange de chaleur par convection est un phénomène très compliqué décrit par un système d'équations différentielles composé, dans le cas général, d'équations de la chaleur, de l'énergie, du mouvement, de la continuité, de la diffusion et de l'état. Les équations différentielles ne traduisent que les faits les plus généraux du phénomène et ne comportent aucun indice individuel des cas unitaires concrets. Un cas concret est dégagé de la classe générale des phénomènes envisagés en complétant le système d'équations par les conditions d'univalence. De cette façon, la description mathématique d'un cas concret d'échange de chaleur est donnée par le système d'équations différentielles correspondant et les conditions d'univalence.

La résolution de ce système, compte tenu des conditions indiquées, permet d'obtenir la relation de la distribution des vitesses, des températures et des concentrations par rapport aux coordonnées et au temps. En appliquant la formule (IV.3), on trouve la relation entre le coefficient de transmission de chaleur α et le temps τ, les coordonnées x, y, z, les points de la surface et les valeurs de toutes les grandeurs qui figurent dans les conditions d'univalence ρ, c_p, μ, λ, etc., c'est-à-dire $\alpha = f(\tau, x, y, z, \rho, c_p, \mu, \ldots)$. Dans les calculs relatifs aux processus d'échange de chaleur, c'est justement cette relation qui présente le plus d'intérêt.

Le système d'équations différentielles d'échange de chaleur par convection formant avec les conditions d'univalence un système très compliqué, il est impossible d'obtenir dans le cas général la solution. On peut le résoudre seulement pour des cas particuliers sous des hypothèses sensiblement simplificatrices.

Si le problème est analytiquement irrésoluble, la relation pour le coefficient de transmission de chaleur peut être trouvée en recourant à la méthode numérique imposant un grand volume de calcul sur des ordinateurs, ou à l'aide d'une exploration expérimentale. En diffé-

rant suivant les modes d'obtention des grandeurs cherchées, ces deux méthodes sont au fond équivalentes pour ce qui est des possibilités de déterminer la relation entre les grandeurs. Chaque solution numérique, ainsi que chaque expérience donnent, pour des valeurs initiales des arguments bien définis, une valeur numérique concrète de la grandeur cherchée, celle du *coefficient de transmission de chaleur*. Pour trouver la dépendance de ce dernier par rapport ne serait-ce qu'à un argument, il faut réaliser une multitude d'expériences ou de résolutions numériques pour de différentes valeurs de l'argument considéré, en laissant les autres arguments invariables. Il faut ensuite sélectionner pour la série donnée des nombres une formule empirique convenable qui associerait le coefficient de transmission de chaleur aux arguments. A la différence des formules obtenues par résolution analytique, les formules empiriques ne traduisent pas dans toute la mesure du possible le sens physique des processus. Elles ne sont justifiées que pour la marge des valeurs des arguments qui a été mise à l'étude par l'expérience ou les résolutions numériques. La variation de la valeur, ne serait-ce que d'un des arguments laissés constants dans la série donnée des expériences, peut faire changer l'allure de la relation empirique obtenue. Dans le cas d'un grand nombre d'arguments, il s'avère très difficile, et parfois impossible, de sélectionner la relation traduisant judicieusement l'influence de tous les arguments. De la sorte, les méthodes numériques et expérimentales permettent d'obtenir seulement des relations disparates, dont la généralisation est rendue très difficile par un grand nombre d'arguments, dont dépend la grandeur cherchée. Ces difficultés peuvent être surmontées en faisant appel à la théorie de similitude.

Cette théorie établit les conditions de similitude des phénomènes physiques et, sur cette base, permet de réduire sensiblement le nombre de variables. La théorie de similitude fournit les règles d'association raisonnables des grandeurs physiques en groupements sans dimensions dont le nombre est sensiblement inférieur au nombre de grandeurs dont ils se composent, et qui s'appellent nombres caractéristiques. Ces groupements ou nombres caractéristiques reflètent l'action commune de l'ensemble des grandeurs physiques sur le phénomène et peuvent être considérés comme de nouvelles variables généralisées. La diminution du nombre de variables et leur utilisation sous la forme de groupements simplifient considérablement la réalisation des expériences et la généralisation de leurs résultats, ainsi que de ceux des résolutions numériques. *La théorie de la similitude établit également les règles de simulation des processus qui ont lieu dans des installations réelles.*

La théorie de similitude doit beaucoup aux savants soviétiques M. Kirpitchev, M. Mikhéev, L. Sédov, A. Goukhman, S. Koutatéladzé, etc.

Les grandeurs physiques sont associées en groupements ou en nombres caractéristiques sans dimensions par la théorie de la similitude sur la base de l'analyse des équations différentielles qui décrivent le phénomène et qui traduisent les liaisons générales entre les grandeurs. Toutefois, les nombres caractéristiques sans dimensions peuvent s'obtenir également par analyse des dimensions des grandeurs physiques qui importent pour le phénomène envisagé.

§ V.2. Notion de similitude des phénomènes physiques

Cette notion peut être envisagée dans une certaine mesure comme l'extension de la notion de similitude géométrique. On rapporte aux figures *géométriquement similaires* celles qui ont la même forme, les angles respectifs égaux et les côtés proportionnels (fig. V.1). La

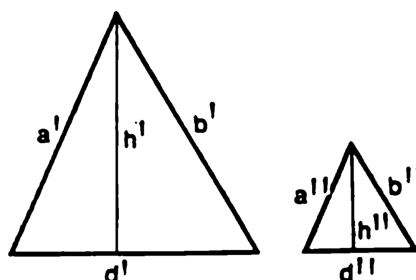


Fig. V.1. Triangles géométriquement semblables

similitude de ces triangles (′ et ″) peut être exprimée de deux façons. D'abord, en établissant l'égalité des rapports entre les segments homologues des figures semblables. Ce rapport s'appelle *constante de similitude*

$$a'/a'' = b'/b'' = d'/d'' = h'/h'' = c,$$

où a', b', d', h' sont les dimensions linéaires du triangle, et a'', b'', d'', h'', les dimensions linéaires homologues de l'autre triangle semblable.

La constante de similitude permet de comparer entre eux seulement des figures semblables, du fait que pour de différentes paires de figures semblables les constantes de similitude sont différentes. Ces constantes montrent de combien de fois les dimensions de l'une des figures diffèrent des dimensions de l'autre; il est donc fréquent qu'on lui donne le nom de *facteur de transformation de similitude.*

La similitude des triangles peut être exprimée également par l'égalité des rapports sans dimensions des segments des figures semblables. Ce sont les rapports de la longueur du segment donné à la longueur d'un segment défini de la figure, retenu comme *échelle de mesure* de toutes les autres longueurs. Si dans les triangles semblables

on adopte comme échelle la hauteur h, la similitude des triangles sera exprimée par les égalités

$$a'/h' = a''/h'' = \bar{a} = \text{idem}; \quad b'/h' = b''/h'' = \bar{b} = \text{idem};$$

$$d'/h' = d''/h'' = \bar{d} = \text{idem}.$$

Les éléments relatifs sans dimensions des figures peuvent se nommer invariants ou *critères de similitude*. En utilisant la notion de longueur relative (critère de similitude) on peut comparer n'importe quel nombre de figures semblables entre elles. Alors, toutes les figures semblables construites suivant l'échelle retenue, c'est-à-dire suivant les grandeurs relatives, sont parfaitement identiques. Les équations aux grandeurs relatives sans dimensions qui décrivent les figures semblables sont aussi identiques. On peut le montrer de la façon suivante.

Les équations de deux ellipses (′ et ″) peuvent s'écrire

$$x'^2/a'^2 + y'^2/b'^2 = 1 \text{ et } x''^2/a''^2 + y''^2/b''^2 = 1,$$

où a et b sont respectivement les demi-grand et demi-petit axes. En adoptant le demi-grand axe comme échelle de toutes les autres longueurs, et en rapportant toutes les grandeurs linéaires de l'équation à cette échelle, on peut écrire l'équation des ellipses aux grandeurs relatives

$$\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2/\bar{b}'^2 = 1; \quad \bar{x}''^2 + \bar{y}''^2/\bar{b}''^2 = 1,$$

où $\bar{x}' = x'/a'$, $\bar{x}'' = x''/a''$, $\bar{y}' = y'/a'$, $\bar{y}'' = y''/a''$ sont les variables relatives sans dimensions; $\bar{b}' = b'/a'$; $\bar{b}'' = b''/a''$, les grandeurs relatives sans dimensions des demi-petits axes.

Pour des ellipses semblables, les longueurs relatives homologues sans dimensions sont identiques. Par conséquent, les ellipses semblables sont décrites par des équations identiques aux grandeurs relatives. Dans ces conditions, le critère de similitude qui figure dans les équations est, pour eux, numériquement égal, c'est-à-dire $\bar{b}' = \bar{b}'' = \bar{b} = \text{idem}$.

En d'autres termes, les ellipses semblables sont décrites par la même équation à grandeurs relatives

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2/\bar{b}^2 = 1.$$

De cette façon, si les figures géométriques peuvent être décrites par des équations, la condition de leur similitude est l'identité de leurs équations aux grandeurs relatives sans dimensions.

Si l'on connaît les conditions de similitude, on peut résoudre de nombreux problèmes pratiques utiles. Les propriétés des triangles semblables permettent de déterminer, par exemple, la hauteur d'un arbre ou la largeur d'une rivière sans les mesurer directement.

10—01289

La notion de similitude peut être étendue également aux phénomènes physiques. On peut parler, par exemple, de la similitude du mouvement des flux d'un fluide (similitude cinématique), de la similitude des forces (similitude dynamique), de la similitude des températures et des flux thermiques (similitude thermique), etc.

On peut appliquer la similitude seulement aux phénomènes de même nature physique qui se produisent dans des systèmes géométriquement semblables. L'*indice de similitude* est l'identité des grandeurs physiques relatives sans dimensions en tous les points homologues. On dit homologues pour les points dont les coordonnées

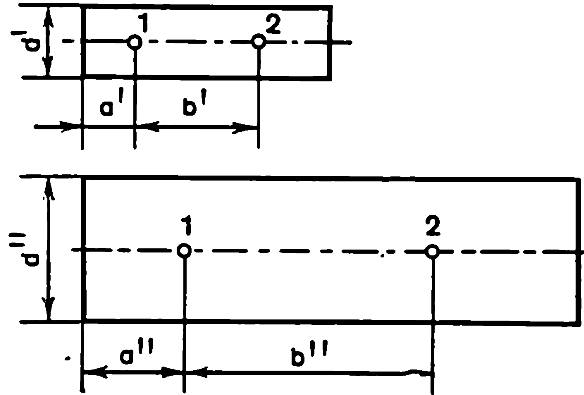


Fig. V.2. Similitude des processus physiques dans le cas de l'écoulement des liquides dans des tubes

sans dimensions sont égales, c'est-à-dire les points qui satisfont à la condition de la similitude géométrique. Les valeurs des grandeurs physiques variant d'un point à l'autre, on peut dire également que l'indice de similitude est l'identité des champs des grandeurs physiques sans dimensions construits en coordonnées sans dimensions. *La valeur relative sans dimensions de toute grandeur physique* s'obtient par division de la valeur réelle de cette grandeur en point donné par une certaine valeur caractéristique de cette même grandeur retenue comme son échelle de mesure.

Explicitons la similitude des phénomènes physiques par l'exemple suivant. Supposons qu'il existe deux systèmes géométriquement semblables (′ et ″) représentés sur la figure V.2, qui sont le siège des processus d'écoulement du fluide. Alors, en adoptant comme points homologues *1* et *2* ceux qui vérifient la condition

$$a'/d' = a''/d'' = \bar{a} = \text{idem}, \quad b'/d' = b''/d'' = \bar{b} = \text{idem},$$

on peut affirmer que l'égalité a lieu en présence d'une similitude cinématique

$$w_2'/w_1' = w_2''/w_1'' = \bar{w} = \text{idem};$$

d'une similitude dynamique

$$p_2'/p_1' = p_2''/p_1'' = \overline{p} = \text{idem ou } \Delta p'/p_1' = \Delta p''/p_1'' = \overline{\Delta p} = \text{idem};$$

d'une similitude thermique

$$t_2'/t_1' = t_2''/t_1'' = \overline{t} = \text{idem ou } \Delta t'/t_1' = \Delta t''/t_1'' = \overline{\Delta t} = \text{idem}.$$

Pour la similitude des phénomènes non stationnaires il faut qu'on observe encore la similitude temporelle qui détermine les *instants homologues*, auxquels en points homologues, dans les conditions de similitude, doivent être égales telles ou telles grandeurs relatives. L'existence de la similitude temporelle est définie de la façon suivante. Supposons qu'à l'instant initial $\tau = 0$ l'une quelconque grandeur physique φ_1 en points homologues de deux systèmes a les valeurs φ_0' et φ_0''. Pour ces systèmes, dans un intervalle de temps respectivement $\Delta\tau_1'$ et $\Delta\tau_1''$, de plus $\Delta\tau_1' \neq \Delta\tau_1''$, en ces mêmes points homologues les grandeurs physiques ont les valeurs φ_1' et φ_1''. Dans un autre intervalle de temps, respectivement $\Delta\tau_2'$ et $\Delta\tau_2''$ $(\Delta\tau_2' \neq \Delta\tau_2'')$, les grandeurs physiques ont en points homologues les valeurs φ_1' et φ_2''. Si maintenant pour $\varphi_2'/\varphi_1' = \varphi_2''/\varphi_1'' = \overline{\varphi} =$ idem a lieu $\Delta\tau_2'/\Delta\tau_1' = \Delta\tau_2''/\Delta\tau_1'' = \overline{\Delta\tau} =$ idem, cela signifie que les phénomènes sont *homochrones* ou temporairement homologues. Si de plus $\Delta\tau_1' = \Delta\tau_2''$, on est en présence des phénomènes *synchrones.*

De la sorte, en présence de la similitude des phénomènes physiques ′, ″, ‴, etc., toute grandeur physique $(\varphi, \psi, \ldots)$ qui définit le phénomène envisagé en points homologues à des instants homologues doit observer la relation

$$\begin{aligned} \varphi'/\varphi_0' &= \varphi''/\varphi_0'' = \varphi'''/\varphi_0''' = \ldots \overline{\varphi} = \text{idem}; \\ \psi'/\psi_0' &= \psi''/\psi_0'' = \psi'''/\psi_0''' = \ldots \overline{\psi} = \text{idem, etc.} \end{aligned} \tag{V.1}$$

Les coordonnées des points homologues et les instants homologues sont déterminés par les rapports respectifs

$$\begin{aligned} x'/l_0' &= x''/l_0'' = x'''/l_0''' = \ldots = \overline{x} = \text{idem}; \\ y'/l_0' &= y''/l_0'' = y'''/l_0''' = \ldots = \overline{y} = \text{idem}; \\ z'/l_0' &= z''/l_0'' = z'''/l_0''' = \ldots = \overline{z} = \text{idem}; \\ \tau'/\tau_0' &= \tau''/\tau_0'' = \tau'''/\tau_0''' = \ldots = \overline{\tau} = \text{idem}. \end{aligned} \tag{V.2}$$

Les valeurs des grandeurs physiques sans dimensions des phénomènes physiques semblables étant identiques en points homologues à des instants homologues, les fonctions qui traduisent les relations

entre les grandeurs physiques sans dimensions d'une part, et les coordonnées et le temps sans dimensions d'autre part

$$\bar{\varphi} = f(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}); \quad \bar{\psi} = f(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \text{ etc.},$$

sont également identiques, les mêmes pour tous les phénomènes semblables entre eux.

La similitude des phénomènes physiques, tout comme la similitude géométrique, peut être exprimée à l'aide des constantes de similitude. Pour deux phénomènes semblables les relations (V.1) permettent d'écrire

$$\varphi'/\varphi_0' = \varphi''/\varphi_0''; \quad \psi'/\psi_0' = \psi''/\psi_0'', \text{ etc.}$$

Ceci peut se récrire sous la forme

$$\varphi_0''/\varphi_0' = \varphi''/\varphi' = C_\varphi, \quad \psi_0''/\psi_0' = \psi''/\psi' = C_\psi, \text{ etc.}$$

Les valeurs des constantes de similitude C_φ et C_ψ montrent de combien de fois les grandeurs φ et ψ du système $''$ se distinguent des mêmes grandeurs prises aux points homologues du système $'$. La valeur de la constante de similitude de la grandeur physique donnée est la même en tous les points homologues de deux systèmes à phénomènes physiques semblables. Pour les grandeurs physiques de nature différente les valeurs des constantes de similitude peuvent être différentes. La notion de constante de similitude est utilisée pour comparer deux à deux des phénomènes semblables. S'il y en a plusieurs ($'$, $''$, $'''$, etc.) les constantes de similitude diffèrent lorsqu'on passe d'une paire à une autre

$$C_{\varphi_1} = \varphi''/\varphi' \neq C_{\varphi_2} = \varphi'''/\varphi' \neq C_{\varphi_3} = \varphi'''/\varphi'', \quad \text{etc.}$$

§ V.3. Conditions de similitude des phénomènes physiques

Après avoir examiné le sens de la similitude géométrique et de la similitude des phénomènes physiques, relevons certains principes qui leur sont communs, pour formuler les conditions de similitude des phénomènes physiques. Dans les deux cas, comme nous l'avons établi, en géométrie tout comme en physique, *la similitude s'exprime de la même façon par l'identité des grandeurs relatives sans dimensions correspondantes.* Dans le cas géométrique, ceci concerne les segments relatifs des figures, dans celui des phénomènes physiques, les diverses grandeurs physiques.

Dans le cas de la similitude géométrique, les figures construites suivant les grandeurs sans dimensions sont totalement les mêmes, et les équations qui décrivent ces figures sous une forme sans dimensions, sont identiques.

L'identité des équations sans dimensions ou l'identité de la description mathématique des figures semblables peut être envisagée comme la condition de similitude des figures géométriques.

La similitude des phénomènes physiques donne lieu à l'identité des champs des grandeurs physiques relatives sans dimensions construits suivant les coordonnées adimensionnelles et le temps. Les équations sans dimensions de ces champs s'avèrent aussi identiques. Pour les phénomènes semblables l'identité des équations sans dimensions des champs des grandeurs physiques ne peut avoir lieu que dans le cas de l'identité des descriptions mathématiques de ces phénomènes sous la forme sans dimensions, du fait que les équations des champs des grandeurs physiques sont, au fond, solution d'un système d'équations différentielles qui décrivent le phénomène en commun avec les conditions d'univalence.

Par conséquent, la condition de similitude des phénomènes physiques (tout comme la similitude géométrique) est traduite par l'identité des descriptions mathématiques des phénomènes semblables sous la forme adimensionnelle. La différence ne porte que sur le contenu de la description mathématique.

La description mathématique d'un phénomène physique est donnée par un système d'équations différentielles et des conditions d'univalence. Ainsi, la condition de similitude indiquée ci-dessus n'est-elle possible que lorsque, premièrement, les phénomènes envisagés se rapportent à la même classe et sont décrits par le même système d'équations différentielles, car ce n'est que dans ce cas que les équations des phénomènes peuvent être identiques sous une forme adimensionnelle; deuxièmement, lorsque les conditions d'univalence des phénomènes envisagés sont qualitativement les mêmes, c'est-à-dire contiennent les mêmes grandeurs physiques et les mêmes équations déterminent la distribution de ces grandeurs dans l'espace et le temps. Car ce n'est que dans ce cas que les conditions d'univalence de tous les phénomènes semblables contiennent des grandeurs physiques relatives numériquement égales et des équations sans dimensions identiques qui décrivent les champs des grandeurs correspondantes dans les conditions d'univalence. Cette condition inclut également la similitude géométrique des systèmes.

Maintenant il convient d'établir les conditions qui doivent être observées pour que les équations qui décrivent les phénomènes de même classe soient identiques. A cet effet examinons le processus de réduction des équations différentielles à la forme adimensionnelle.

Les équations différentielles qui déterminent l'échange de chaleur par convection sont en principe très simples, chacune d'elles représente l'ensemble des *effets physiques* qui traduisent la loi de la conservation de l'énergie ou de la masse. Par exemple, l'équation différentielle de la conductivité thermique est l'égalité entre la quantité de chaleur amenée à un élément du milieu et la variation de

l'enthalpie de cet élément: $dQ = di$. L'équation différentielle du mouvement exprime l'égalité entre toutes les forces appliquées à l'élément du milieu et la force d'inertie: $F_j = \Sigma F_i$. Par conséquent, chaque équation différentielle peut s'écrire sous la forme générale comme une somme algébrique des effets (des forces, des flux de chaleur, etc.)

$$D_1 + D_2 + D_3 + \ldots + D_n = 0. \qquad (V.3)$$

La composition d'une équation différentielle consiste à passer des notions physiques complexes que sont les effets aux grandeurs physiques simples (densités, températures, etc.), c'est-à-dire exprimer les effets physiques à l'aide des grandeurs physiques. Par exemple, la composition d'une équation différentielle de la conductivité thermique impose le passage de l'équation aux effets sous la forme $dQ = di$ à l'équation entre les grandeurs physiques sous la forme

$$Dt/d\tau = a\nabla^2 t.$$

De cette façon, chaque effet dans l'équation est une combinaison des grandeurs physiques primaires. Le processus est défini par l'ensemble des effets, et c'est pourquoi l'influence des grandeurs physiques isolées sur le processus se manifeste par l'influence sur toute la combinaison des grandeurs qui font l'effet. On peut en tirer déjà qu'il est avantageux d'explorer le processus à partir des combinaisons des grandeurs physiques qui sont caractéristiques.

Pour ramener l'équation différentielle (V.3) à la forme adimensionnelle on procède de la façon suivante. Après avoir divisé et multiplié chaque terme de l'équation par l'échelle de l'effet qu'il exprime, on peut le mettre sous la forme

$$D = \Pi d,$$

où D est le terme de l'équation où figure l'opérateur différentiel qui exprime un effet physique défini et qui a la dimension de l'effet; Π, l'échelle de l'effet représenté par le terme D. Cette échelle est la combinaison des grandeurs physiques d'échelle qui font l'effet. La combinaison a la dimension de l'effet. Il est avantageux de prendre les grandeurs physiques, qui font office des échelles, à partir des conditions d'univalence données par l'énoncé du problème; $d = D/\Pi$, le temps de l'équation qui exprime l'effet physique relatif sans dimensions. C'est le même terme D, seulement réduit aux grandeurs relatives sans dimensions.

Par conséquent, l'équation (V.3) peut se mettre sous la forme

$$\Pi_1 d_1 + \Pi_2 d_2 + \Pi_3 d_3 + \ldots + \Pi_n d_n = 0. \qquad (V.4)$$

Tous les termes de (V.4) se mesurant en mêmes unités, toutes les échelles des effets Π_1, Π_2, ... ont la même dimension. Donc, en di-

visant tous les termes de l'équation par l'une des échelles, par exemple Π_n, on peut obtenir une équation sous une forme adimensionnelle

$$\pi_{1n} d_1 + \pi_{2n} d_2 + \pi_{3n} d_3 + \ldots + d_n = 0, \qquad (V.5)$$

où $\pi_{1n} = \Pi_1/\Pi_n$, $\pi_{2n} = \Pi_2/\Pi_n$, ... sont des groupements sans dimensions des grandeurs physiques appelés *critères de similitude déterminants*.

Ces critères se composent des grandeurs qui figurent dans les conditions d'univalence. On peut donc les calculer en posant le problème sans le résoudre ou l'explorer expérimentalement. Les critères de similitude expriment le rapport des échelles de deux effets définis qui importent pour le phénomène. Le nombre de critères qui résultent d'une équation est d'une unité plus petit que le nombre de termes de l'équation.

Il est évident que l'équation sans dimensions (V.5) est valide seulement pour les processus qui se rapportent à la même classe, pour lesquels tous les critères figurant dans l'équation sans dimensions sont numériquement égaux. Par conséquent, pour que les équations qui décrivent les phénomènes de la même classe soient identiques sous une forme adimensionnelle il faut que les critères de similitude de même genre, propres à ces équations, soient numériquement égaux. C'est pourquoi *l'égalité des critères de même genre est la condition de similitude des phénomènes qui se rapportent à la même classe et qui présentent des conditions d'univalence semblables.*

Ainsi, pour que les phénomènes physiques soient semblables il faut

1) que les phénomènes soient de la même classe, c'est-à-dire de la même nature physique et soient décrits par le même système d'équations différentielles;

2) que les conditions d'univalence des phénomènes soient qualitativement identiques, c'est-à-dire contiennent les mêmes grandeurs physiques et les mêmes équations décrivent les champs des grandeurs correspondantes;

3) que les critères déterminants identiques des phénomènes soient numériquement égaux.

La réduction à la forme adimensionnelle fait que chaque équation différentielle du système décrivant le processus acquiert la forme de l'équation (V.5) où les grandeurs d_i contiennent les opérateurs différentiels sur les variables sans dimensions de la forme $\partial^2\overline{\varphi}/\partial\overline{\tau}^2$, $\partial\overline{\varphi}/\partial\overline{\tau}$, $\partial\overline{\varphi}/\partial\overline{x}$, etc.

Il est clair que la résolution du système composé d'équations de la forme (V.5) doit être une certaine fonction qui associe les valeurs de toutes les variables sans dimensions (dépendante $\overline{\varphi}$ et indépendantes $\overline{\tau}$, $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$), les critères de similitude, ainsi que les grandeurs sans dimensions données par les conditions d'univalence.

Les grandeurs physiques d'échelle étant prises pour la formation des grandeurs sans dimensions correspondantes à partir des conditions d'univalence, toutes les grandeurs sans dimensions des conditions d'univalence prises comme échelles valent l'unité. Dans la solution ne figureront que les rapports sans dimensions des grandeurs de même nature physique tirées des conditions d'univalence (dimensions, températures, etc.); par exemple, $P_l = l_1/l_0$; $P_t = T_1/T_0$. Ces rapports s'appellent *critères paramétriques*.

Par conséquent, la solution du système d'équations différentielles sans dimensions s'écrit

$$\bar{\varphi} = f_1(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \pi_1, \pi_2, \ldots, P_1, \ldots); \qquad \text{(V.6)}$$
$$\bar{\psi} = \psi_2(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \pi_1, \pi_2, \ldots, P_1, \ldots),$$

où $\bar{\varphi}, \bar{\psi}, \ldots$ sont les variables sans dimensions dépendantes (cherchées); $\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, les variables sans dimensions indépendantes (temps et coordonnées); $\pi_1, \pi_2, \ldots$, les critères de similitude déterminants donnés par les conditions d'univalence et constants pour le problème donné; P_1, P_2, les critères paramétriques donnés par les conditions d'univalence et constants pour un problème concret.

Les équations de la forme (V.6) s'appellent *équations de similitude critérielles*. Chaque équation de similitude décrit tous les phénomènes semblables entre eux. S'il n'est pas nécessaire de calculer la grandeur cherchée, par exemple, le coefficient de transmission de chaleur en chaque point de la surface et à chaque instant, et s'il suffit de connaître sa moyenne sur toute la surface et pendant toute la période de temps, alors l'équation de similitude ne comporte pas les valeurs des coordonnées sans dimensions $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ et du temps $\bar{\tau}$, et l'équation devient

$$\psi = f_3(\pi_1, \pi_2, \ldots, P_1, \ldots). \qquad \text{(V.7)}$$

Dans les cas particuliers, lorsque tels ou tels effets ne se manifestent pas dans le processus, certains critères contenant les échelles de ces effets peuvent être absents dans l'équation de similitude. Le phénomène est alors d'une allure *similaire* par rapport au modèle considéré. Dans les équations de similitude qui décrivent les processus de mêmes conditions d'univalence les critères paramétriques ne figurent pas. Par conséquent, la présence dans l'équation d'un critère paramétrique, par exemple du rapport des dimensions, témoigne au fond du fait que l'équation de similitude donnée rend compte d'une certaine absence de similitude géométrique des systèmes.

A ce qui vient d'être dit sur les critères de similitude il faut ajouter que la forme des critères définis par l'équation différentielle dépend de l'échelle de l'effet par laquelle on divise les termes de l'équation lorsqu'on la réduit à la forme sans dimensions. Toutefois,

les systèmes de critères obtenus à partir du même système d'équations et de mêmes conditions d'univalence sont équivalents. Toute combinaison des critères est encore un critère et peut remplacer dans l'équation de similitude l'un des critères qui figurent dans cette combinaison. Cette règle s'emploie pour éliminer du critère la grandeur ne figurant pas dans les conditions d'univalence. Ceci se fait en combinant deux critères qui contiennent cette grandeur. Le nombre de critères de similitude diminue alors, puisque le critère obtenu ne remplace qu'un des critères. En combinant une variable sans dimensions (argument ou fonction) avec un critère, on peut remplacer dans la variable sans dimensions la grandeur d'échelle non donnée par les conditions d'univalence par le groupement d'autres grandeurs d'échelle. La variable sans dimensions ainsi obtenue a la forme de critère, à cette différence près qu'elle contient une variable, alors qu'un critère de similitude ne se compose que de grandeurs constantes connues à partir de l'énoncé du problème. De telles variables qui ont la forme de critères de similitude ne peuvent pas être utilisées comme indices de similitude, du fait qu'elles ne peuvent pas être calculées avant l'obtention de la solution du problème. On les appelle donc *critères non déterminants.*

A titre de conclusion il est opportun de comparer la solution d'un système ordinaire (à dimensions) d'équations différentielles et des conditions d'univalence sous la forme

$$\alpha = f(\tau, x, y, z, q, c, \mu, \lambda, W, T, l, \ldots), \qquad (V.8)$$

où q, c, μ, . . . sont les grandeurs physiques qui figurent dans les conditions d'univalence, avec la solution d'un système d'équations différentielles et des conditions d'univalence sous une forme sans dimensions

$$\bar{\alpha} = f(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \pi_1 \pi_2, \ldots, P_1). \qquad (V.9)$$

En les comparant, on peut remarquer que les deux solutions déterminent sans ambiguïté la grandeur cherchée α. Pourtant, le nombre d'arguments de la deuxième solution est sensiblement plus petit que dans la première, du fait que les grandeurs présentes dans les conditions d'univalence y figurent sous la forme de groupements déterminant l'influence de l'ensemble des grandeurs physiques sur le processus. Lorsque le nombre d'arguments est plus petit, le traitement des résultats des expériences ou des solutions numériques et l'obtention de la relation nécessaire entre les grandeurs deviennent sensiblement plus simples. D'autre part, chaque solution partielle sous une forme sans dimensions, c'est-à-dire chaque valeur relative de la grandeur cherchée pour une valeur définie des critères déterminants, est vraie pour de nombreux cas semblables entre eux, du fait que la même valeur du critère peut s'obtenir à l'aide des valeurs numériques différentes des grandeurs physiques qui y font partie.

De la sorte, la forme de la représentation de la solution d'un système d'équations différentielles sous une forme adimensionnelle élaborée sur la base de la théorie de similitude permet, premièrement, de réduire le nombre d'arguments, et par là même simplifier le traitement des résultats de l'expérience et l'obtention de la relation entre les grandeurs, et deuxièmement, de généraliser les données d'une expérience ou d'une solution numérique unitaires en les appliquant aux nombreux cas similaires.

Les principes fondamentaux de la théorie de la similitude sont énoncés généralement sous la forme de trois théorèmes. Le premier affirme que *dans les phénomènes semblables tous les critères de similitude (déterminants et non déterminants) doivent être numériquement égaux.* Le deuxième théorème dit que *la résolution d'une équation différentielle peut être mise sous la forme d'une liaison entre les critères qui se déduisent de cette équation.* D'après le troisième théorème, *les phénomènes sont semblables si leurs conditions d'univalence sont identiques et les critères où figurent les grandeurs tirées des conditions d'univalence (critères déterminants) sont numériquement égaux.* Ces théorèmes traduisent les conditions de similitude et les particularités des phénomènes semblables examinés dans ce qui précède.

Il s'ensuit de l'exposé qui précède que la théorie de similitude ne donne pas la solution mais permet seulement de généraliser les données expérimentales en indiquant la forme sous laquelle ces données doivent être représentées. Par conséquent, la théorie de similitude est au fond une théorie empirique; sa valeur est donc particulièrement grande dans les domaines scientifiques dont la base est l'expérience ou la solution numérique. C'est justement à ce domaine que se rapporte également l'échange de chaleur par convection.

§ V.4. Critères de similitude et équations de similitude de l'échange de chaleur par convection

Pour établir la forme des critères de similitude il faut ramener le système d'équations différentielles de l'échange de chaleur par convection à la forme adimensionnelle. Pour l'écoulement d'un fluide incompressible à paramètres physiques constants ce système présente l'ensemble de

l'équation de l'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \quad \text{(V.10)}$$

l'équation du mouvement

$$\rho \frac{\partial w_x}{\partial \tau} + \rho \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) =$$

$$= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right);$$

$$\rho\frac{\partial w_y}{\partial\tau}+\rho\left(w_x\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_y}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+$$
$$+\mu\left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2}\right);$$
$$\rho\frac{\partial w_z}{\partial\tau}+\rho\left(w_x\frac{\partial w_z}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_z}{\partial y}+w_z\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)=$$
$$=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2}\right); \qquad (V.11)$$

l'équation de la continuité

$$\partial w_x/\partial x+\partial w_y/\partial y+\partial w_z/\partial z=0. \qquad (V.12)$$

Au système d'équations différentielles (V.10)-(V.12) s'ajoutent les conditions d'univalence. En particulier, la condition aux limites peut être donnée sous la forme

$$\frac{\alpha}{\lambda}\Delta T=-\left(\frac{dT}{dn}\right)_{n=0}. \qquad (V.13)$$

Cette égalité s'appelle parfois *équation d'échange de chaleur* du fait qu'elle inclut le coefficient de transmission de chaleur qui est la grandeur cherchée.

Dans ces équations on peut dégager trois formes de paramètres: variables indépendantes τ, x, y, z; variables dépendantes (grandeurs inconnues) α, T, w_x, w_y, w_z, p et les grandeurs constantes figurant dans les conditions d'univalence w_0, T_0, l_0, a, λ, ρ, etc.

Pour ramener les équations à la forme adimensionnelle, il faut choisir les échelles des grandeurs dépendantes et indépendantes. Le plus avantageux est d'adopter comme grandeurs d'échelle celles qui font partie des conditions d'univalence, données par l'énoncé du problème. Ensuite, il faut remplacer les valeurs absolues de toutes les variables par les grandeurs relatives sans dimensions en utilisant la définition de la grandeur sans dimensions et notamment

$$\bar{\varphi}=\varphi/\varphi_0,$$

où φ_0 est la valeur d'échelle de la grandeur physique φ. On en tire que la grandeur absolue φ peut être exprimée à l'aide d'une grandeur sans dimension $\bar{\varphi}$ et d'une grandeur d'échelle φ_0 sous la forme

$$\varphi=\varphi_0\bar{\varphi}. \qquad (V.14)$$

Etant donné que ces équations contiennent les dérivées premières et secondes des grandeurs variables, il faut obtenir également pour elles les expressions correspondantes. Ceci se fait en utilisant l'expres-

sion (V.14)] de la façon suivante

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial(\varphi_0\bar{\varphi})}{\partial(l_0\bar{x})}=\frac{\varphi_0}{l_0}\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial\bar{x}}\,; \qquad (V.15)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial(l_0\bar{x})}\left[\frac{\partial(\varphi_0\bar{\varphi})}{\partial(l_0\bar{x})}\right]=\frac{\varphi_0\partial^2\bar{\varphi}}{l_0^2\,\partial\bar{x}^2}. \qquad (V.16)$$

Chaque terme des équations contenant un opérateur différentiel exprime un effet physique défini et donne une expression mathématique de la détermination quantitative de cet effet, c'est-à-dire une *règle de calcul de l'effet* dans le cas le plus général, lorsque cet effet est variable. Il s'ensuit que la combinaison des grandeurs d'échelle constantes qui s'obtiennent devant l'opérateur différentiel en grandeurs relatives constitue l'échelle de l'effet. Cette combinaison exprime la *loi de formation des grandeurs physiques dans l'effet.*

La règle de calcul de l'effet et la loi de la formation des grandeurs dans ce dernier coïncident, c'est-à-dire lorsque l'effet est constant, leurs expressions mathématiques sont les mêmes. Par exemple, la règle de calcul de l'accélération est de la forme

$$a=\frac{dw}{d\tau}=\frac{d(dl/d\tau)}{d\tau}=\frac{d^2l}{d\tau^2}$$

Si l'accélération est constante, a = const, la règle de son calcul peut être mise sous la forme $a = w/\tau = l/\tau^2$. Cette expression est une combinaison des grandeurs physiques dans l'accélération, c'est-à-dire elle exprime la loi de formation des grandeurs physiques dans cette dernière.

En adoptant les échelles du coefficient de transmission de chaleur α_0, de la longueur l_0, de la vitesse w_0, du temps τ_0, de la température T_0 et de la pression p_0, et en profitant des expressions (V.14), (V.15) et (V.16), mettons l'équation d'échange de chaleur sous la forme

$$\bar{\alpha}\Delta\bar{T}\cdot\alpha_0T_0=-\frac{\lambda T_0}{l_0}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{n}}\right)_p.$$

En divisant cette équation par le groupement des grandeurs physiques d'échelle, qui expriment l'échelle du deuxième effet $\Pi_2 = \lambda T_0/l_0$, écrivons l'équation sous une forme adimensionnelle

$$\bar{\alpha}\pi_{12}=-\frac{1}{\Delta\bar{T}}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{n}}\right)_p, \qquad (V.17)$$

où π_{12} est le groupement sans dimensions des grandeurs d'échelle qui est le rapport des échelles des effets $\Pi_1 = \alpha_0T_0$ et $\Pi_2 = \lambda T_0/l_0$:

$$\pi_{12} = \Pi_1/\Pi_2 = \alpha_0l_0/\lambda.$$

Dans les cas courants, les conditions d'univalence ne contiennent pas la grandeur du coefficient de transmission de chaleur α_0; il faut donc transformer la grandeur relative $\bar{\alpha}$ et π_{12}. La valeur d'échelle du coefficient de transmission de chaleur α_0 dans la grandeur $\bar{\alpha}$ doit être remplacée par le groupement des grandeurs tirées des conditions d'univalence. L'expression du critère π_{12} montre qu'un tel groupement est constitué par le rapport λ/l_0. Par conséquent, le produit $\bar{\alpha}\pi_{12} = (\alpha/\alpha_0)(\alpha_0 l_0/\lambda) = \alpha l_0/\lambda$ de l'équation (V.17) est une grandeur relative du coefficient de transmission de chaleur inconnu. Ce groupement est un critère non déterminant et porte le nom de *nombre de Nüsselt*:

$$\mathrm{Nu} = \alpha l_0/\lambda \tag{V.18}$$

Le nombre de Nüsselt caractérise le rapport entre le transfert convectif de la chaleur depuis le fluide à la surface du corps (q_p) *et le transfert de chaleur par conduction à travers la couche du fluide d'une épaisseur* l_0 ($q_{p\lambda}$). En effet, l'équation (V.18) entraîne que

$$\mathrm{Nu} = \frac{q_p}{\Delta T}\frac{l_0}{\lambda} = \frac{q_p}{q_{p\lambda}}. \tag{V.19}$$

D'ordinaire, dans les problèmes d'échange de chaleur par convection le nombre de Nüsselt s'assimile au *nombre de Biot* ($\mathrm{Bi} = \alpha l_0/\lambda_M$); pourtant, à la différence de ce dernier, il contient le coefficient de conductivité du fluide et a un autre sens physique.

De la sorte, l'équation sans dimensions de l'échange de chaleur peut s'écrire finalement

$$\mathrm{Nu} = -\frac{1}{\Delta\bar{T}}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{n}}\right)_p. \tag{V.20}$$

Compte tenu des expressions (V.14), (V.15) et (V.16) l'équation de l'énergie se ramène à la forme

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{\tau}}\frac{T_0}{\tau_0} + \left(\bar{w}_x\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}} + \bar{w}_y\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}} + \bar{w}_z\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{z}}\right)\frac{w_0 T_0}{l_0} = \left(\frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{z}^2}\right)\frac{aT_0}{l_0^2}. \tag{V.21}$$

En divisant les termes de l'équation par le groupement des grandeurs qui exprime l'échelle de l'effet et qui est le troisième terme de $\Pi_3 = aT_0/l_0^2$, écrivons l'équation envisagée sous la forme adimensionnelle

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{\tau}}\pi_{13} + \left(\bar{w}_x\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}} + \bar{w}_y\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}} + \bar{w}_z\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{z}}\right)\pi_{23} = \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{z}^2}, \tag{V.22}$$

où $\pi_{13} = \Pi_1/\Pi_3 = l_0^2/(a\tau_0)$ et $\pi_{23} = \Pi_2/\Pi_3 = w_0 l_0/a$ sont les critères de similitude.

Il est d'usage de noter les nombres caractéristiques par deux premières lettres du nom des savants qui ont exercé une influence notable sur le développement de la branche scientifique donnée, et de les dénommer de la façon correspondante.

Dans la pratique, les critères qui ressortent de (V.22) sont utilisés généralement sous la forme de *nombres de Fourier* et *de Peclet. Le nombre de Fourier*

$$\mathrm{Fo} = 1/\pi_{13} = a\tau_0/l_0^2 \qquad \text{(V.23)}$$

exprime le rapport entre le rythme de variation des conditions dans le milieu ambiant et le rythme de la reconstruction du champ thermique à l'intérieur du corps.

Le nombre de Peclet

$$\mathrm{Pe} = \pi_{23} = w_0 l_0/a \qquad \text{(V.24)}$$

exprime le rapport entre l'intensité du transfert de chaleur par convection et son intensité de transfert par conduction thermique.

Compte tenu des expressions (V.14), (V.15) et (V.16), l'équation du mouvement par rapport à l'axe des x s'écrit

$$\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{\tau}} \frac{\rho w_0}{\tau_0} + \left(\overline{w}_x \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{x}} + \overline{w}_y \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{y}} + \overline{w}_z \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{z}} \right) \frac{\rho w_0^2}{l_0} =$$

$$= \rho g - \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} \frac{p_0}{l_0} + \mu \left(\frac{\partial^2 \overline{w}_x}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}_x}{\partial \overline{y}^2} + \frac{\partial^2 \overline{w}_x}{\partial \overline{z}^2} \right) \frac{\mu w_0}{l_0^2}.$$

En divisant le groupement des grandeurs affectées au deuxième terme de l'équation, exprimant l'échelle de la force d'inertie $\Pi_2 = \frac{\rho w_0^2}{l_0}$, on obtient l'équation sous une forme adimensionnelle

$$\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{\tau}} \pi_{12} + \overline{w}_x \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{x}} + \overline{w}_y \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{y}} + \overline{w}_z \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial \overline{z}} = \pi_{32} - \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} \pi_{42} + \nabla^2 \overline{w}_x \pi_{52}, \qquad \text{(V.25)}$$

où $\pi_{12} = \Pi_1/\Pi_2 = l_0/(\tau_0 w_0)$, $\pi_{32} = \Pi_3/\Pi_2 = g l_0/w_0^2$, $\pi_{42} = \Pi_4/\Pi_2 = p_0/(\rho w_0^2)$, $\pi_{52} = \Pi_5/\Pi_2 = \nu/(w_0 l_0)$ sont les critères de similitude.

En pratique on utilise les critères ou nombres caractéristiques suivants qui se déduisent de l'équation du mouvement. Le *nombre d'homochronisme*

$$\mathrm{Ho} = 1/\pi_{12} = w_0 \tau_0/l_0 \qquad \text{(V.26)}$$

qui exprime la mesure du rapport de l'accélération de transfert (par convection) à l'accélération en point donné.

Le nombre de Froude

$$\mathrm{Fr} = \pi_{32} = gl_0/w_0^2 \qquad (V.27)$$

exprime le rapport dans le phénomène envisagé entre la pesanteur et la force d'inertie, ce qui s'ensuit de l'équation (V.27) si on la met sous la forme $\mathrm{Fr} = \rho gl_0/(\rho w_0^2)$. Sa valeur devient importante dans le cas où les effets gravifiques jouent un rôle notable. Dans des cas isolés, les effets conditionnés par la force de pesanteur sont si petits qu'on peut les négliger. Ordinairement, la pression p_0 ne figure pas dans les conditions d'univalence. C'est pourquoi dans la pression relative $\bar{p}$ l'échelle de la pression doit être remplacée par le groupement des grandeurs tirées des conditions d'univalence. L'expression du critère $\pi_{42} = p_0/(\rho w_0^2)$ montre que la combinaison des grandeurs ρw_0^2 a la dimension de la pression et peut remplacer l'échelle dans la pression sans dimensions. Par conséquent, le produit

$$\bar{p}\pi_{42} = (p/p_0)p_0/(\rho w_0^2) = p/(\rho w_0^2) \qquad (V.28)$$

est une pression relative inconnue d'après la condition. Ce groupement est un critère non déterminant.

Dans la plupart des problèmes techniques il faut connaître non pas la valeur absolue de la pression, mais la différence des pressions en deux points du système. Le groupement qui traduit la différence sans dimensions des pressions s'appelle *nombre d'Euler* non déterminant

$$\mathrm{Eu} = \Delta p/(\rho w_0^2) \qquad (V.29)$$

qui exprime le rapport entre la force de pression et la force d'inertie dans le phénomène considéré.

Le dernier critère qui se déduit de l'équation du mouvement s'emploie sous la forme du *nombre de Reynolds*

$$\mathrm{Re} = 1/\pi_{52} = w_0l_0/\nu \qquad (V.30)$$

qui exprime la relation entre la force d'inertie et la force de frottement interne; on l'établit sans peine en écrivant le nombre de Reynolds sous la forme

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_0 w_0^2}{\mu w_0/l_0}. \qquad (V.31)$$

Plus le nombre de Reynolds est petit, plus l'influence exercée sur les caractéristiques hydrodynamiques du flux par les forces moléculaires est forte, plus l'écoulement laminaire visqueux d'un fluide est stable. Lorsque l'écoulement laminaire d'un fluide devient turbulent, le nombre de Reynolds atteint une valeur critique. Comme nous le montrerons par la suite, l'intensité d'échange de chaleur par convection dépend sensiblement du régime d'écoulement du fluide; aussi,

le nombre de Reynolds est-il l'un des critères déterminants principaux de la théorie des échanges de chaleur.

Les équations du mouvement par rapport aux axes des x et des y se ramènent à la forme sans dimensions de la même façon et, comme on l'établit sans peine, donnent le même système de critères.

En appliquant les expressions (V.14), (V.15) et (V.16), écrivons l'équation de continuité comme suit

$$(\partial\bar{w}_x/\partial\bar{x} + \partial\bar{w}_y/\partial\bar{y} + \partial\bar{w}_z/\partial\bar{z})\, w_0/l_0 = 0.$$

Le rapport w_0/l_0 n'étant pas nul, il vient

$$\partial\bar{w}_x/\partial\bar{x} + \partial\bar{w}_y/\partial\bar{y} + \partial\bar{w}_z/\partial\bar{z} = 0. \qquad \text{(V.32)}$$

On voit donc que l'équation de continuité sans dimensions du fluide incompressible (ρ = const) ne contient pas de critères de similitude.

En utilisant les notations des critères, on peut écrire le système d'équations différentielles sans dimensions de l'échange de chaleur par convection

$$\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{\tau}}\frac{1}{\mathrm{Fo}} + \left(\bar{w}_x\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}} + \bar{w}_y\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{y}} + \bar{w}_z\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{z}}\right)\mathrm{Pe} = \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{y}^2} + \frac{\partial^2\bar{T}}{\partial\bar{z}^2}; \qquad \text{(V.33)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar{w}_x}{\partial\bar{\tau}}\frac{1}{\mathrm{Ho}} + \bar{w}_x\frac{\partial\bar{w}_x}{\partial\bar{x}} + \bar{w}_y\frac{\partial\bar{w}_x}{\partial\bar{y}} + \bar{w}_z\frac{\partial\bar{w}_x}{\partial\bar{z}} = \\
&\qquad = \mathrm{Fr} - \frac{\partial}{\partial\bar{x}}\mathrm{Eu} + \nabla^2\bar{w}_x\frac{1}{\mathrm{Re}}; \\
&\frac{\partial\bar{w}_y}{\partial\bar{\tau}}\frac{1}{\mathrm{Ho}} + \bar{w}_x\frac{\partial\bar{w}_y}{\partial\bar{x}} + \bar{w}_y\frac{\partial\bar{w}_y}{\partial\bar{y}} + \bar{w}_z\frac{\partial\bar{w}_y}{\partial\bar{z}} = \\
&\qquad = \mathrm{Fr} - \frac{\partial}{\partial\bar{y}}\mathrm{Eu} + \nabla^2\bar{w}_y\frac{1}{\mathrm{Re}}; \\
&\frac{\partial\bar{w}_z}{\partial\bar{\tau}}\frac{1}{\mathrm{Ho}} + \bar{w}_x\frac{\partial\bar{w}_z}{\partial\bar{x}} + \bar{w}_y\frac{\partial\bar{w}_z}{\partial\bar{y}} + \bar{w}_z\frac{\partial\bar{w}_z}{\partial\bar{z}} = \\
&\qquad = \mathrm{Fr} - \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\mathrm{Eu} + \nabla^2\bar{w}_z\frac{1}{\mathrm{Re}}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(V.34)}$$

$$\partial\bar{w}_x/\partial\bar{x} + \partial\bar{w}_y/\partial\bar{y} + \partial\bar{w}_z/\partial\bar{z} = 0 \qquad \text{(V.35)}$$

et l'équation d'échange de chaleur

$$\mathrm{Nu} = -\frac{1}{\Delta\bar{T}}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{n}}\right)_n. \qquad \text{(V.36)}$$

Examinons encore quelques critères ou nombres caractéristiques qui s'emploient pour résoudre les problèmes relatifs à l'échange de chaleur par convection. Dans l'analyse de l'écoulement libre du fluide, il est généralement impossible de choisir à l'avance en guise d'échelle une vitesse quelconque du fait qu'elle ne figure pas dans les conditions d'univalence. De la sorte, dans ces conditions, les nombres de Reynolds et de Froude ne peuvent pas être déterminés. Pourtant, en combinant ces deux critères, on peut obtenir un nouveau critère ne comportant pas de vitesse

$$\mathrm{Re}^2 \cdot \mathrm{Fr} = gl^3/\nu^2 = \mathrm{Ga}, \qquad (V.37)$$

qu'il est d'usage de nommer *nombre de Galilée*: *il caractérise le rapport entre les forces massiques et la viscosité.*

Si on envisage le cas du mouvement libre défini par l'hétérogénéité du champ de la densité, il faut ajouter au système de critères le critère du type paramétrique $\Delta\rho/\rho$. La combinaison du nombre Ga et de $\Delta\rho/\rho$ donne encore un nombre caractéristique appelé *nombre d'Archimède*

$$\mathrm{Ar} = \frac{gl^3}{\nu^2}\,\frac{\Delta\rho}{\rho}, \qquad (V.38)$$

qui détermine le rapport des forces ascendantes à la viscosité.

Si la différence des densités du fluide est déterminée par celle des températures ΔT, le simplexe $\Delta\rho/\rho$ peut être représenté à l'aide du *coefficient de dilatation volumique du fluide*

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p,$$

en le posant constant dans l'intervalle de températures donné, sous la forme

$$\Delta\rho/\rho = \beta\Delta T.$$

De la sorte, le nombre d'Archimède s'écrit

$$\mathrm{Gr} = gl^3\beta\Delta T/\nu^2 \qquad (V.39)$$

et s'appelle le *nombre de Grashof*. Pour les gaz qui vérifient l'équation des gaz parfaits $pv = RT$, le coefficient de dilatation thermique s'exprime sous la forme $\beta = 1/T$ et le nombre de Grashof devient

$$\mathrm{Gr} = g\Delta T l^3/(\nu^2 T_m),$$

où

$$T_m = (T_p + T_f)/2.$$

Le rapport entre le nombre de Peclet et le nombre de Reynolds se nomme *nombre de Prandtl*

$$\mathrm{Pr} = \mathrm{Pe}/\mathrm{Re} = \nu/a = \mu c_p/\lambda. \qquad (V.40)$$

11—01289

Nous montrerons au chapitre VI que le nombre de Prandtl est associé à l'épaisseur de la couche limite dynamique et thermique par le quotient $\delta/\delta_t = \sqrt{Pr}$. Dans le nombre de Prandtl *figurent seulement les paramètres physiques du milieu*; c'est donc un paramètre physique sans dimensions. Pour les gaz, il ne dépend pratiquement ni de la température, ni de la pression, sa valeur est déterminée par l'atomicité du gaz, elle est proche de l'unité : pour les gaz monoatomiques Pr = 0,67 ; biatomiques, Pr = 0,72 ; triatomiques, Pr = 0,8 ; multiatomiques, Pr = 1,0.

Pour les fluides aqueux, la valeur du nombre de Prandtl est supérieure à l'unité, et dans le cas des fluides très visqueux il peut

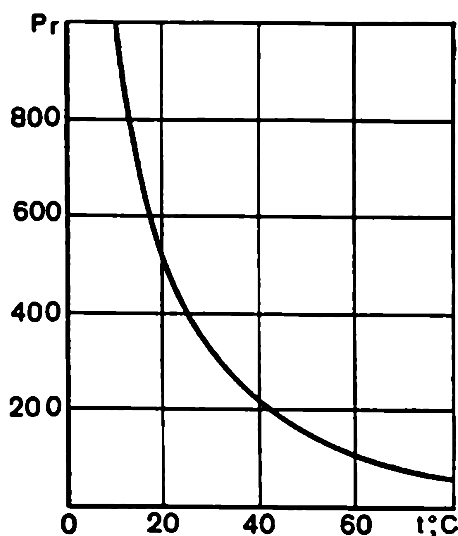


Fig. V.3. Relation entre le nombre de Prandtl et la température de l'huile de transformateur

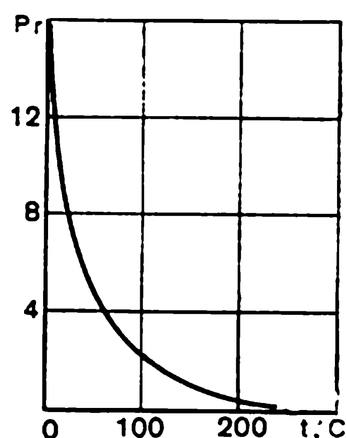


Fig. V.4. Relation entre le nombre de Prandtl et la température de l'eau (suivant la ligne de saturation)

prendre de très grandes valeurs (jusqu'à 10^3 et plus), l'exception n'étant faite que pour les métaux liquides caractérisés par de très petits nombres de Prandtl (d'ordre de 10^{-2} à 10^{-3}).

Le nombre de Prandtl des fluides aqueux dépend fortement de la température, en diminuant, généralement, avec la croissance de cette dernière (fig. V.3).

Aux températures variant de 0 à 180 °C le Prandtl de l'eau (fig. V.4) varie sensiblement avec la montée de la température (de 13,7 à 1), ce qui est dû à la diminution de la viscosité et à la croissance de la conductivité thermique dans cette marge de températures. De 130 à 310 °C pour l'eau les valeurs de Pr changent peu et sont proches de l'unité. Aux pressions voisines des valeurs critiques l'allure de la dépendance entre Pr et la température varie brusquement.

Il arrive qu'au lieu du nombre de Nüsselt non déterminant on utilise le *nombre de Stanton* qui est la combinaison des nombres Nu, Re et Pr sous la forme

$$\mathrm{St} = \mathrm{Nu}/(\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}) = \alpha a/(\lambda w_0) = \alpha/(c\rho w_0). \qquad (V.41)$$

La formule (V.41) entraîne que

$$\mathrm{St} = \frac{q_p}{c_p \rho w_0 (T_f - T_p)}.$$

Par conséquent, le nombre de Stanton est *le rapport entre le flux thermique vers la paroi et le flux convectif tel qu'il puisse être transféré par le courant du fluide lors de la diminution de la température de* T_f *à* T_p.

Pour l'étude de l'échange thermique aux grandes vitesses ($w_0 > a/4$), il faut tenir compte de la compressibilité du milieu. Dans ce cas on peut obtenir par la méthode de similitude à partir du système d'équations un critère supplémentaire où figure le *nombre de Mach* $M = w_0/a$ et le rapport des chaleurs spécifiques $k = c_p/c_v$. Le nombre de Mach est le rapport de la vitesse du flux à la vitesse du son; *il caractérise la compressibilité du milieu.*

Le système d'équations différentielles sans dimensions de l'échange de chaleur par convection comporte deux groupes de variables, les variables indépendantes $\bar{\tau}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, et les variables dépendantes Nu, $\bar{T}$, $\bar{w}_x$, $\bar{w}_y$, $\bar{w}_z$, Eu. Les variables dépendantes sont définies sans ambiguïté par les valeurs des variables indépendantes, pour des valeurs définies des nombres de similitude déterminants Re, Pr, Fr, Gr, Fo, Ho dont peuvent également faire partie les critères paramétriques P.

Par conséquent, les équations de similitude peuvent être mises sous la forme

$$\mathrm{Nu} = f_1(\bar{\tau}, \bar{x}_F, \bar{y}_F, \bar{z}_F, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Fo}, \mathrm{Ho}, P);$$
$$\bar{T} = f_2(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Fo}, \mathrm{Ho}, P);$$
$$\bar{w}_x = f_3(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Fo}, \mathrm{Ho}, P);$$
$$\bar{w}_y = f_4(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Fo}, \mathrm{Ho}, P);$$
$$\bar{w}_z = f_5(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Fo}, \mathrm{Ho}, P);$$
$$\mathrm{Eu} = f_6(\bar{\tau}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \mathrm{Re}, \mathrm{Pr}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Fo}, \mathrm{Ho}, P). \qquad (V.42)$$

Dans des cas particuliers, certaines grandeurs (variables ou nombres caractéristiques) peuvent ne pas figurer dans les équations de similitude. Il arrive, lorsqu'il importe de connaître la valeur moyenne du coefficient de transmission de chaleur suivant toute la surface et pendant toute la durée du processus, que dans l'équation de similitude ne figurent pas les valeurs des coordonnées de la surface $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$

et le temps $\bar{\tau}$. Si les échelles du temps τ_0 de la variation des champs thermique et de la vitesse sont les mêmes, au lieu du nombre de Fourier et d'homochronisme les équations ne possèdent que l'un d'entre eux.

Dans l'analyse du processus stationnaire les nombres Fo et Ho ne figurent pas. Lorsque la pesanteur est négligeable par rapport à la force d'inertie, le nombre de Froude ne figure plus parmi les critères déterminants.

Dans la plupart des cas du mouvement turbulent forcé on peut négliger l'influence de la convection libre et parmi les critères déterminants ne figure pas le Grashof. Lorsque le mouvement du fluide est libre, les critères déterminants ne sont que les nombres de Grashof et de Prandtl.

Ainsi, pour les cas stationnaires les plus caractéristiques d'échange de chaleur par convection, les équations de similitude du coefficient d'échange de chaleur sont de la forme:

écoulement forcé $\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$;

convection libre $\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Gr}, \mathrm{Pr})$;

convection libre avec écoulement forcé superposé $\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}, \mathrm{Gr}, \mathrm{Pr})$.

Pour le cas des gaz de même atomicité pour lesquels le nombre Pr est le même et constant, les équations de similitude ne contiennent pas ce critère.

Lors de l'examen d'un processus d'échange de chaleur par convection plus compliqué, par exemple, de l'échange de chaleur s'accompagnant de changement d'état, de l'écoulement du gaz à des vitesses supersoniques, de l'échange de chaleur à une surface perméable, le système de critères obtenu dans ce qui précède doit être complété par de nouveaux critères qui traduisent les particularités du processus envisagé.

§ V.5. Méthode d'analyse des dimensions

La prémisse nécessaire de la théorie de similitude est l'existence de la description mathématique du phénomène envisagé sous la forme d'équations différentielles et des conditions d'univalence, qui sont à la base de la recherche de la forme générale de l'équation de similitude. Pourtant, dans plusieurs cas le phénomène étudié peut être si compliqué qu'il est impossible de composer pour lui un système d'équations différentielles fermé.

La forme des critères de similitude importants pour le phénomène étudié, et la forme générale de l'équation de similitude peuvent également être choisies sans composer les équations différentielles. Ceci peut se faire à l'aide de la méthode de l'analyse des dimensions. Dans ce cas il faut avoir à sa disposition la liste complète des gran-

deurs physiques qui importent pour le phénomène envisagé, c'est-à-dire les grandeurs qui feraient partie des équations différentielles et des conditions d'univalence si la description mathématique du processus était connue. Cette liste peut être composée sur la base des considérations physiques et de l'expérience accumulée.

Les grandeurs dont la valeur numérique dépend du système d'unités de mesure sont dites *à dimensions*. La longueur, la vitesse, la force, le temps, l'énergie, la température, etc. peuvent en servir d'exemple. Les grandeurs dont la valeur numérique ne dépend pas du système d'unités de mesure appliqué sont dites *sans dimensions*. Cette division des grandeurs est conventionnelle. Par exemple, l'accélération est envisagée généralement comme une grandeur à dimensions, dont la dimension est la longueur divisée par le temps à la puissance deux. Si l'on adopte l'accélération de la chute libre (9,81 m/s^2) comme unité de mesure, alors toute accélération sera mesurée par le rapport de sa valeur à la valeur de l'accélération de la chute libre, et ne changera pas en passant de certaines unités de mesure à d'autres. Ce rapport se nomme *surcharge*, c'est une grandeur sans dimensions.

La dépendance de l'unité de mesure d'une grandeur dérivée par rapport à l'unité de mesure des grandeurs principales peut être mise sous la forme de *la formule de dimension* ou *dimension* tout court. Dans les différents systèmes d'unités de mesure, la formule de dimension de la même grandeur peut prendre des formes différentes.

Par *dimension* d'une grandeur physique il convient d'entendre l'expression qui traduit la relation entre la grandeur envisagée et les grandeurs principales du système, si le coefficient de proportionnalité dans cette expression est égal à l'unité adimensionnelle.

L'expérience montre que la plupart des dimensions peuvent être exprimées à l'aide de grandeurs principales. Les dimensions qui d'après les équations de physique définies s'expriment à l'aide des grandeurs principales se nomment grandeurs dérivées. Dans la théorie des échanges de chaleur on adopte, généralement, comme grandeurs principales la longueur (dimension L), la température (dimension Θ), le temps (dimension T) et la masse (dimension M). Ces dernières permettent d'exprimer toutes les autres dimensions.

Le principe fondamental mis à profit par la méthode d'analyse des dimensions dans la recherche du nombre et de la forme des critères de similitude est l'axiome suivant lequel l'addition et la soustraction ne peuvent être appliquées qu'aux grandeurs qui ont la même dimension, ainsi que cette circonstance que certaines dimensions s'expriment à travers les autres sous la forme de produit de leurs puissances correspondantes. Ceci permet d'établir que si l'une quelconque grandeur physique X est cherchée comme fonction d'autres grandeurs A, B, C, . . ., cette relation peut être mise sous la forme du produit de ces dimensions portées à certaines puissances a, b,

c, ..., c'est-à-dire

$$N = f(A, B, C, D, \dots) = kA^aB^bC^cD^d. \qquad (V.43)$$

où k est une constante.

Dans ce cas, en écrivant chacune des dimensions (A, B, C, D. . . .) à l'aide des dimensions des grandeurs principales on peut établir les valeurs correspondantes des puissances a, b, c, d, . . . et assurer l'identité des dimensions des premier et deuxième membres de l'équation. A cet effet dans l'équation des dimensions obtenue la puissance de la dimension définie du premier membre de l'équation doit être égale à la somme des puissances de la dimension correspondante du deuxième membre. Cette circonstance rend possible l'association des grandeurs physiques en groupements sans dimensions ou critères de similitude, ou encore nombres caractéristiques. Il s'avère alors qu'entre le nombre de grandeurs physiques et le nombre de groupements sans dimensions obtenu il existe une relation définie établie par le théorème π.

La méthode d'obtention du critère de similitude et le contenu du théorème π peuvent être illustrés de la façon suivante, En exprimant chacune des dimensions de l'équation (V.43) à travers les dimensions L, T, Θ, M on peut écrire

$$[N] = L^{n_0}\, T^{m_0}\, \Theta^{k_0}\, M^{r_0}; \quad [A] = L^{n_1}\, T^{m_1}\, \Theta^{k_1}\, M^{r_1};$$
$$[B] = L^{n_2}\, T^{m_2}\, \Theta^{k_2}\, M^{r_2}; \quad [C] = L^{n_3}\, T^{m_3}\, \Theta^{k_3}\, M^{r_3};$$
$$[D] = L^{n_4}\, T^{m_4}\, \Theta^{k_4}\, M^{r_4},$$

où n, m, k, r sont les puissances des dimensions correspondantes des grandeurs principales à l'aide desquelles sont exprimées les dimensions N, A, B, C, D. En portant les expressions obtenues dans l'équation (V.43), on peut la mettre sous la forme

$$L^{n_0}\, T^{m_0}\, \Theta^{k_0}\, M^{r_0} = K\,(L^{n_1}\, T^{m_1}\, \Theta^{k_1}\, M^{r_1})^a \times$$
$$\times (L^{n_2}\, T^{m_2}\, \Theta^{k_2}\, M^{r_2})^b\, (L^{n_3}\, T^{m_3}\, \Theta^{k_3}\, M^{r_3})^c \times$$
$$\times (L^{n_4}\, T^{m_4}\, \Theta^{k_4}\, M^{r_4})^d. \qquad (V.44)$$

En vertu de l'égalité des exposants des dimensions correspondantes des premier et deuxième membres de l'équation, on peut composer le système suivant d'équations des puissances

$$\begin{aligned} n_0 &= an_1 + bn_2 + cn_3 + dn_4 + \dots \\ m_0 &= am_1 + bm_2 + cm_3 + dm_4 + \dots \\ k_0 &= ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4 + \dots \\ r_0 &= ar_1 + br_2 + cr_3 + dr_4 + \dots \end{aligned} \qquad (V.45)$$

On voit sans peine que le nombre d'équations des puissances est égal au nombre de grandeurs principales m. Le nombre de puissances

inconnues du système a, b, c, d, . . . est égal au nombre de termes du deuxième membre de l'équation et, par suite, il est d'une unité inférieur au nombre total de toutes les grandeurs physiques qui importent pour le phénomène n, c'est-à-dire est égal à $n - 1$. Puisque dans le cas général $n - 1 > m$, le nombre des inconnues dans le système d'équations donné s'avère plus grand que le nombre d'équations; donc, $n - m - 1$ pussances ne peuvent pas être calculées d'après ce système d'équations. Pourtant, le système (V.45) permet d'exprimer un nombre défini de puissances égal au nombre d'équations à l'aide des autres $n - m - 1$ puissances qui ne peuvent pas être calculées.

Après avoir porté dans (V.43) toutes les puissances exprimées par des puissances indéterminables, on obtient une équation où toutes les dimensions sont soit au premier degré, soit aux degrés par lesquels ont été exprimées les autres puissances. Les grandeurs physiques qui se sont avérées au premier degré, parmi lesquelles figurera évidemment la grandeur N cherchée, forment dans le premier membre de l'équation un critère non déterminant. Les autres grandeurs physiques de mêmes puissances peuvent former des groupements sans dimensions ou critères de similitude déterminants du deuxième membre de l'équation.

Le nombre de critères déterminants est, évidemment, égal au nombre de puissances inconnues $n - m - 1$. Le nombre total de critères, dont l'un est non déterminant, est d'une unité plus grand que le nombre de degrés déterminants $n - m$.

Le résultat obtenu définit l'énoncé du théorème π qui affirme que *le nombre de groupements sans dimensions caractéristiques du processus est égal au nombre de toutes les grandeurs physiques qui importent pour le processus, moins le nombre de dimensions principales* $n - m$. La valeur nulle ou négative de la différence $n - m$ signifie que l'ensemble des grandeurs physiques envisagé ne peut être ramené à la forme sans dimensions. Cet ensemble des grandeurs ne satisfait pas aux conditions de l'analyse des dimensions. Certaines grandeurs y sont absentes, celles notamment qui permettraient de ramener le système à la forme sans dimensions. Les systèmes de ce type sont dits *incomplets*. En composant le système de paramètres déterminants il faut toujours vérifier le système à la complétude.

Pour $n - m = 1$, l'équation de similitude comporte seulement un seul critère non déterminant qui, comme il est clair, est une grandeur constante. La condition $n - m = 1$ présente un intérêt incontestable du fait qu'elle ramène la résolution du problème envisagé à la recherche d'un seul facteur constant.

A titre d'exemple, examinons le problème de l'écoulement d'un fluide sur un déversoir (fig. V.5) [31].

L'écoulement stabilisé d'un fluide sur le déversoir considéré est complètement déterminé par les paramètres ρ, g, h. Le débit du flui-

de G par unité de temps peut seulement être fonction de ces paramètres. En retenant comme dimensions principales L, T, M (longueur, temps, masse) on obtient $n - m = 1$. De la sorte, dans les conditions considérées, en vertu du théorème π il doit y avoir un seul critère sans dimensions où figure le débit G cherché du fluide.

Fig. V.5. Ecoulement d'un liquide lourd par le déversoir

La seule combinaison sans dimensions formée à partir des grandeurs de départ est

$$\frac{G}{\rho g^{3/2} h^{5/2}} = c, \qquad \text{(V.46)}$$

la valeur du critère c s'établit par expérience.

Dans le cas où

$$n - m = 2 \qquad \text{(V.47)}$$

l'équation de similitude sans dimensions contient seulement deux critères sans dimensions, π_1 et π_2, c'est-à-dire

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0. \qquad \text{(V.48)}$$

Donc,

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2). \qquad \text{(V.49)}$$

Si $n - m = 3$, l'équation de similitude sans dimensions contient trois critères, etc.

A titre d'exemple, considérons l'obtention de la forme de l'équation de similitude pour la détermination du coefficient de transmission de chaleur dans le cas du mouvement forcé du fluide dans un tube. Conformément aux idées physiques générales, admettons que le coefficient de transmission de chaleur α dépend du diamètre du tube D, de la vitesse du flux w, de la densité ρ, de la viscosité μ, de la conductivité thermique λ et de la chaleur spécifique c du fluide, c'est-à-dire

$$\alpha = f(D, w, \rho, \mu, \lambda, c). \qquad \text{(V.50)}$$

De cette façon, le nombre total de grandeurs physiques $n = 7$. Pour l'analyse des dimensions cette relation peut s'écrire

$$\alpha = KD^a w^b \rho^c \mu^d \lambda^e c^f. \qquad \text{(V.51)}$$

Toutes les dimensions des grandeurs figurant dans l'équation peuvent être exprimées à l'aide des dimensions des grandeurs prin-

cipales L, T, Θ, M sous la forme

$$[\alpha] = MT^{-3}\Theta^{-1}; \quad [\lambda] = LMT^{-3}\Theta^{-1}; \quad [c] = L^2T^{-2}\Theta^{-1};$$
$$[w_0] = LT^{-1}; [\rho] = ML^{-3}; \quad [D] = L; \quad [\mu] = MT^{-1}L^{-1}.$$

En portant ces expressions dans (V.51) on obtient l'équation des dimensions sous la forme

$$MT^{-3}\Theta^{-1} = KL^a (LT^{-1})^b (MT^{-1}L^{-1})^d (ML^{-3})^c \times$$
$$\times (MLT^{-3}\Theta^{-1})^e (L^2T^{-2}\Theta^{-1})^f. \qquad (V.52)$$

La condition d'égalité des puissances affectées aux dimensions correspondantes des premier et deuxième membres de l'équation fait qu'on peut écrire pour les exposants le système d'équations suivant

$$\text{pour L}: \quad 0 = a + b - 3c - d + e + 2f; \qquad (V.53)$$
$$\text{pour T}: -3 = -b - d - 3e - 2f; \qquad (V.54)$$
$$\text{pour M}: \quad 1 = c + d + e; \qquad (V.55)$$
$$\text{pour } \Theta: -1 = -e - f. \qquad (V.56)$$

Ce système, composé de quatre équations ($m = 4$), comporte six puissances inconnues ($n - 1 = 6$). Par conséquent, deux puissances ne peuvent pas être déterminées ($n - m - 1 = 2$). En adoptant comme puissances indéterminables c et f, on peut les utiliser pour exprimer les autres (a, b, d, e) de la façon suivante:

on tire de (V.56): $e = 1 - f$;

en portant la grandeur e dans (V.55) on a: $d = f - c$;

en portant e et d dans (V.54) on a: $b = c$;

et, enfin, en portant les valeurs de b, d, e dans (V.53) on obtient: $a = c - 1$.

En portant les puissances correspondantes dans l'équation (V.51), on obtient l'expression du coefficient de transmission de chaleur sous la forme

$$\alpha = K \frac{D^c}{D} w^c \rho^c \frac{\mu^f}{\mu^c} \frac{\lambda}{\lambda^f} c^f. \qquad (V.57)$$

En associant les grandeurs de mêmes puissances, on peut obtenir l'équation sous la forme sans dimensions

$$\frac{\alpha D}{\lambda} = K \left(\frac{Dw\rho}{\mu}\right)^c \left(\frac{\mu c}{\lambda}\right)^f. \qquad (V.58)$$

Les groupements sans dimensions obtenus peuvent être mis sous la forme de nombres connus (critères ou caractéristiques) de similitude

$$Dw\rho/\mu = Dw/\nu = \mathrm{Re}; \ \mu c/\lambda = \mu c\rho/(\lambda\rho) = \nu/a = \mathrm{Pr}; \ \alpha D/\lambda = \mathrm{Nu}$$

Par conséquent, pour le cas envisagé de transmission de chaleur, lors d'un mouvement forcé dans un tube, l'équation de similitude peut s'écrire

$$\mathrm{Nu} = K\,\mathrm{Re}^c\mathrm{Pr}^f. \qquad (V.59)$$

L'équation obtenue est conforme au théorème π : le nombre de critères (Nu, Re, Pr) est égal à la différence entre le nombre de paramètres à dimensions $n = 7$ (α, D, w, ρ, μ, λ, c) et le nombre de dimensions principales $m = 4$ (L, Θ, T, M). La constante K et les puissances inconnues affectées aux critères déterminants c et f de l'équation obtenue peuvent s'obtenir par expérience.

Les critères obtenus par la méthode d'analyse des dimensions ne coïncident pas toujours quant à la forme avec les critères fournis par la théorie de similitude. Toutefois, les systèmes de critères déduits par des procédés différents sont équivalents entre eux.

Ainsi, la théorie de similitude et l'analyse des dimensions sont, au fond, des méthodes différentes du même système d'exploration fondé sur l'utilisation des variables sans dimensions généralisées dont la différence est conditionnée seulement par le volume des connaissances préalables sur le processus étudié. L'application de la théorie de similitude impose de nombreuses connaissances préalables susceptibles d'assurer la déduction de l'équation déterminant le processus. Si cette application est possible, c'est à elle que doit aller la préférence. Le cadre de la théorie de similitude permet d'élucider le sens physique des critères de similitude. Si la position mathématique du problème est impossible, le recours à l'analyse des dimensions devient inévitable. Dans ce cas on n'est pas toujours sûr que la liste des grandeurs qui interviennent dans le processus ne comporte pas d'erreurs et que le système de dimensions obtenu est correct. Lorsqu'une telle liste et la relation entre les grandeurs et les dimensions sont établies correctement, la méthode d'analyse des dimensions assure des résultats équivalents à ceux fournis par la théorie de similitude.

CHAPITRE VI

ÉCHANGE DE CHALEUR PAR CONVECTION SOUS L'ÉCOULEMENT FORCÉ DU FLUIDE

§ VI.1. Généralités sur la théorie de la couche limite

1. Traits particuliers de l'écoulement du fluide visqueux à grands nombres Re. Couche limite

Lorsqu'on observe l'écoulement d'un fluide visqueux à grands Re. la viscosité intervient d'une façon différente à la proximité immédiate de la surface contournée et loin d'elle.

Près de la surface, le collement du fluide à la paroi solide fait apparaître des gradients de vitesse transversaux importants et comme conséquence, de grandes contraintes tangentielles. A mesure qu'on s'éloigne de la paroi, la variation de la vitesse longitudinale suivant la normale à la surface diminue et déjà à une distance relativement petite de la paroi l'action des forces de viscosité devient infiniment faible.

De la sorte, lors du déplacement d'un fluide à grands Re tout le flux peut être divisé en deux domaines, celui de la *couche limite dynamique*, où l'influence de la viscosité est importante, et le domaine extérieur de l'écoulement *potentiel*, où l'influence de la viscosité est négligeable. Plus le nombre Re est grand, plus la valeur relative des forces d'inertie est grande par rapport aux forces de viscosité, plus la couche limite est mince, et inversement, lorsque le rôle de la viscosité croît, le domaine d'écoulement au voisinage de la paroi devient plus épais.

La division du flux en couche limite et courant extérieur simplifie sensiblement l'analyse de l'écoulement tout entier du fait qu'elle permet d'examiner chaque domaine séparément. D'autre part, dans ces conditions, les forces d'inertie du courant extérieur dominent les forces du frottement visqueux; la description du mouvement peut donc profiter des équations du fluide parfait.

La description mathématique du mouvement du fluide dans la couche limite devient également bien plus simple, et les équations approchées obtenues se prêtent à l'intégration.

L'analyse séparée des équations simplifiées et la jonction ultérieure des solutions obtenues pour la couche limite et le flux potentiel extérieur permettent d'obtenir analytiquement toutes les caractéristiques nécessaires de l'écoulement dans son ensemble.

Si entre le courant d'un fluide et la surface d'un corps a lieu l'échange de chaleur ou la diffusion, alors près de la surface du corps

contourné il se forme par analogie avec la couche limite dynamique une couche limite thermique ou de diffusion, c'est-à-dire un domaine à proximité immédiate de la paroi, où la température ou la concentration de la composante diffusante change depuis les valeurs qu'elle a au voisinage de la paroi jusqu'aux valeurs correspondantes dans le courant extérieur.

Dans la couche limite, la vitesse, la température et la concentration de l'impureté s'approchent asymptotiquement de leurs valeurs dans le courant potentiel; donc, pour l'épaisseur de la couche limite on adopte généralement la distance suivant la normale à la surface à laquelle la vitesse de la variation de la température ou de la concentration diffère de 1 % de la valeur correspondante dans le courant extérieur.

Malgré son épaisseur négligeable par rapport aux dimensions extérieures caractéristiques du corps contourné, la couche limite joue un rôle essentiel dans les processus d'interaction dynamique et thermique du courant avec la surface.

2. Equations différentielles des couches limites dynamique, thermique et diffusive

Le système d'équations différentielles de la couche limite dynamique a été obtenu pour la première fois en 1904 par L. Prandtl, spécialiste éminent en aérodynamique, qui, pour évaluer les termes des équations de Navier-Stokes, rejetait les termes du deuxième ordre de petitesse.

En s'inspirant de ses idées, examinons le cas de la couche limite plane stationnaire d'un fluide compressible en l'absence des forces volumiques et des processus de diffusion. Sous ces hypothèses le système d'équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie (cf. chapitre IV) se mettent sous la forme

$$\rho\left(w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\times$$

$$1\quad 1\quad 1\qquad \delta\quad 1/\delta\qquad\qquad 1\qquad 1$$

$$\times\left[\mu\left(2\frac{\partial w_x}{\partial x}-\frac{\partial w_y}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\right];$$

$$1\qquad \delta/\delta\qquad 1/\delta\qquad 1/\delta\qquad \delta/1$$

$$\rho\left(w_x\frac{\partial w_y}{\partial x}+w_y\frac{\partial w_y}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\times$$

$$1\quad 1\quad \delta/1\qquad \delta\quad \delta/\delta\qquad\qquad \delta\qquad 1/\delta$$

$$\times\left[\mu\left(2\frac{\partial w_y}{\partial y}-\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}+\frac{\partial w_y}{\partial x}\right)\right];\qquad (VI.1)$$

$$\delta/\delta\qquad 1/1\qquad 1\qquad 1/\delta\qquad \delta/1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y)=0;\qquad (VI.2)$$

$$1\quad 1\quad 1\qquad 1/\delta\quad 1\quad \delta$$

$$\rho\left[w_x \frac{\partial}{\partial x}(c_pT) + w_y \frac{\partial}{\partial y}(c_pT)\right] -$$
$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \delta \quad 1/\delta_T \quad 1$$

$$- w_x \frac{\partial p}{\partial x} - w_y \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) - \mu\Phi, \qquad \text{(VI.3)}$$
$$1 \quad 1 \quad \delta \quad \delta \quad 1 \quad 1 \quad 1/\delta_T \quad 1/\delta_T$$

où Φ est la fonction de dissipation

$$\Phi = \frac{2}{3}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y}\right)^2 - 2\left[\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_y}{\partial y}\right)^2\right] - \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x}\right)^2.$$
$$1 \quad \delta/\delta \quad 1 \quad \delta/\delta \quad 1/\delta \quad \delta/1$$

Transformons l'équation du mouvement (VI.1), en retenant les propriétés déjà notées de la couche limite (petitesse des dimensions transversales et des vitesses par rapport aux dimensions et vitesses longitudinales). Admettons que l'épaisseur de la couche limite δ est petite par rapport à la distance x (fig. VI.1).

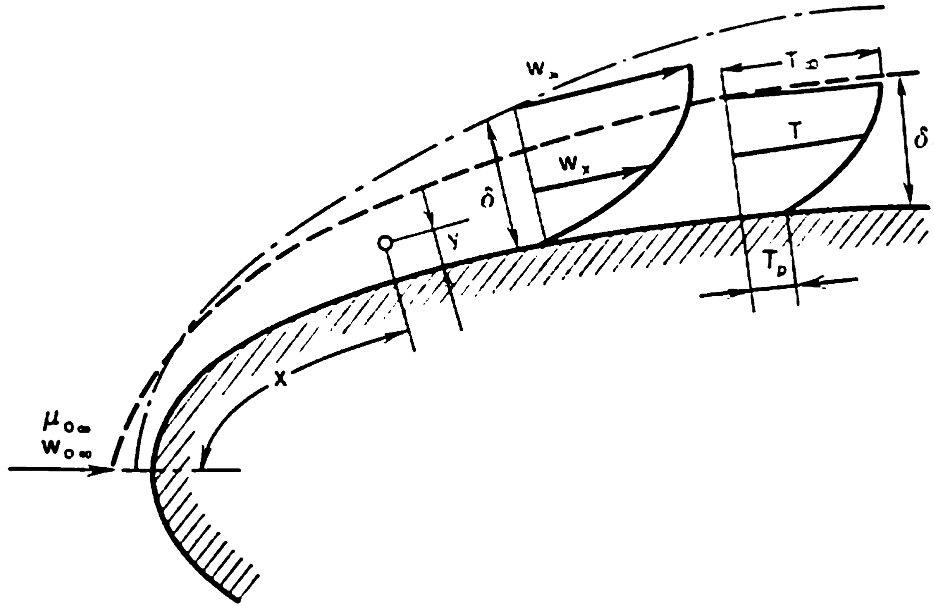


Fig. VI.1. Schéma de la couche limite sur une surface curviligne

Adoptons l'ordre des grandeurs w_x et x comme unité ; alors, la distance $y \sim \delta$. L'équation de la continuité (VI.2) amène que la vitesse transversale w_y est également de l'ordre de δ si on adopte que l'ordre de la densité est l'unité. Puisque nous avons adopté que w_x et x sont de l'ordre de l'unité, les dérivées $\partial w_x/\partial x$ et $\partial^2 w_x/\partial x^2$ doivent être de même ordre et les dérivées $\partial w_x/\partial y$ et $\partial^2 w_x/\partial y^2$, de l'ordre de $1/\delta$ et $1/\delta^2$ respectivement.

En se guidant par ces faits, évaluons les termes des équations du mouvement (VI.1). Inscrivons les ordres obtenus sous les termes correspondants des équations. Examinons d'abord la première des équations du mouvement. Il est clair que les deux premiers termes figurant dans le premier membre sont de l'ordre de l'unité. Pour déterminer l'ordre de la grandeur $\partial p/\partial x$, rappelons que dans le cas d'un écoulement plan parallèle du fluide à grands Re, le domaine extérieur de l'écoulement potentiel est décrit par l'équation de l'écoulement du fluide parfait

$$\partial p/\partial x + \rho_\infty w_\infty\, \partial w_\infty/\partial x = 0. \qquad \text{(VI.4)}$$

Le gradient de pression ne peut pas changer d'ordre du fait de la présence de la couche limite mince; donc, on peut adopter que l'ordre de la grandeur $\partial p/\partial x$ est également l'unité.

En revenant au deuxième membre de la première équation du mouvement, notons que de tous les termes où figure la viscosité on peut laisser seulement $\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)$ d'ordre $1/\delta^2$. Toutefois, ce terme doit être de même ordre que les autres termes convectifs dont l'ordre est l'unité.

Cette dernière condition peut être remplie si la viscosité μ est de l'ordre δ^2. Ceci signifie à son tour que la couche limite peut exister seulement lorsque la surface est contournée par un flux à viscosité très faible, ou, ce qui revient au même, à grands nombres Re.

La deuxième équation implique que la dérivée $\partial p/\partial y$ doit être de l'ordre δ, puisque tous les autres termes de cette équation ont le même ordre ou un ordre encore plus petit, et la variation de la pression à travers la couche limite peut être négligée. Autrement dit, dans le sens transversal de la couche limite la prestion reste constante et égale à la pression à la frontière extérieure de la couche limite.

De cette façon, en conservant dans les équations de Navier-Stokes les termes de même ordre, au lieu des équations (VI.1) et (VI.2) on obtient le système d'équations suivant qui décrit le mouvement d'un fluide compressible dans la couche limite plane stationnaire

$$\rho\left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\right); \qquad \text{(VI.5)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) = 0 \qquad \text{(VI.6)}$$

à conditions aux limites $y = 0 \rightarrow w_x = 0$, $w_y = 0$; $y = \delta \rightarrow w_x = w_\infty$.

L'équation de l'énergie de la couche limite (VI.3) devient aussi plus simple. En notant l'épaisseur de la couche limite thermique par δ_t, l'ordre des termes de l'équation de l'énergie est évalué de la façon suivante.

En vertu des évaluations précédentes, les deux premiers termes du premier membre sont des grandeurs de l'ordre unité. Le terme $w_y\, \partial p/\partial y$ peut être négligé par rapport à $w_x\, \partial p/\partial x$ du fait que d'après (VI.5) la pression à travers la couche limite reste pratiquement constante. Parmi tous les termes où figure la viscosité, il convient de laisser seulement $\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2$ dont l'ordre est $1/\delta^2$, puisque l'ordre de tous les autres termes est sensiblement plus petit. Pour que le terme où figure la conductivité thermique soit de même ordre que les autres, il faut que l'ordre de celle-ci soit δ_t^2. Ceci signifie que la couche limite thermique apparaît lorsque la conductivité thermique du fluide est faible. Dans ce cas le terme $\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)$ peut être négligé par rapport au terme $\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)$

Ainsi, en conservant dans (VI.3) seulement les termes de l'ordre unité, on obtient l'équation de l'énergie d'une couche limite plane compressible

$$\rho\left[w_x\frac{\partial}{\partial x}(c_pT)+w_y\frac{\partial}{\partial y}(c_pT)\right]-w_x\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2 \quad (\text{VI.7})$$

à conditions aux limites $y=0\rightarrow T=T_p$; $y=\infty\rightarrow T=T_\infty$.

Pour un gaz parfait $h=c_pT$, et l'équation (VI.7) peut s'écrire à l'aide de l'enthalpie

$$\rho\left(w_x\frac{\partial h}{\partial x}+w_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)=w_x\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\Pr}\frac{\partial h}{\partial y}\right). \quad (\text{VI.8})$$

Le sens physique de (VI.8) est bien simple: *la variation convective de l'enthalpie est égale à la somme de la puissance des forces de pression, de la chaleur qui apparaît sous l'effet de la dissipation de l'énergie mécanique, et de la chaleur amenée par conductivité thermique.*

En multipliant chaque terme de l'équation (VI.5) par w_x et en l'additionnant terme à terme avec (VI.7), on obtient l'équation de l'enthalpie totale de la couche limite

$$\rho w_x\frac{\partial}{\partial x}\left(c_pT+\frac{w_x^2}{2}\right)+\rho w_y\frac{\partial}{\partial y}\left(c_pT+\frac{w_x^2}{2}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+w_x\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right). \quad (\text{VI.9})$$

Mais

$$\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+w_x\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu w_x\frac{\partial w_x}{\partial y}\right),$$

alors, l'équation (VI.9) se met sous la forme

$$\rho w_x\frac{\partial}{\partial x}\left(c_pT+\frac{w_x^2}{2}\right)+\rho w_y\frac{\partial}{\partial y}\left(c_pT+\frac{w_x^2}{2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+\mu w_x\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w_x^2}{2}\right)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\frac{\partial}{\partial y}\left(T+\frac{\mu}{\lambda}\frac{w_x^2}{2}\right)\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(T+\frac{w_x^2}{2}\right)+\left(\frac{\mu c_p}{\lambda}-1\right)\frac{w_x^2}{2c_p}\right]\right\}.$$

En adoptant qu'à travers la couche limite la chaleur spécifique c_p est constante, ce qui est parfaitement admissible pour un gaz parfait, et en introduisant le nombre de Prandtl sans dimensions, on obtient finalement l'équation de l'énergie sous la forme de M. Chirokov:

$$\rho c_p\left(w_x\frac{\partial T^*}{\partial x}+w_y\frac{\partial T^*}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial y}\left[T^*+(\Pr-1)\frac{w_x^2}{2c_p}\right]\right\}. \quad (\text{VI.10})$$

Ici $T^*=T+\frac{w_x^2}{2c_p}$ est la température de freinage.

Les équations (VI.2), (VI.5)-(VI.7) et l'équation d'état d'un gaz parfait forment un système d'équations de la couche limite compressible plane et comportent les variables suivantes: w_x, w_y, p, ρ, T, μ, λ, c_p. Ce système d'équations est fermé par trois relations supplémentaires: entre, d'une part, la viscosité dynamique μ, la conductivité thermique λ et la chaleur spécifique c_p, et de l'autre, la température.

3. Système d'équations d'une couche limite plane compressible compte tenu de la diffusion et des réactions chimiques

Les équations obtenues de la couche limite peuvent être généralisées pour le cas du mouvement d'un mélange des gaz hétérogènes en réaction entre eux.

Les réactions font apparaître ou disparaître les composantes isolées du mélange et pour l'i-ième composante l'équation de la continuité peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_i w_{xi})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho_i w_{yi})=m_i. \qquad \text{(VI.11)}$$

Ici ρ_i, w_{xi}, w_{yi} sont la densité et les éléments constitutifs de la vitesse de l'i-ième composante respectivement; m_i, la vitesse de masse par seconde de la formation de l'i-ième composante rapportée à l'unité de volume.

Cependant, pour un mélange de gaz en réaction l'équation de la continuité garde sa forme antérieure

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y)=0, \qquad \text{(VI.12)}$$

si les constituants de la vitesse du mélange sont définis par la condition

$$\rho w_x=\sum_i \rho_i w_{xi}; \quad \rho w_y=\sum_i \rho_i w_{yi}.$$

D'autre part, dans les conditions d'un mélange la loi de conservation de la masse impose

$$\sum_i m_i=0. \qquad \text{(VI.13)}$$

L'équation du mouvement d'un mélange garde également sa forme antérieure

$$\rho w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right). \qquad \text{(VI.14)}$$

On peut dire de même pour l'équation d'état

$$p=\rho RT, \qquad \text{(VI.15)}$$

si l'on adopte

$$R=R_{\mathrm{m}}=\sum_i C_i R_i. \qquad \text{(VI.16)}$$

Ici $C_i=\rho_i/\rho$ est la partie massique de l'i-ième composante.

Les particularités principales des processus dans les mélanges en réaction sont traduites par les équations qui décrivent le transfert de chaleur et de masse (équations de la diffusion et de l'énergie).

L'équation de la diffusion de l'i-ième composante s'obtient à partir de l'équation de la continuité (VI.11) de la façon suivante: la vitesse de la diffusion de l'i-ième composante w_i^* est déterminée comme la différence des vitesses du mouvement de la composante et du mélange: $w_i^*=w_i-w$.

En remplaçant dans (VI.11) la vitesse du mouvement par la somme des vitesses de la diffusion et du mélange, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho C_i\,(w_{xi}^*-w_x)+\frac{\partial}{\partial y}\rho C_i\,(w_{yi}^*-w_y)=m_i. \qquad \text{(VI.17)}$$

D'après la loi fondamentale de la diffusion, la vitesse de celle-ci se détermine comme suit à l'aide des gradients des fractions de masse de la température et de la pression

$$w_i^* = w_i - w = -\frac{D_i}{C_i} \operatorname{grad} C_i - \frac{D_i^T}{T} \operatorname{grad} T - \frac{D_i^p}{p} \operatorname{grad} p, \qquad \text{(VI.18)}$$

où D_i, D_i^T, D_i^p sont les coefficients de la diffusion de masse, de la diffusion thermique et de la diffusion barométrique respectivement. En portant la relation (VI.18) dans l'équation (VI.17) et en tenant compte de l'égalité (VI.12), on obtient après des transformations peu compliquées

$$\rho w_x \frac{\partial}{\partial x} C_i + \rho w_y \frac{\partial}{\partial y} C_i = \frac{\partial}{\partial x} \rho C_i \left(\frac{D_i}{C_i} \frac{\partial C_i}{\partial x} + \frac{D_i^T}{T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{D_i^p}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \rho C_i \left(\frac{D_i}{C_i} \frac{\partial C_i}{\partial y} + \frac{D_i^T}{T} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{D_i^p}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + m_i.$$

Pour la couche limite de diffusion cette équation peut être simplifiée encore en rejetant le premier terme de son deuxième membre, dont l'ordre est plus petit par rapport aux autres termes. D'autre part, le rôle de la diffusion barométrique dans la couche limite est infime du fait que $\partial p/\partial y \simeq 0$, et on peut la négliger.

De la sorte, l'équation de la diffusion de l'i-ième composante dans une couche limite plane compressible est de la forme

$$\rho w_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \left(D_i \frac{\partial C_i}{\partial y} + \frac{D_i^T}{T} C_i \frac{\partial T}{\partial y} \right) + m_i \right]. \qquad \text{(VI.19)}$$

Pour déduire l'équation du bilan de chaleur, utilisons l'équation (VI.8).

L'amenée de la chaleur par convection est déterminée de la même façon que dans le cas de l'écoulement d'un gaz homogène en supposant que l'enthropie du gaz réagissant se calcule d'après la règle du mélange:

$$h = \sum_i C_i h_i. \qquad \text{(VI.20)}$$

Pourtant, dans l'équation de l'énergie il faut prendre en considération deux sources de chaleur supplémentaires, liées aussi bien à la formation de nouvelles composantes qu'aux processus de transfert par diffusion.

Le processus d'émission (ou d'absorption) de la chaleur avec formation de nouvelles composantes conduit à l'adjonction au deuxième membre de l'équation (VI.8) du terme

$$\sum_i m_i h_i^*, \qquad \text{(VI.21)}$$

qui d'après l'équation (VI.11) se met sous la forme

$$\sum_i h_i^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \rho C_i w_{xi} + \frac{\partial}{\partial y} \rho C_i w_{yi} \right), \qquad \text{(VI.22)}$$

où h_i^* est la chaleur de la formation de l'i-ième composante.

12—01289

Par définition, la vitesse de la diffusion de l'i-ième composante est égale à la différence vectorielle des vitesses absolues de la composante et du mélange; le flux de chaleur dû à la diffusion peut donc être exprimé sous la forme d'un vecteur à projections sur les axes des x et des y:

$$\rho\,(w_{xi}-w_x)\,h_iC_i;\quad \rho\,(w_{yi}-w_y)\,h_iC_i. \tag{VI.23}$$

Par conséquent, le deuxième terme supplémentaire de l'équation de l'énergie relatif au transfert de chaleur par diffusion est déterminé par la divergence prise avec le signe opposé, de la somme des vecteurs du flux de chaleur résultant des composantes isolées:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\sum_i (w_{xi}-w_x)\,C_ih_i\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\sum_i (w_{yi}-w_y)\,C_ih_i\right]. \tag{VI.24}$$

En vertu de (VI.22) et (VI.24) l'équation de l'énergie (VI.7) devient

$$\rho w_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_i C_ih_i\right)+\rho w_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_i C_ih_i\right)=$$
$$=w_x\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_i \rho w_{xi}C_ih_i^*\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_i \rho w_{yi}C_ih_i^*\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_i \rho\,(w_{xi}-w_x)\,C_ih_i\right]-$$
$$-\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_i \rho\,(w_{yi}-w_y)\,C_ih_i\right]. \tag{VI.25}$$

Après une transformation identique

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_i \rho w_{xi}C_ih_i^*\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_i \rho w_{yi}C_ih_i^*\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_i \rho\,(w_{xi}-w_x)\,C_ih_i^*\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_i \rho\,(w_{yi}-w_y)\,C_ih_i^*\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_i \rho w_xC_ih_i^*\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_i \rho w_yC_ih_i^*\right),$$

récrivons l'équation (VI.25)

$$\rho w_x\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_i C_i\,(h_i-h_i^*)\right]+\rho w_y\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_i C_i\,(h_i-h_i^*)\right]=$$
$$=w_x\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_i \rho\,(w_{xi}-w_x)\,C_i\,(h_i-h_i^*)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_i \rho\,(w_{yi}-w_y)\,C_i\,(h_i-h_i^*)\right]. \tag{VI.26}$$

En négligeant dans l'équation précédente l'avant-dernier terme, on obtient l'équation de l'énergie de la couche limite compte tenu des réactions chimiques

$$\rho w_x \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = w_x \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - \sum_i \rho C_i (w_{yi} - w_y)(h_i - h_i^*) \right]. \quad \text{(VI.27)}$$

Ici $\bar{h} = \sum_i C_i (h_i - h_i^*)$ est l'enthalpie totale du mélange. En portant l'expression (VI.18) de la vitesse de la diffusion dans la direction de l'axe des y (sans tenir compte de la diffusion barométrique) dans l'équation (VI.27), on obtient finalement

$$\rho w_x \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = w_x \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \sum_i (h_i - h_i^*) \left(D_i \frac{\partial C_i}{\partial y} + \frac{C_i D_i^T}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right]. \quad \text{(VI.28)}$$

Cette équation de l'énergie de la couche limite, écrite à l'aide de l'enthalpie, peut être ramenée à l'équation où figure comme variable principale la température.

En remarquant que

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_i C_i (h_i - h_i^*) = \sum_i C_i \frac{\partial h_i}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \sum_i (h - h_i^*) \frac{\partial C_i}{\partial x} = \\ = \left(\sum_i C_i c_{pi} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \sum_i (h_i - h_i^*) \frac{\partial C_i}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \left(\sum_i C_i c_{pi} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_i (h_i - h_i^*) \frac{\partial C_i}{\partial y},$$

et en introduisant la notation $\sum_i C_i c_{pi} = \bar{c}_p$ récrivons l'équation de l'énergie

$$\rho \bar{c}_p \left(w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = w_x \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho \sum_i (h_i - h_i^*) \left(D_i \frac{\partial C_i}{\partial y} - D_i^T \frac{C_i}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \\ - \sum_i (h_i - h_i^*) \left(\rho w_x \frac{\partial C_i}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) \right]. \quad \text{(VI.29)}$$

Remplaçons dans cette expression le dernier terme à l'aide de l'équation (VI.19) et réalisons les réductions

$$\mu\bar{c}_p\left(w_x\frac{\partial T}{\partial x}+w_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)=w_x\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+$$
$$+\sum_i m_i(h_i-h_i^*)+\sum_i c_{pi}\left(D_i\rho\frac{\partial C_i}{\partial y}+D_i^T\rho\frac{C_i}{T}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{\partial T}{\partial y}. \quad \text{(VI.30)}$$

L'équation de l'énergie d'un mélange de gaz en réaction écrite à l'aide de l'enthalpie totale du flux

$$\bar{h}_0=\bar{h}+w_x^2/2, \quad \text{(VI.31)}$$

est de la forme

$$\rho w_x\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{c_p}\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu-\frac{\lambda}{c_p}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w_x^2}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_i\left(\rho D_i-\frac{\lambda}{c_p}\right)(h_i-h_i^*)\frac{\partial C_i}{\partial y}+\sum_i D_i^T\frac{\rho C_i}{T}(h_i-h_i^*)\frac{\partial T}{\partial y}\right]. \quad \text{(VI.32)}$$

En introduisant dans les équations du bilan les fractions de masse et dans l'équation de l'énergie de la couche limite sous la forme (VI.32) les *nombres de Prandtl, de Schmidt et de Lewis* (les deux derniers sont analogues au nombre de Prandtl et sont des paramètres physiques sans dimensions)

$$\overline{\mathrm{Pr}}=\frac{\mu\bar{c}_p}{\lambda};\qquad \mathrm{Sc}=\frac{\mu}{\rho D_i};\qquad \mathrm{Le}=\frac{\rho c_p D_i}{\lambda}, \quad \text{(VI.33)}$$

où $\bar{c}_p=\sum_i C_i c_{pi}$ est ce qu'on appelle chaleur spécifique stationnaire du mélange, on obtient pour la couche limite plane compressible stabilisée le système d'équations qui rendent compte de la présence des réactions chimiques (sans tenir compte du transfert de masse par diffusion thermique)

$$\rho w_x\frac{\partial w_x}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial w_x}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right);$$
$$\frac{\partial p}{\partial y}=0;$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y)=0;$$
$$\rho w_x\frac{\partial C_i}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial C_i}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Sc}}\frac{\partial C_i}{\partial y}\right)+m_i;$$
$$\rho w_x\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial\bar{h}_0}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1-\frac{1}{\mathrm{Pr}}\right)\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w_x^2}{2}\right)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_i\rho D_i\left(1-\frac{1}{\mathrm{Le}}\right)(h_i-h_i^*)\frac{\partial C_i}{\partial y}\right]. \quad \text{(VI.34)}$$

Dans les cas courants, ce système d'équations se résout sous les conditions aux limites suivantes

$$y = 0,\ \rho = \rho_p,\ \overline{h} = h_p,\ \overline{h}_0 = h_{0p},\ w_x = 0,\ w_y = w_p,\ C_i = C_{ip};$$

$$y = \infty,\ \rho = \rho_\infty,\ \overline{h} = \overline{h}_\infty,\ \overline{h}_0 = \overline{h}_{0\infty},\ w_x = w_\infty,\ w_y = 0,\ C_i = C_{i\infty}. \quad \text{(VI.35)}$$

Comparons maintenant les épaisseurs des couches limites dynamique, thermique et diffusive. A cet effet récrivons les équations différentielles de la couche limite sous la forme adimensionnelle.

Choisissons les échelles suivantes des grandeurs physiques

$$w_x \to w_\infty,\quad \rho \to \rho_\infty,\ y \to \delta,\quad \delta_T,\quad \delta_D,$$
$$p \to \rho w_\infty^2,\quad \mu \to \mu_\infty,\quad C_i \to C_{i\infty},$$
$$x \to L,\quad \lambda \to \lambda_\infty,\quad \overline{h}_0 \to \overline{h}_{0\infty}.$$

Après la réduction à la forme adimensionnelle l'équation du mouvement devient

$$\tilde{\rho}\tilde{w}_x \frac{\partial \tilde{w}_x}{\partial \tilde{x}} + \ldots = \ldots + \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \frac{1}{\mathrm{Re}_\infty} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{y}}\right). \quad \text{(VI.36)}$$

Le tilda désigne ici une grandeur sans dimensions, par exemple $\tilde{x} = x/L$.

Tous les termes de (VI.36) sont de même ordre sous la condition que

$$\delta/L \sim 1/\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}, \quad \text{(VI.37)}$$

où $\mathrm{Re}_\infty = \rho_\infty w_\infty L/\mu_\infty$.

Ainsi, nous avons démontré l'hypothèse principale qui nous a guidé pour déduire les équations de la couche limite, suivant laquelle lors de l'écoulement d'un fluide à grands Re l'épaisseur de la couche limite n'est pas grande, étant de l'ordre de $1/\sqrt{\mathrm{Re}_\infty}$.

Transformons de façon analogue l'équation de l'énergie

$$\tilde{\rho}\tilde{w}_x \frac{\partial \tilde{\overline{h}}_0}{\partial \tilde{x}} + \ldots = \ldots + \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}_\infty} \left(\frac{L}{\delta_t}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{\overline{h}}_0}{\partial \tilde{y}}\right).$$

Si les deux termes sont de même ordre, alors

$$\delta_t/L \sim 1/\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Re}_\infty}. \quad \text{(VI.38)}$$

Les expressions (VI.37) et (VI.38) donnent l'ordre de la relation entre les épaisseurs de la couche limite thermique et dynamique

$$\delta_t/\delta \sim 1/\sqrt{\mathrm{Pr}}. \quad \text{(VI.39)}$$

Le rapport (VI.39) montre que dans les gaz et les métaux liquides tels que le nombre $\mathrm{Pr} < 1$, la couche limite thermique est plus épaisse que la couche dynamique, et dans les liquides ($\mathrm{Pr} > 1$) $\delta_t < \delta$.

En ramenant l'équation de la diffusion à la forme sans dimensions, on obtient

$$\tilde{\rho}\tilde{w}_x \frac{\partial \tilde{C}_i}{\partial \tilde{x}} + \ldots = \ldots + \frac{1}{\mathrm{Sc}\,\mathrm{Re}_\infty} \left(\frac{L}{\delta_D}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{C}_i}{\partial \tilde{y}}\right).$$

Les deux termes de l'équation de la diffusion sont de même ordre si

$$\delta_D/L \sim 1/\sqrt{\mathrm{Sc}\cdot\mathrm{Re}_\infty}. \quad \text{(VI.40)}$$

D'après l'équation (VI.37) on trouve

$$\delta_D/\delta \sim 1/\sqrt{Sc}. \qquad (VI.41)$$

Le tableau VI.1 donne les valeurs des nombres de Schmidt pour le mélange de différents gaz dans l'air.

Tableau VI.1

Nombres de Schmidt pour de faibles concentrations de différents gaz dans l'air

Gaz	Masse moléculaire relative	Nombre de Schmidt, Sc	Gaz	Masse moléculaire relative	Nombre de Schmidt, Sc
Hydrogène	2,016	0,22	Pentane	72,15	1,97
Méthane	16,04	0,84	Méthanol	74,08	1,57
Ammoniac	17,03	0,61	Oxyde d'éthyle	74,12	1,70
Vapeur	18,016	0,60	Butanol *n*	74,12	1,88
Azote	28,02	0,98	Carbone sulfureux	76,13	1,48
Éthane	30,07	1,22	Essence	78,11	1,71
Oxygène	32,00	0,74	Acétyle	88,10	1,84
Méthanol	32,04	1,00	Toluène	92,13	1,86
Gaz carbonique	44,01	0,96	Phosgène	98,92	1,97
Propane	44,09	1,51	Chlorobenzène	112,56	2,13
Éthanol	46,07	1,30	Acétate *n*-propylique	102,13	1,97
Acétone	58,08	1,60	Octane *n*	114,22	2,62
Butane	58,12	1,77	Naphtalène	128,16	2,57
Acide acétylique	60,05	1,24	Tétrachlorure de carbone	153,54	2,13
Alcool *n*-propylénique	60,09	1,55	Benzène monobromé	157,02	1,97
Bioxyde de soufre	64,06	1,28	Chloropicrine	164,39	2,13
Chlore	70,90	1,42	Bromure éthylique	187,88	1,97

A ±30 % près, la dépendance du nombre de Schmidt par rapport à la masse moléculaire relative du gaz, dont la concentration dans l'air tend vers zéro, peut se calculer d'après la formule [39]

$$Sc_{C_i\to 0} = 0{,}145 M_i^{0{,}556}.$$

L'influence de la concentration peut être évaluée d'après la formule

$$Sc = (\nu/\nu_{C_i\to 0})\cdot Sc_{C_i\to 0}.$$

Pour les gaz à masse moléculaire relative $M_i < 32$, le nombre de Schmidt $Sc < 1$, et d'après l'équation (VI.41), la couche limite de diffusion est plus épaisse que la couche dynamiq Si $M_i > 32$, $\delta_D < \delta$.

4. Triple analogie

Les équations de l'énergie et du mouvement (VI.34) de la couche limite deviennent identiques sous la condition que Pr = Le = Sc = 1 et $\partial p/\partial x = 0$.

On peut montrer que dans ce cas si au lieu de la fraction de masse de l'i-ième composante C_i on introduit dans l'équation de la diffusion et de l'énergie

ce qu'on appelle la *concentration totale* *) de l'élément chimique du mélange $\widetilde{C}_j$, l'équation de la diffusion devient identique à l'équation du mouvement et de l'énergie.

La relation entre $\widetilde{C}_j$ et C_i est traduite par l'expression

$$\widetilde{C}_j = \sum_j r_{j,\,i} C_i.$$

Ici $r_{j,\,i}$ est la fraction de masse du j-ième élément dans l'i-ième composante.

Si dans la couche limite des transformations intranucléaires n'ont pas lieu, les fractions de masse des éléments chimiques isolés ne changent pas. Par conséquent, si dans les équations de la diffusion et de l'énergie du système (VI.34) on remplace C_i par $\widetilde{C}_j$, le terme du deuxième membre de l'équation de la diffusion s'annule. Alors, les équations du mouvement, de la diffusion et de l'énergie deviennent identiques. Dans le cas de l'identité des conditions aux limites, c'est-à-dire sous la condition que $w_p = 0$; $\widetilde{h}_{0p} = \text{const}$ et $\widetilde{C}_{jp} = \text{const}$, ceci doit entraîner l'identité des champs des vitesses, de la concentration totale et de l'enthalpie de freinage totale

$$\frac{\bar{h}_0 - \bar{h}_{0p}}{\bar{h}_{0\infty} - \bar{h}_{0p}} = \frac{\widetilde{C}_j - \widetilde{C}_{j\,p}}{\widetilde{C}_{j\infty} - \widetilde{C}_{j\,p}} = \frac{w_x}{w_\infty}. \tag{VI.42}$$

Etant donné que

$$q_{p\Sigma} = -\frac{\lambda}{c_p}\left(\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y}\right)_p; \quad j_p = -\rho D_i\left(\frac{\partial \widetilde{C}_i}{\partial y}\right)_p; \quad \tau_p = \mu\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_p, \tag{VI.43}$$

les équations (VI.42) et (VI.43) entraînent que pour les conditions envisagées

$$\mathrm{St}_T = \mathrm{St}_D = C_f/2, \tag{VI.44}$$

où

$$\mathrm{St}_T = \frac{q_{p\Sigma}}{\rho_\infty w_\infty (\bar{h}_{0\infty} - \bar{h}_{0p})}; \quad \mathrm{St}_D = \frac{j_{p\,i}}{\rho_\infty w_\infty (\widetilde{C}_{i\infty} - \widetilde{C}_{i\,p})}; \quad \frac{C_f}{2} = \frac{\tau_p}{\rho_\infty w_\infty^2}.$$

L'équation (VI.44) est largement appliquée dans les calculs techniques des processus d'échange de chaleur et de masse. La relation $\mathrm{St} = \frac{C_f}{2}$ porte le nom d'analogie de Reynolds.

5. Relations intégrales des impulsions, de l'énergie et de la diffusion

Les équations différentielles obtenues pour la couche limite sont plus simples que les équations différentielles complètes du mouvement, de l'énergie et de la diffusion d'un fluide visqueux.

Pour autant, la solution exacte de leur système n'est possible que pour un nombre très limité des lois de la donnée de la vitesse de l'écoulement extérieur et des conditions aux limites sur la paroi, lorsque les équations différentielles de la couche limite aux dérivées

*) Cette question est examinée de plus près au § VI.2.

partielles peuvent être ramenées aux équations différentielles ordinaires.

Sous ce rapport, les méthodes approchées de la résolution des équations mentionnées, fondées sur l'application de ce qu'on appelle les relations intégrales des impulsions, de l'énergie et de la masse, acquièrent une grande importance.

L'équation intégrale de la quantité de mouvement s'obtient à partir des équations du mouvement (VI.5) et de la continuité (VI.2) par intégration suivant l'épaisseur de la couche limite et traduit la loi de conservation de la quantité de mouvement du fluide qui passe par la section donnée de la couche limite.

En appliquant les équations (VI.4) et (VI.2), récrivons l'équation du mouvement (VI.5) sous la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x^2)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho w_x w_y)=\rho_\infty w_\infty \frac{\partial w_\infty}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\right).$$

Multiplions tous les termes de l'équation de la continuité (VI.2) par la valeur de la vitesse à la frontière extérieure de la couche limite w_∞ pour obtenir

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x w_\infty)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y w_\infty)=\rho w_x \frac{\partial w_\infty}{\partial x}.$$

En retranchant terme à terme de l'équation obtenue l'expression précédente, il vient

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho w_x(w_\infty-w_x)+\frac{\partial}{\partial y}\rho w_y(w_\infty-w_x)+$$
$$+(\rho_\infty w_\infty-\rho w_x)\frac{\partial w_\infty}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right). \qquad \text{(VI.45)}$$

Intégrons maintenant chaque terme de l'équation du mouvement transformée (VI.45) à travers la couche limite

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\rho w_x(w_\infty-w_x)\,dy+\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\rho w_y(w_\infty-w_x)\,\partial y+$$
$$+\int_0^\infty(\rho_\infty w_\infty-\rho w_x)\frac{\partial w_\infty}{\partial x}\,\partial y=\int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)dy.$$

Dans cette expression $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\rho w_y(w_\infty-w_x)\,dy=\rho w_y(w_\infty-w_x)\Big|_0^\infty=\rho_p w_p w_\infty$,

puisque dans le cas d'une paroi perméable

$$\text{pour } y=0,\ w_x=0;\ w_y=w_p;\ \rho=\rho_p;$$
$$\text{pour } y=\infty,\ w_x=w_\infty,$$

et

$$\int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)dy=-\mu\frac{\partial w_x}{\partial y}\Big|_0^\infty=\tau_p.$$

Ici τ_p est la contrainte de frottement sur la paroi.

En supposant l'existence des intégrales

$$\int_0^\infty \rho w_x (w_\infty - w_x)\,dy = \rho_\infty w_\infty^2 \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty}\left(1-\frac{w_x}{w_\infty}\right) dy = \rho_\infty w_\infty^2 \delta^{**};$$

$$\int_0^\infty (\rho_\infty w_\infty - \rho w_x)\,dy = \rho_\infty w_\infty \int_0^\infty \left(1-\frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty}\right) dy = \rho_\infty w_\infty \delta^{*}$$

et en admettant que la substitution de l'ordre de dérivation et d'intégration à la limite supérieure infinie est possible, on obtient

$$\frac{d}{dx}(\rho_\infty w_\infty^2 \delta^{**}) + \rho_\infty w_\infty \delta^{*} \frac{dw_\infty}{dx} = \tau_p + \rho_p w_p w_\infty. \qquad \text{(VI.46)}$$

En dérivant l'équation (VI.46) par rapport à x et en notant que d'après la relation (VI.4)

$$\frac{1}{\rho_\infty}\frac{d\rho_\infty}{dx} = -M_\infty^2 \frac{1}{w_\infty}\frac{dw_\infty}{dx}, \qquad \text{(VI.47)}$$

on obtient l'expression définitive de la relation intégrale des impulsions

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + f(2+H-M_\infty^2) = \frac{\tau_p}{\rho w_\infty^2} + \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty}. \qquad \text{(VI.48)}$$

Ici $M_\infty = w_\infty/a$ est le *nombre de Mach*, calculé d'après les paramètres à la frontière extérieure de la couche limite; $a = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_S}$, la vitesse du son; $H = \delta^*/\delta^{**}$, le paramètre de forme de la couche limite; $\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty} \times \left(1-\frac{w_x}{w_\infty}\right) dy$, l'épaisseur de quantité de mouvement; $\delta^* = \int_0^\infty \left(1-\frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty}\right) dy$, l'épaisseur de déplacement; $f = \frac{\delta^{**}\,dw_\infty}{w_\infty dx}$, le paramètre de forme caractéristique de la courbure aérodynamique du corps contourné.

Lors du contournement par un fluide incompressible ($M \ll 1$), l'équation (VI.48) devient

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + f(2+H) = \frac{\tau_p}{\rho_\infty w_\infty^2} + \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty}. \qquad \text{(VI.49)}$$

Dans les expressions de l'épaisseur de déplacement et de l'épaisseur de quantité de mouvement, la limite d'intégration supérieure peut être remplacée par l'épaisseur de la couche limite δ, sans apporter dans le calcul d'erreurs importantes. Les grandeurs δ^* et δ^{**} sont des caractéristiques de calcul importantes de la couche limite.

En vertu de l'égalité

$$\rho_\infty w_\infty \delta^* = \int_0^\infty (\rho_\infty w_\infty - \rho w_x)\,dy,$$

l'épaisseur de déplacement peut être déterminée (fig. VI.2) comme un tronçon par lequel le débit de masse par seconde d'un fluide parfait est égal à la perte du débit dans la section de la couche limite sous l'effet de l'action de freinage des forces de frottement lors de l'écoulement d'un fluide réel. Comme le montre le dessin, à la différence de l'épaisseur δ de la couche limite, l'épaisseur du déplacement δ^* est une grandeur parfaitement définie.

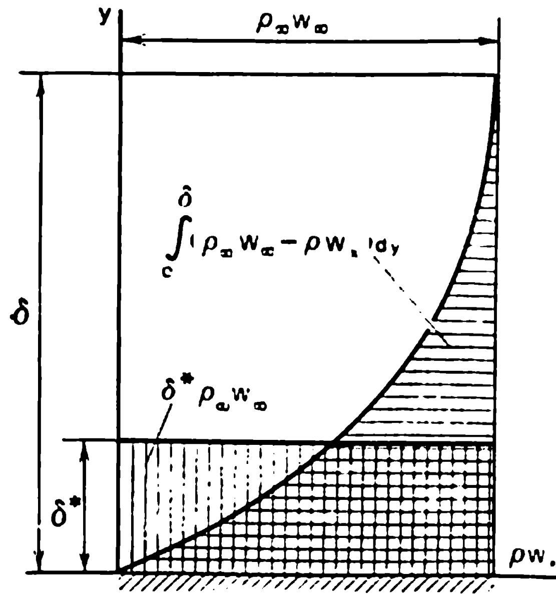


Fig. VI.2. Détermination de l'épaisseur de déplacement

Récrivons l'expression de l'épaisseur de quantité de mouvement δ^{**}

$$\rho_\infty w_\infty^2 \delta^{**} = \int_0^\infty \rho w_x (w_\infty - w_x)\, dy.$$

Par analogie avec l'épaisseur de déplacement, on peut déterminer l'épaisseur de quantité de mouvement δ^{**} comme un tronçon par lequel, lors de l'écoulement d'un fluide parfait, passerait une quantité de mouvement par seconde égale à la perte de la quantité de mouvement dans la section de la couche limite aux dépens de l'action de freinage des forces de frottement.

Dans le cas du contournement symétrique à l'axe des corps de révolution, la faible épaisseur de la couche limite par rapport au rayon de courbure R_x fait que l'équation différentielle du mouvement reste la même que celle de l'écoulement plan. Il n'y a que la forme de l'équation de continuité qui change

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x R_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y R_x) = 0.$$

Ceci modifie dans une certaine mesure l'équation intégrale des impulsions qui dans le cas symétrique à l'axe devient

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{\delta^{**}}{w_\infty}\frac{dw_\infty}{dx}(2+H) + \left(\frac{1}{\rho_\infty}\frac{d\rho_\infty}{dx} + \frac{1}{R_x}\frac{dR_x}{dx}\right)\delta^{**} - \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty} = \frac{\tau_p}{\rho_\infty w_\infty^2}. \quad \text{(VI.50)}$$

Ici

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty}\right)\left(1 \pm \frac{y}{R_x}\cos\beta\right) dy;$$

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty}\left(1 - \frac{w_x}{w_\infty}\right)\left(1 \pm \frac{y}{R_x}\cos\beta\right) dy;$$

R_x, le rayon de la section droite du corps; β, l'angle entre la tangente au méridien et l'axe; x, y, les axes des coordonnées orientées: x, le long de la section méridionale; y, suivant la normale au profil.

L'équation intégrale de l'énergie se déduit d'une façon analogue. A cet effet l'équation différentielle de l'énergie, écrite sous la forme (VI.10), est transformée à l'aide de l'équation de continuité (VI.2) pour être ramenée à la forme

$$c_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho w_x T^* + \frac{\partial}{\partial y}\rho w_y T^*\right) = \frac{\partial}{\partial y}\lambda\frac{\partial}{\partial y}\left\{T^* + (\mathrm{Pr}-1)\frac{w_x^2}{2c_p}\right\}.$$

Multiplions les deux membres de l'équation de continuité par la valeur de l'enthalpie de freinage à la frontière extérieure de la couche limite

$$h_\infty^* = c_p T + w_\infty^2/2 = c_p T_\infty^*,$$

qui, dans la plupart des cas, peut être considérée comme constante

$$c_p\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x T_\infty^*) + c_p\frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y T_\infty^*) = 0.$$

Retranchons terme à terme de l'équation de l'énergie la relation précédente et intégrons l'expression obtenue à travers la couche limite

$$c_p\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}\rho w_x (T^* - T_\infty^*)\,dy + c_p\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\rho w_y (T^* - T_\infty^*)\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial y}\left[T^* + (\mathrm{Pr}-1)\frac{w_x^2}{2c_p}\right]\right\}dy.$$

En utilisant les conditions aux limites pour $y = 0$ $w_y = w_p$; $T^* = T_p$; $\rho = \rho_p$ et pour $y = \infty$ $w_y = 0$; $w_x = w_\infty$; $T^* = T_\infty^*$, transformons les intégrales de l'équation obtenue

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\rho w_y (T^* - T_\infty^*)\,dy = \rho w_y (T^* - T_\infty^*)\Big|_0^\infty = -\rho_p w_p (T_p - T_\infty^*),$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y}\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial y}\left[T^* + (\mathrm{Pr}-1)\frac{w_x^2}{2c_p}\right]\right\}dy = \lambda\frac{\partial T^*}{\partial y}\Big|_0^\infty + \lambda\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Pr}-1)\frac{w_x^2}{2c_p}\Big|_0^\infty.$$

Dans la dernière intégrale $\lambda\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{Pr}-1)\frac{w_x^2}{2c_p}\Big|_0^\infty = 0$, du fait que sur la paroi $w_x = 0$, et à la frontière extérieure de la couche limite, $w_x = w_\infty$.

En introduisant la notion de l'épaisseur d'énergie (d'enthalpie)

$$\delta_t^{**}=\frac{\int\limits_0^\infty \rho w_x (T^*-T^*_\infty)\,dy}{\rho_\infty w_\infty (T_p-T^*_\infty)}=\int\limits_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty}\left(1-\frac{T_p-T^*}{T_p-T^*_\infty}\right)dy, \quad \text{(VI.51)}$$

dont le sens physique est rendu clair par la figure VI.3, récrivons l'intégrale sous la forme

$$\int\limits_0^\infty \rho w_x (T^*_\infty - T^*)\,dy = \delta_t^{**}\rho_\infty w_\infty (T_p - T^*_\infty).$$

Tout comme dans la déduction de l'équation intégrale des impulsions, admettons que les opérations de dérivation et d'intégration puissent être changées de place. En portant les valeurs des intégrales dans l'équation initiale et en remarquant que $\lambda \left.\frac{\partial T^*}{\partial y}\right|_0^\infty = q_p$, on obtient

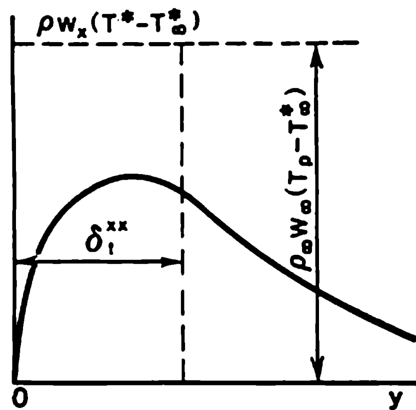


Fig. VI.3. Représentation graphique de l'épaisseur d'énergie

$$\frac{d}{dx}\,\delta_t^{**}\rho_\infty w_\infty \Delta T = \frac{q_p + c_p\rho_p w_p \Delta T}{c_p}. \quad \text{(VI.52)}$$

Ici $\Delta T = T_p - T^*_\infty$.

Dérivons le premier membre de l'équation obtenue, en retenant que toutes les grandeurs sous le signe de dérivation sont fonction de x:

$$\frac{d}{dx}\,\delta_t^{**}\rho_\infty w_\infty \Delta T = \rho_\infty w_\infty \Delta T \left\{\frac{d\delta_t^{**}}{dx} + \right.$$
$$\left. +\delta_t^{**}\left[\frac{1}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{dx} + \frac{1}{w_\infty}\frac{dw_\infty}{dx} + \frac{1}{\rho_\infty}\frac{d\rho_\infty}{dx}\right]\right\}.$$

Introduisons le nombre de Stanton

$$\mathrm{St} = q_p/(c_{p\infty}\rho_\infty w_\infty \Delta T),$$

qui permet de transformer la relation intégrale de l'énergie de la couche limite et la ramener à la forme définitive

$$\mathrm{St} = \frac{d\delta_t^{**}}{dx} + \delta_t^{**}\left(\frac{1}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{dx} + \frac{1}{w_\infty}\frac{dw_\infty}{dx} + \frac{1}{\rho_\infty}\frac{d\rho_\infty}{dx}\right) - \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty}. \quad \text{(VI.53)}$$

En introduisant le nombre M_∞ suivant la relation (VI.47) dans le deuxième membre de l'expression (VI.53), on obtient

$$\mathrm{St} = \frac{d\delta_t^{**}}{dx} + \delta_t^{**}\left[\frac{1}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{dx} + \frac{1}{w_\infty}\frac{dw_\infty}{dx}(1-M_\infty^2)\right] - \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty}. \quad \text{(VI.54)}$$

On voudrait parfois, comme dans le cas des gaz en réaction, d'avoir la relation intégrale de l'énergie écrite à l'aide de l'enthalpie totale du freinage $\overline{h}_0$. En utilisant les transformations analogues et en intégrant l'équation différentielle de l'énergie écrite à l'aide de l'enthalpie totale (VI.34) par rapport à y, on obtient la relation intégrale suivante

$$\frac{d}{dx}(\delta_h^{**}\rho_\infty w_\infty \Delta\overline{h}) = q_p + \rho_p w_p \Delta\overline{h},$$

où $\Delta\overline{h} = \overline{h}_p - \overline{h}_{0\infty}$; δ_h^{**}, l'épaisseur intégrale d'énergie

$$\delta_h^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty}\left(1 - \frac{\overline{h}_p - \overline{h}_0}{\overline{h}_p - \overline{h}_{0\infty}}\right) dy;$$

$$q_p = -\left[\frac{\mu}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \overline{h}_0}{\partial y} + \sum_i \rho_i D_i \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Le}}\right)(\overline{h}_i - h_i^*)\frac{\partial C_i}{\partial y}\right]_p .$$

Introduisons le nombre St défini par la relation

$$\mathrm{St} = q_p/(\Delta h \rho_\infty w_\infty), \quad \text{(VI.55)}$$

et dérivons par rapport à x pour obtenir finalement

$$\mathrm{St} = \frac{d\delta_h^{**}}{dx} + \delta_h^{**}\left[\frac{1}{\Delta\overline{h}}\frac{d\Delta\overline{h}}{dx} + \frac{1}{w_\infty}\frac{dw_\infty}{dx}(1-M_\infty^2)\right] - \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty}. \quad \text{(VI.56)}$$

Dans le cas du contournement des corps symétriques à l'axe, la relation intégrale de l'énergie comportera en plus, tout comme l'équation des impulsions, le rayon R_x:

$$\mathrm{St} = \frac{d\delta_t^{**}}{dx} + \delta_t^{**}\left(\frac{1}{w_\infty}\frac{dw_\infty}{dx} + \frac{1}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{dx} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\rho_\infty}\frac{d\rho_\infty}{dx} + \frac{1}{R_x}\frac{dR_x}{dx}\right) - \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty}. \quad \text{(VI.57)}$$

$$\text{Ici } \delta_t^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty}\left(1 - \frac{T_p - T^*}{T_p - T_\infty^*}\right)\left(1 \pm \frac{y}{R_x}\cos\beta\right) dy.$$

En intégrant l'équation de la diffusion de l'i-ième composante (VI.19) suivant la section de la couche limite et en tenant compte de

l'équation de la continuité, on obtient la relation intégrale de la matière

$$\frac{d\delta_D^{**}}{dx}+\frac{\delta_D^{**}}{\rho_\infty w_\infty}\frac{1}{\Delta C_i}\frac{d}{dx}(\rho_\infty w_\infty \Delta C_i)-\frac{j_p}{\rho_\infty w_\infty}=\mathrm{St}_D, \quad \text{(VI.58)}$$

où $\Delta C_i = C_{ip} - C_{i\infty}$ est la différence des fractions de masse de l'élément diffusant sur la paroi et dans le courant; $\delta_D^{**} = \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_\infty w_\infty}\left(1-\frac{C_{ip}-C_i}{C_{ip}-C_{i\infty}}\right)dy$, l'épaisseur de la perte de la matière; $\mathrm{St}_D=\frac{j_{ip}}{\rho_\infty w_\infty (C_{ip}-C_{i\infty})}$, le nombre de diffusion de Stanton.

Les relations intégrales peuvent s'obtenir également en examinant le bilan de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la matière pour un volume élémentaire extrait par deux sections de la couche limite d'un fluide, ce qui témoigne de la validité des relations de cette couche, obtenues aussi bien pour l'écoulement laminaire que pour l'écoulement turbulent.

Dans les relations intégrales des impulsions, de l'énergie et de la matière figurent les grandeurs δ^*, δ^{**} ; δ_t, δ_h^{**}, δ_D^{**}, qui constituent certaines échelles physiques de la couche limite. L'utilisation des grandeurs mentionnées à titre d'échelles est commode du fait qu'à la différence de l'épaisseur de la couche limite, les épaisseurs intégrales ne sont pas liées à l'idée de la couche limite d'épaisseur finie.

La structure de l'équation de l'énergie (VI.54), (VI.56), de la matière (VI.58) et des impulsions (VI.48) montre que les plus importantes sont les grandeurs δ^{**}, δ_t^{**}, δ_h^{**}, δ_D^{**}. Sous ce rapport, il est commode d'écrire les nombres caractéristiques Re des couches limites dynamique, thermique et de diffusion sous la forme [19]:

$$\mathrm{Re}^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta^{**}/\mu_\infty; \quad \mathrm{Re}_t^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta_t^{**}/\mu_\infty;$$
$$\mathrm{Re}_h^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta_h^{**}/\mu_\infty; \quad \mathrm{Re}_D = \rho_\infty w_\infty \delta_D^{**}/\mu_\infty.$$

Introduisons dans les relations intégrales (VI.49), (VI.53) et (VI.58), composées pour le cas du contournement de la surface par un courant plan incompressible, au lieu des épaisseurs de quantité de mouvement, d'énergie et de la perte de la matière, les nombres Re correspondants.

Après des transformations peu compliquées, on obtient

$$\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{dX}+f\,\mathrm{Re}_L\,(2+H)=\mathrm{Re}_L\left(\frac{C_f}{2}+\frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty}\right); \qquad \text{(VI.59)}$$

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_t^{**}}{dX}+\frac{\mathrm{Re}_t^{**}}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{dX}=\mathrm{Re}_L\left(\mathrm{St}+\frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty}\right); \qquad \text{(VI.60)}$$

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_D}{dX}+\frac{\mathrm{Re}_D^{**}}{\Delta C_i}\frac{d\Delta C_i}{dX}=\mathrm{Re}_L\left(\mathrm{St}_D+\frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty}\right), \qquad \text{(VI.61)}$$

où Re_L est le nombre de Reynolds défini d'après la dimension caractéristique L de la surface contournée; $X = x/L$, la distance relative; $C_f = 2\tau_p/(\rho_\infty w_\infty^2)$, le coefficient de frottement.

Si l'on pose

$$\mathrm{Re}_L = \rho_\infty w_\infty L/\mu_{0\,\infty}; \quad \mathrm{Re}^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta^{**}/\mu_{0\,\infty}; \quad \mathrm{Re}_h^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta_h^{**}/\mu_{0\infty};$$

$$\mathrm{Re}_D^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta_D^{**}/\mu_{0\,\infty}; \quad \Delta\bar{h} = \bar{h}_p - \bar{h}_{0\,\infty},$$

les équations intégrales de l'énergie, des impulsions et de la matière pour le courant compressible d'un gaz chimiquement réagissant conservent la forme des équations (VI.59)-(VI.61). Ici $\mu_{0\,\infty}$ est la valeur de la viscosité dynamique calculée d'après les paramètres de freinage du courant non perturbé (cf. fig. VI.1).

En particulier, l'équation de l'énergie (VI.56) permet de tirer la relation intégrale de l'énergie pour un gaz réagissant chimiquement, qui coïncide exactement d'après la forme avec l'équation (VI.60)

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_h^{**}}{dX}+\frac{\mathrm{Re}_h^{**}}{\Delta\bar{h}}\frac{d\Delta\bar{h}}{dX}=\mathrm{Re}_L\left(\mathrm{St}+\frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty}\right).$$

Les équations intégrales obtenues peuvent être résolues si l'on connaît ce qu'on appelle les lois de résistance, d'échange de chaleur et de masse, qui, dans le cas général, peuvent être mises sous la forme

$$C_f = f_f\,(\mathrm{Re}^{**},\ f,\ \mathrm{M}_\infty,\ T_p/T_\infty,\ \ldots);$$

$$\mathrm{St} = f_S\left(\mathrm{Re}_t^{**},\ \frac{1}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{dX},\ \ \mathrm{M}_\infty,\ T_p/T_\infty\ \ldots\right),$$

$$\mathrm{St}_D = f_D\left(\mathrm{Re}_D^{**},\ \frac{1}{\Delta C_i}\frac{d\Delta C_i}{dX},\ \mathrm{M}_\infty,\ \ldots\right).$$

La forme de ces équations dépend en premier lieu du régime de l'écoulement du fluide dans la couche limite. Comme nous le montrerons au § VI.2, pour l'écoulement laminaire, sous les conditions aux limites définies, les lois de frottement, d'échange de chaleur et de masse peuvent s'obtenir analytiquement. Dans le cas du régime turbulent, ces lois se déduisent des théories semi-empiriques de la turbulence, tout en utilisant des données expérimentales.

Dans ce qui suit nous montrerons que les lois de frottement, d'échange de chaleur et de masse sont conservatives par rapport à la variation des conditions aux limites. Obtenues pour les « conditions standard », c'est-à-dire pour le cas du contournement sans gradient d'une plaque par un courant incompressible à température constante et de la concentration de la matière sur la paroi, elles peuvent être utilisées également pour des conditions plus compliquées.

L'intégration des équations des impulsions, de l'énergie et de la diffusion rend bien compte de toute la diversité des conditions aux limites.

Introduisons dans les deuxièmes membres des équations intégrales (VI.59)-(VI.61) les valeurs du coefficient de frottement C_{f0}, des nombres thermique St_0 et de diffusion St_{D0} de Stanton, obtenus pour des conditions « standard » et les mêmes nombres Re^{**}, établis par rapport aux épaisseurs correspondantes

$$\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{dX} + f\,\mathrm{Re}_L(2+H) = \mathrm{Re}_L\frac{C_{f0}}{2}(\Psi + b)\,; \qquad \text{(VI.62)}$$

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_t^{**}}{dX} + \frac{\mathrm{Re}_t^{**}}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{dX} = \mathrm{Re}_L\,\mathrm{St}_0(\Psi_S + b_t)\,; \qquad \text{(VI.63)}$$

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_D^{**}}{dX} + \frac{\mathrm{Re}_D^{**}}{\Delta C_i}\frac{d\Delta C_i}{dX} = \mathrm{Re}_L\,\mathrm{St}_{D0}(\Psi_D + b_D). \qquad \text{(VI.64)}$$

Ici $\Psi = (C_f/C_{f_0})_{\mathrm{Re}^{**}}$ est la loi de frottement relative pour $\mathrm{Re}^{**} = \mathrm{idem}$; $\Psi_S = (\mathrm{St}/\mathrm{St}_0)_{\mathrm{Re}_t^{**}}$, la loi relative d'échange de chaleur pour $\mathrm{Re}_t^{**} = \mathrm{idem}$; $\Psi_D = (\mathrm{St}_D/\mathrm{St}_{D0})_{\mathrm{Re}_D^{**}}$, la loi relative de la diffusion pour $\mathrm{R}_D^{**} = \mathrm{idem}$; $b = \frac{2\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty C_{f0}}$, le paramètre de perméabilité de la paroi rapporté à C_{f0}; $b_t = \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty \mathrm{St}_0}$, le paramètre thermique de perméabilité rapporté à St_0; $b_D = \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty \mathrm{St}_{D0}}$, le paramètre diffusif de perméabilité rapporté à St_{D0}.

§ VI.2. Convection forcée en régime laminaire

1. Echange de chaleur et de masse lors du contournement d'une plaque par le courant d'un fluide incompressible

Examinons une plaque semi-indéfinie contournée longitudinalement par le courant stationnaire d'un fluide incompressible à propriétés physiques constantes. Posons que la température de la surface de la plaque est constante et égale à T_p. Admettons que la surface de la plaque est le siège de la diffusion de la matière, cette diffusion étant pourtant telle que la plaque peut être considérée

comme imperméable. La concentration C_p de la matière diffusée sur la paroi est considérée comme constante.

Plaçons l'origine des coordonnées au point d'attaque de la plaque (fig. VI.4) et orientons l'axe des x le long de la plaque.

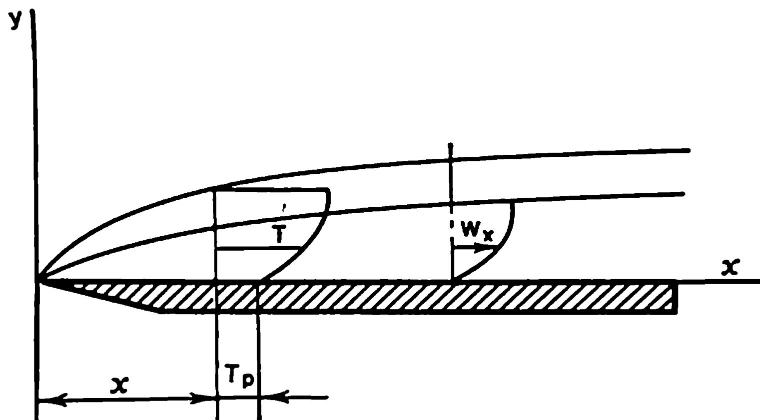


Fig. VI.4. Schématisa ion du contournement d'une plaque

La plaque étant très mince et placée dans le sens du courant, on peut admettre que $dp/dx = 0$.

Dans ce cas les équations différentielles de la couche limite (VI.2), (VI.5), (VI.7) et (VI.19) (sans tenir compte de la dissipation de l'énergie et de la diffusion thermique) s'écrivent

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0;$$

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2};$$

$$w_x \frac{\partial C}{\partial x} + w_y \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \qquad \text{(VI.65)}$$

et les conditions aux limites

pour $y = 0$ $\quad w_x = 0,\ w_y = 0,\ T = T_p;\ C = C_p;$

pour $y = \infty$ $\quad w_x = w_\infty,\ T = T_\infty,\ C = C_\infty.$

Si les nombres Pr = Le = Sc = 1, l'analyse des équations (VI.65) permet de révéler d'emblée dans la couche limite lors du contournement d'une plaque la correspondance entre la distribution de la vitesse, de la température et de la concentration. Dans ce cas les équations des couches limites dynamique, thermique et diffusive deviennent identiques, ce qui signifie que pour de faibles vitesses de contournement de la plaque par le courant d'un fluide

incompressible et en présence d'échange de chaleur et de masse, dans la couche limite les distributions des vitesses, des températures et des concentrations sont identiques

$$w_x/w_\infty = (T_p - T)/(T_p - T_\infty) = (C_p - C)/(C_p - C_\infty).$$

Ce résultat est d'un grand intérêt pratique, du fait que pour la plupart des gaz les valeurs des nombres Pr, Sc et Le sont proches de l'unité.

Lors de l'écoulement d'un fluide incompressible à propriétés physiques constantes le champ des vitesses ne dépend pas du champ thermique et du champ des concentrations. On peut donc résoudre d'abord l'équation du mouvement, et utiliser les résultats obtenus pour la résolution des équations de l'énergie et de la diffusion.

Le problème posé du contournement d'une plaque indéfinie ne contient pas de longueur caractéristique; on peut donc supposer qu'avec les échelles choisies de façon convenable, les profils de la vitesse longitudinale sont identiques à des distances différentes du bord d'attaque de la plaque.

Retenons comme échelle de la vitesse celle de l'écoulement potentiel w_∞, et comme échelle de la longueur transversale, l'épaisseur de la couche limite δ. Alors, la condition de l'identité des profils de la vitesse peut s'écrire

$$w_x/w_\infty = \varphi(\eta),$$

où $\eta = y/\delta$.

La fonction φ doit être la même pour toutes les distances. En évaluant l'épaisseur de la couche limite nous avons trouvé dans ce qui précède (VI.37):

$$\delta \sim \sqrt{\nu L/w_\infty}.$$

On peut donc adopter comme échelle des y, $\sqrt{\nu x/w_\infty}$, d'où

$$\eta = y\sqrt{w_\infty/(\nu x)}. \qquad \text{(VI.66)}$$

En introduisant la fonction de courant $\Psi(x, y)$ qui vérifie l'équation de la continuité, on admet que

$$w_x = \partial\Psi/\partial y; \quad w_y = -\partial\Psi/\partial x. \qquad \text{(VI.67)}$$

En se conformant à Blasius, trouvons l'échelle de la fonction de courant

$$\Psi = \int_0^y w_x\,dy.$$

Introduisons dans cette expression les variables sans dimensions $\varphi(\eta)$ et η pour obtenir

$$\Psi = \sqrt{\nu x w_\infty} \int_0^\eta \varphi(\eta)\, d\eta = \sqrt{\nu x w_\infty} \cdot f(\eta), \qquad \text{(VI.68)}$$

où $f(\eta)$ est la fonction de courant sans dimensions.

Si on en tient compte,

$$w_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = w_\infty f'(\eta); \qquad \text{(VI.69)}$$

$$w_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -f(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\nu x w_\infty} - \sqrt{\nu x w_\infty}\, f'(\eta) \frac{d\eta}{dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{w_\infty \nu}{x}} [f'(\eta)\eta - f(\eta)]. \qquad \text{(VI.70)}$$

En portant les expressions obtenues dans l'équation du mouvement et en effectuant les réductions nécessaires, on trouve

$$f \cdot f'' + 2f''' = 0 \qquad \text{(VI.71)}$$

à conditions aux limites $\eta = 0$, $f = 0$, $f' = 0$; $\eta = \infty$, $f' = 1$.

(VI.71) est une équation différentielle non linéaire ordinaire du troisième ordre. Cette équation peut être résolue soit par la décomposition en série de la fonction $f(\eta)$, soit par des méthodes numériques. Le tableau VI.2 donne les valeurs de la fonction $f(\eta)$ et de ses dérivées calculées par Howart [17]. Les courbes de la variation de la vitesse w_x et w_y calculées d'après les données du tableau sont représentées respectivement sur les figures VI.5 et VI.6. Sur la figure VI.5 la courbe de calcul est comparée avec les résultats des recherches expérimentales de Nikouradzé.

Les résultats de la résolution permettent de calculer toutes les caractéristiques nécessaires de la couche limite dynamique. Ainsi, la contrainte de frottement sur la paroi

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_{y=0} = \mu w_\infty \frac{\partial}{\partial \eta}\left[f'(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y}\right] = \mu w_\infty \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}}\, f''(0). \qquad \text{(VI.72)}$$

D'après le tableau VI.2 on trouve que $f''(0) = 0{,}332$.

Par conséquent, la contrainte tangentielle sans dimensions sur la paroi est

$$\tau_p/(\rho w_\infty^2) = 0{,}332/\sqrt{\mathrm{Re}_x}, \qquad \text{(VI.73)}$$

et le coefficient de frottement local

$$c_{f0} = 2\tau_p/(\rho w_\infty^2) = 0{,}664/\sqrt{\mathrm{Re}_x}. \qquad \text{(VI.74)}$$

Sur la figure VI.7 les données expérimentales relatives au frottement sur une plaque sont comparées avec la formule (VI.74).

Tableau VI.2

Valeurs de la fonction $f(\eta)$ et de ses dérivées pour la couche limite d'une plaque plane contournée dans le sens longitudinal

$\eta = y\sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{w_x}{w_\infty}$	f''	$\eta = y\sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{w_x}{w_\infty}$	f''
0	0	0	0,33206	4,6	2,88826	0,98269	0,02948
0,2	0,00664	0,066410	0,33199	4,8	3,08534	0,98779	0,02187
0,4	0,02656	0,13277	0,33147	5,0	3,28329	0,99155	0,01591
0,6	0,05974	0,19894	0,33008	5,2	3,48189	0,99425	0,01134
0,8	0,10611	0,26471	0,32739	5,4	3,68094	0,99616	0,00793
1,0	0,16557	0,32979	0,32301	5,6	3,88031	0,99748	0,00543
1,2	0,23795	0,39378	0,31659	5,8	4,07990	0,99838	0,00365
1,4	0,32298	0,45627	0,30787	6,0	4,27964	0,99898	0,00240
1,6	0,42032	0,51676	0,29667	6,2	4,47948	0,99937	0,00155
1,8	0,52952	0,57477	0,28293	6,4	4,67938	0,99961	0,00098
2,0	0,65003	0,62977	0,26675	6,6	4,87931	0,99977	0,00061
2,2	0,78120	0,68132	0,24835	6,8	5,07928	0,99987	0,00037
2,4	0,92230	0,72899	0,22809	7,0	5,27926	0,99992	0,00022
2,6	1,07252	0,77246	0,20646	7,2	5,47925	0,99996	0,00013
2,8	1,23099	0,81152	0,18401	7,4	5,67924	0,99998	0,00007
3,0	1,39682	0,84605	0,16136	7,6	5,87924	0,99999	0,00004
3,2	1,56911	0,87609	0,13913	7,8	6,07923	1,00000	0,00002
3,4	1,74696	0,90177	0,11788	8,0	6,27923	1,00000	0,00001
3,6	1,92954	0,92333	0,09809	8,2	6,47923	1,00000	0,00001
3,8	2,11605	0,94112	0,08013	8,4	6,67923	1,00000	0,00000
4,0	2,30576	0,95552	0,06424	8,6	6,87923	1,00000	0,00000
4,2	2,49806	0,96696	0,05052	8,8	7,07923	1,00000	0,00000
4,4	2,69238	0,97587	0,03897				

D'une façon analogue on peut calculer toutes les autres caractéristiques de la couche limite. Ainsi, en adoptant comme épaisseur de la couche limite la distance à la paroi $w_x = 0{,}99\ w_\infty$, on trouve dans le tableau VI.2 que $\eta \sim 5{,}0$. Par conséquent, l'épaisseur de la couche limite

$$\delta \cong 5{,}0\sqrt{\nu x/w_\infty}.$$

L'épaisseur de déplacement peut se calculer d'après l'équation

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{w_x}{w_\infty}\right) dy = \sqrt{\frac{\nu x}{w_\infty}} \int_{\eta=0}^{\eta=\infty} (1 - f'(\eta))\, d\eta =$$

$$= \sqrt{\frac{\nu x}{w_\infty}}\,(\eta_1 - f(\eta_1)).$$

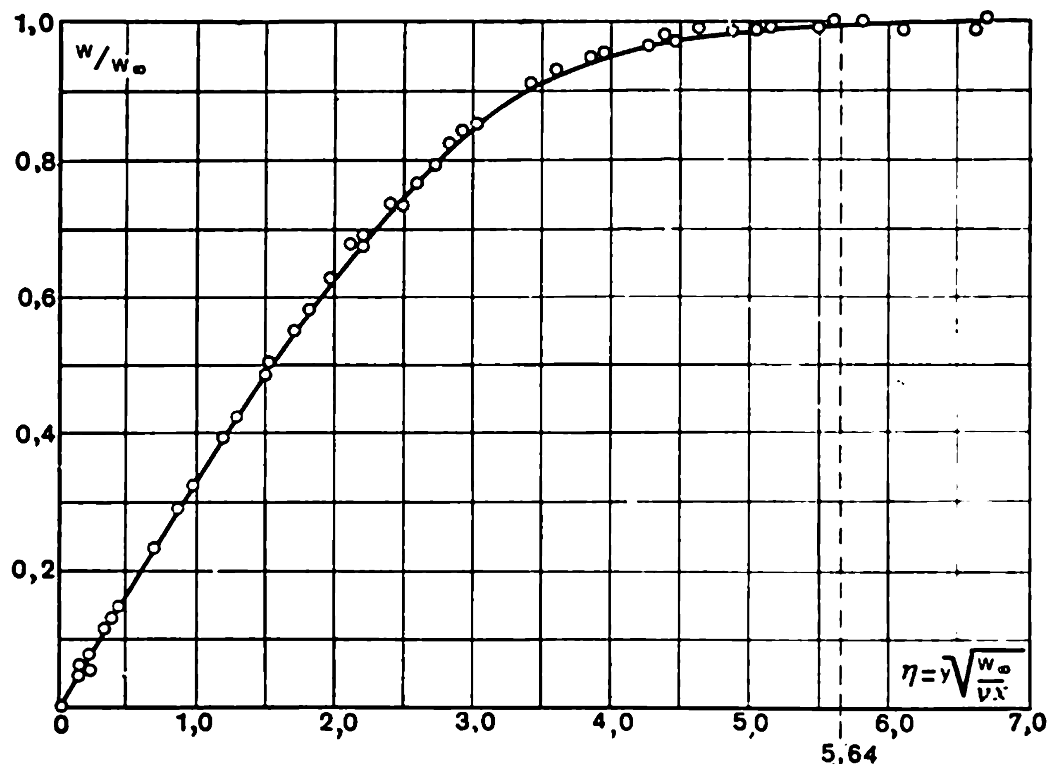


Fig. VI.5. Distribution des vitesses dans une couche limite laminaire sur une plaque

○ — d'après les mesures de Nikouradzé; ——— — calcul suivant Blasius

Ici la valeur de η_1 correspond à une valeur quelconque du point qui repose hors de la couche limite. On trouve dans le tableau VI.2

$$\eta_1 - f(\eta_1) = 1{,}73,$$

donc

$$\delta^* = 1{,}73 \sqrt{\nu x / w_\infty}. \qquad \text{(VI.75)}$$

D'une façon analogue calculons l'épaisseur de quantité de mouvement

$$\delta^{**} = 0{,}664 \sqrt{\nu x / w_\infty}, \qquad \text{(VI.76)}$$

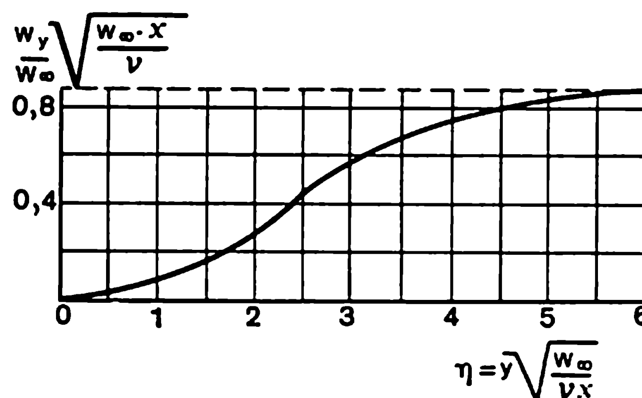


Fig. VI.6. Vitesse transversale dans la couche limite sur une plaque plane

les équations (VI.74), (VI.76) permettent d'obtenir la relation entre le coefficient de frottement et le nombre de Reynolds établi par rapport à l'épaisseur de quantité de mouvement

$$C_{f0} = 0{,}44/\mathrm{Re}^{**}. \qquad \text{(VI.77)}$$

Passons maintenant à la résolution de l'équation de l'énergie. En portant les valeurs de w_x et w_y calculées d'après les relations

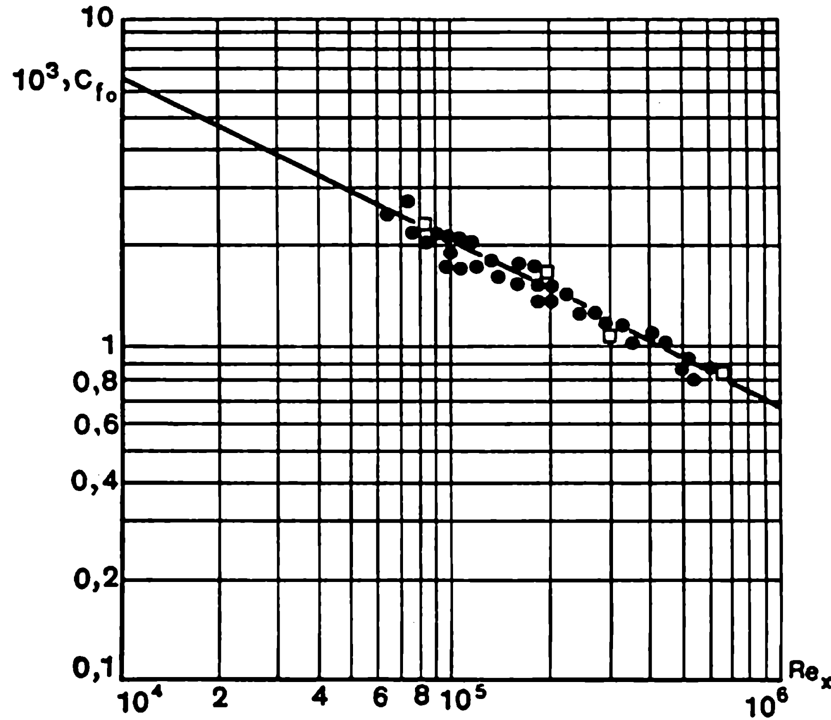


Fig. VI.7. Coefficient de frottement local $C_{f0} = \dfrac{2\tau_p}{\rho_\infty w_\infty^2}$ d'une plaque plane contournée dans le sens longitudinal:

□ — mesure de la contrainte tangentielle sur la paroi d'après le profil des vitesses;
● — mesures directes de la contrainte tangentielle sur la paroi

(VI.69), (VI.70) dans l'équation de l'énergie (VI.65) et en introduisant la relation des différences des températures

$$\vartheta = T_p - T/T_p - T_\infty, \qquad \text{(VI.78)}$$

on obtient l'équation différentielle ordinaire

$$\vartheta''(\eta) + \frac{\mathrm{Pr}}{2} f(\eta)\, \vartheta'(\eta) = 0 \qquad \text{(VI.79)}$$

à conditions aux limites: pour $\eta = 0$ $\vartheta = 0$;

pour $\eta = \infty$ $\vartheta = 1$. (VI.80)

Cette équation peut être intégrée par séparation des variables

$$\frac{d\vartheta'(\eta)}{d\eta}+\frac{\Pr}{2}f(\eta)\,\vartheta'(\eta)=0;\quad \frac{d\vartheta'(\eta)}{\vartheta'(\eta)}+\frac{\Pr}{2}f(\eta)\,d\eta=0;$$

$$\vartheta'=C_1 e^{-\frac{\Pr}{2}\int\limits_0^\eta f(\eta)\,d\eta};$$

$$\vartheta=C_1\int\limits_0^\eta e^{-\frac{\Pr}{2}\int\limits_0^\eta f(\eta)\,d\eta}\,d\eta+C_2.$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à partir des conditions aux limites. De la première condition aux limites (VI.80) on tire que $C_2 = 0$. La deuxième condition aux limites entraîne

$$C_1=1\Bigg/\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\Pr}{2}\int\limits_0^\eta f(\eta)\,d\eta}\,d\eta.$$

De la sorte,

$$\vartheta(\eta)=\frac{\int\limits_0^\eta e^{-\frac{1}{2}\Pr\int\limits_0^\eta f(\eta)\,d\eta}\,d\eta}{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\Pr\int\limits_0^\eta f(\eta)\,d\eta}\,d\eta}. \qquad \text{(VI.81)}$$

Sous cette forme l'équation a été obtenue pour la première fois par Polhausen. En remarquant dans (VI.71) que

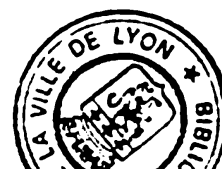
$$f=-2f'''/f'',$$

et

$$\int\limits_0^\eta f(\eta)\,d\eta=-2\int\limits_0^\eta \frac{f'''(\eta)}{f''(\eta)}\,d\eta=-2\ln\frac{f''(\eta)}{f''(0)}$$

et que

$$e^{\frac{1}{2}\Pr\int\limits_0^\eta f(\eta)\,d\eta}=\left[\frac{f''(\eta)}{f''(0)}\right]^{\Pr},$$



on obtient la solution de l'équation (VI.81) sous sa forme définitive

$$\vartheta(\eta) = \frac{\int_0^\eta [f''(\eta)]^{\mathrm{Pr}}\, d\eta}{\int_0^\infty [f''(\eta)]^{\mathrm{Pr}}\, d\eta}. \tag{VI.82}$$

Pour Pr = 1, (VI.82) implique que

$$\vartheta(\eta) = (T_p - T)/(T_p - T_\infty) = f'(\eta)/f'(\infty) = w_x/w_\infty,$$

ce qui traduit l'identité de la distribution de la différence de température sans dimensions ϑ et des vitesses dans toute section de la couche limite.

Pour calculer le coefficient local de transmission de chaleur, utilisons l'égalité

$$\alpha_x (T_p - T_\infty) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p,$$

d'où

$$\alpha_x = -\frac{\lambda}{T_p - T_\infty}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p = -\frac{\lambda}{T_p - T_\infty}\sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}}\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}. \tag{VI.83}$$

Le gradient de température sur la paroi

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = -(T_p - T_\infty)\left(\frac{\partial \vartheta(\eta)}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}. \tag{VI.84}$$

La valeur du gradient de température relatif se trouve par dérivation de l'équation (VI.82)

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \frac{[f''(0)]^{\mathrm{Pr}}}{\int_0^\infty [f''(\eta)]^{\mathrm{Pr}}\, d\eta} = \frac{0{,}332^{\mathrm{Pr}}}{\int_0^\infty [f''(\eta)]^{\mathrm{Pr}}\, d\eta} = a_1(\mathrm{Pr}). \tag{VI.85}$$

Les valeurs de a_1 (Pr) sont calculées par Polhausen pour différents nombres Pr

Pr	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	7,0	10,0	15,0
a_1	0,276	0,293	0,307	0,320	0,332	0,334	0,645	0,730	0,835

La grandeur a_1 (Pr) est facilement approximée par la relation suivante

$$a_1 = 0{,}332\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}. \tag{VI.86}$$

En portant les valeurs de $\partial T/\partial\eta$, compte tenu de la relation (VI.86), dans l'équation (VI.83), on obtient

$$\alpha_x = 0{,}332\lambda \sqrt[3]{\mathrm{Pr}} \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu x}}. \qquad \text{(VI.87)}$$

La moyenne du coefficient de transmission de chaleur sur la longueur L peut s'obtenir à partir de l'équation

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L}\int_0^L \alpha_x\,dx = 0{,}664\lambda \sqrt[3]{\mathrm{Pr}} \sqrt{\frac{w_\infty}{\nu L}}. \qquad \text{(VI.88)}$$

En introduisant dans les formules (VI.87), (VI.88) les coefficients sans dimensions de transmission de chaleur sous la forme du nombre de Nusselt et en remarquant que $\mathrm{Re}_L = \frac{\rho_\infty w_\infty L}{\mu_\infty}$, on trouve finalement

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}332 \sqrt[3]{\mathrm{Pr}} \sqrt{\mathrm{Re}_x}; \qquad \text{(VI.89)}$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}664 \sqrt[3]{\mathrm{Pr}} \sqrt{\mathrm{Re}_L}. \qquad \text{(VI.90)}$$

En utilisant l'équation (VI.89), on obtient sans peine la loi d'échange de chaleur. L'équation intégrale de l'énergie pour les conditions envisagées ΔT = const, w_∞ = const, se met sous la forme

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{d\,\mathrm{Re}_x} = \mathrm{St}_0. \qquad \text{(VI.91)}$$

L'équation (VI.89) amène

$$\mathrm{St}_0 = 0{,}332/\sqrt{\mathrm{Re}_x}\mathrm{Pr}^{2/3}. \qquad \text{(VI.92)}$$

En portant (VI.92) dans l'équation (VI.91) et en intégrant, on obtient la loi d'échange de chaleur pour la couche limite laminaire

$$\mathrm{St}_0 = \frac{0{,}22}{\mathrm{Re}_T^{**}\mathrm{Pr}^{4/3}}. \qquad \text{(VI.93)}$$

D'une façon analogue on peut résoudre l'équation de la couche limite diffusive. En introduisant dans l'équation (VI.65) le rapport des différences $\bar{C} = (C - C_p)/(C_\infty - C_p)$, et en utilisant les formules (VI.69), (VI.70), on obtient

$$(\bar{C})''(\eta) + \frac{\mathrm{Sc}}{2} f(\eta)(\bar{C})'(\eta) = 0 \qquad \text{(VI.94)}$$

à conditions aux limites: pour $\eta = 0 \quad \bar{C} = 0$;

$$\text{pour } \eta = \infty \quad \bar{C} = 1. \qquad \text{(VI.95)}$$

De la sorte, l'équation de diffusion (VI.94) à conditions aux limites (VI.95) est identique à l'équation de l'énergie (VI.79), (VI.80). C'est pourquoi les résultats de la résolution de l'équation de l'énergie peuvent être utilisés directement pour un problème sur la diffusion.

En particulier, la formule du nombre de diffusion de Stanton est de la forme

$$\mathrm{St}_D = 0{,}332/\sqrt{\mathrm{Re}_x}\mathrm{Sc}^{2/3}, \qquad (VI.96)$$

respectivement, la loi d'échange de masse de la couche limite laminaire s'écrit

$$\mathrm{St}_D = 0{,}22/(\mathrm{Re}_D^{**}\mathrm{Sc}^{4/3}). \qquad (VI.97)$$

Les formules (VI.74), (VI.92) et (VI.96) impliquent qu'entre le frottement, les échanges de chaleur et de masse il existe une liaison:

$$c_{f0}/2 = \mathrm{St}_0\mathrm{Pr}^{-2/3} = \mathrm{St}_D\mathrm{Sc}^{-2/3}. \qquad (VI.98)$$

2. Résolutions similaires des équations des couches limites dynamique, thermique et diffusive

Si la vitesse à la frontière extérieure de la couche limite varie suivant une loi exponentielle

$$w_\infty = Cx^m, \qquad (VI.99)$$

les solutions similaires de la couche limite laminaire dynamique d'un fluide incompressible peuvent s'obtenir également pour un courant de gradient. La

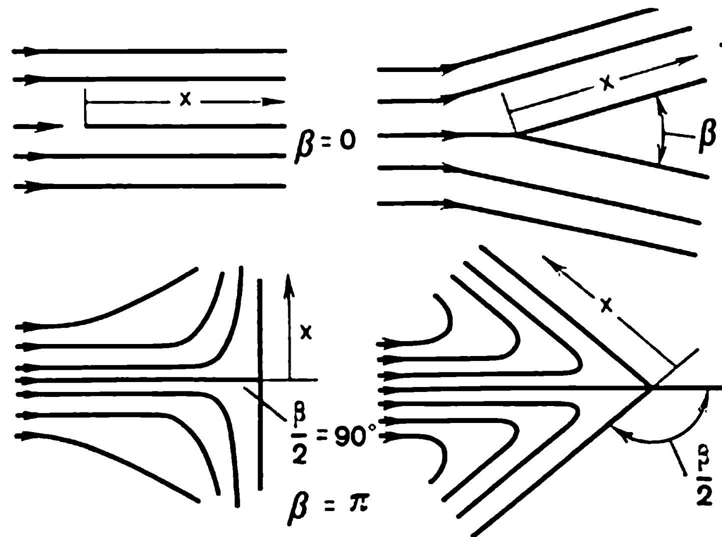


Fig. VI.8. Famille des écoulements près des corps plans et en coin

figure VI.8 visualise certains cas des écoulements plans qui vérifient cette relation; de plus, dans ces cas

$$m = \frac{\beta/\pi}{2-\beta/\pi}. \qquad (VI.100)$$

A la frontière extérieure de la couche limite, le gradient de pression, compte tenu de l'équation de Bernoulli et de la relation (VI.99), est de la forme

$$dp/dx = -\rho C x^m C m x^{m-1} = -\rho w_\infty^2 m/x.$$

Par conséquent, l'équation du mouvement de la couche limite peut s'écrire

$$\nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} - \frac{w_\infty^2 m}{x}. \qquad \text{(VI.101)}$$

La solution similaire de l'équation (VI.101) est cherchée pour les mêmes variables que dans le cas particulier du contournement d'une plaque plane $m = 0$):

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / w_\infty}}; \quad \psi = \sqrt{x \nu w_\infty}\, f(\eta). \qquad \text{(VI.102)}$$

Compte tenu de l'équation de la continuité (VI.66) et de l'équation (VI.99), on obtient

$$w_x = C x^m f'(\eta);$$

$$w_y = -\sqrt{\frac{2\nu C}{m+1} x^{m-1}} \left[\frac{m-1}{2} \eta f'(\eta) + \frac{m+1}{2} f(\eta)\right];$$

$$\eta = \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{C x^{m-1}}{\nu}}. \qquad \text{(VI.103)}$$

En portant les relations (VI.103) et (VI.102) dans (VI.101) on obtient, après des transformations une équation différentielle ordinaire qui témoigne de l'existence d'une solution similaire

$$f''' + \left(\frac{m+1}{2}\right) f f' + m\,[1 - (f')^2] = 0. \qquad \text{(VI.104)}$$

Les conditions aux limites restent les mêmes que dans le problème précédent

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1. \qquad \text{(VI.105)}$$

Certains résultats de la résolution numérique de l'équation (VI.104) sont consignés sur le tableau VI.3.

Le coefficient de frottement se calcule d'après la formule

$$C_f/2 = f''(0)/\sqrt{\mathrm{Re}_x}.$$

Les équations des couches limites diffusive et thermique pour le cas de $w_\infty = Cx^m$ possèdent également des solutions similaires, ce qu'on établit sans peine après avoir porté les formules (VI.103) dans les équations (VI.65). Après des transformations on obtient des équations différentielles ordinaires sous la forme des équations (VI.79) et (VI.94).

Leur résolution sous les conditions aux limites (VI.80) et (VI.95) est la même que dans le cas du contournement d'une plaque pla-

Tableau VI.3

Résolution de l'équation du mouvement d'une couche limite laminaire à propriétés physiques constantes sur une paroi imperméable pour $w_\infty = Cx^m$

β	m	$f''(0)$
π	1,0	1,233 — point critique
1,57	0,333	0,759
0,627	0,111	0,510
0	0	0,332 — plaque plane
−0,314	−0,0476	0,220
−0,624	−0,091	0 — décollement de la couche limite

ne (VI.82), seulement la fonction f est prise à partir des solutions similaires de la couche limite dynamique.

Les valeurs du groupement $\mathrm{Nu}_x \mathrm{Re}_x^{-1/2} = K(\mathrm{Pr}, m)$ obtenues par calcul d'après l'équation

$$K(\mathrm{Pr},\ m) = \left(\frac{m+1}{2}\right)^{1/2} \left\{ \int_0^\infty \exp\left[-\mathrm{Pr} \int_0^\eta f(\eta)\, d\eta\right] d\eta \right\}^{-1}, \qquad \text{(VI.106)}$$

pour certains cas particuliers sont consignées sur le tableau VI.4.

Tableau VI.4

Valeurs du groupement $\mathrm{Nu}_x \mathrm{Re}_x^{-1/2}$ pour les Pr différents. Echange de chaleur dans une couche limite laminaire à propriétés physiques constantes (T_p, T_∞ sont des constantes ; $w_\infty = Cx^m$)

m	Pr				
	0,7	0,8	1,0	5,0	10,0
−0,0753	0,242	0,253	0,272	0,457	0,570
0	0,292	0,307	0,332	0,585	0,730
0,111	0,331	0,348	0,373	0,669	0,851
0,333	0,384	0,403	0,440	0,792	1,013
1,0	0,496	0,523	0,570	1,043	1,344
4,0	0,813	0,858	0,938	1,736	2,236

Ainsi, pour les conditions envisagées, avec la valeur donnée de m et Pr, le groupement $\mathrm{Nu}_x \mathrm{Re}_x^{-1/2}$ reste constant

$$\mathrm{Nu}_x \mathrm{Re}_x^{-1/2} = \mathrm{const.}$$

Par conséquent,

$$\alpha_x = \frac{\text{const}}{\nu^{1/2}} \lambda x^{(m-1)/2}. \qquad \text{(VI.107)}$$

D'après la formule (VI.107) au voisinage du point critique ($m = 1$) le coefficient de transmission de chaleur ne dépend pas de x et

Tableau VI.5

Valeurs de la dérivée $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}$ obtenues par résolution numérique de l'équation (VI.108) pour de différentes valeurs de γ, β et Pr

	γ	Pr			
		0,7	1	5	10
$\beta=0$	−0,50	0	—	—	0
	−0,25	—	—	—	−0,7668
	0,00	−0,4065	—	—	−1,230
	0,25	−0,4989	—	—	−1,513
	0,50	−0,5690	—	—	−1,721
	1,00	−0,6746	—	—	−2,024
	2,00	−0,8218	—	—	−2,445
	3,00	−0,9296	—	—	−2,741
	4,00	−1,017	—	—	−2,974
$\beta=0,199$	−1/2,8	0	0	0	0
	−0,25	−0,1955	−0,2168	−0,3290	−0,3894
	0	−0,2930	−0,3227	−0,4884	−0,5806
	0,25	−0,3476	−0,3820	−0,5760	−0,6848
	0,50	−0,3861	−0,4237	−0,6375	−0,7581
	1,0	−0,4412	−0,4835	−0,7257	−0,8629
	2,0	−0,5134	−0,5622	−0,8424	−1,002
	4,0	−0,6041	−0,6668	−0,9890	−1,176
$\beta=1$	1,0	0	0	0	0
	−0,75	−0,1755	−0,2001	—	−0,4062
	−0,25	−0,4093	−0,4708	—	−1,081
	0	−0,4879	−0,5603	−1,011	−1,286
	0,25	−0,5535	−0,6345	−1,141	−1,451
	0,5	−0,6094	−0,6979	−1,251	−1,510
	1,0	−0,7033	−0,8116	−1,432	−1,818
	2,0	−0,8461	−0,9647	—	−2,159
$\beta=1,6$	−2,5	0	0	0	0
	−1,5	−0,2687	−0,3101	−0,5587	−0,705
	−0,5	−0,4413	−0,5085	−0,9303	−1,186
	0	−0,5062	−0,5828	−1,064	−1,357
	0,5	−0,5626	−0,6468	−1,176	−1,501
	1,0	−0,6120	−0,7031	−1,275	−1,626
	2,0	−0,6975	−0,7995	−1,442	−1,836
	4,0	−0,8315	−0,9512	−1,701	−2,159

reste constant. Pour $m < 1$ (courants ralentis) et $m = 0$ (contournement d'une plaque), le coefficient de transmission de chaleur $\alpha_x = \infty$ pour $x = 0$, et diminue avec l'augmentation de x. Pour $m > 1$ $\alpha_x = 0$; pour $x = 0$, et avec la croissance ultérieure de x, α_x augmente.

Les solutions similaires des équations des couches limites thermique et diffusive s'obtiennent également pour des conditions aux limites plus compliquées, lorsque

$$w_\infty = Cx^m, \quad T_p = T_\infty + ax^\gamma, \quad C_p = C_\infty + ax^\gamma.$$

Compte tenu de ces conditions aux limites, les équations des couches limites thermique et diffusive se transforment en équations différentielles ordinaires

$$\vartheta'' + \Pr\,[1/2\,(m+1)\,f\vartheta' - \gamma f'\,(\vartheta - 1)] = 0;$$
$$\bar{C}'' + \mathrm{Sc}\,[1/2\,(m+1)\,f\bar{C}' - \gamma f'\,(\bar{C} - 1)] = 0. \qquad \text{(VI.108)}$$

L'équation (VI.108) a été intégrée par des méthodes numériques pour de différentes valeurs des paramètres γ, Pr (Sc) et m.

Le tableau VI.5 consigne les résultats de calcul des paramètres $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}$, $\left(\frac{\partial\bar{C}}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}$ caractéristiques respectivement du transfert de chaleur et de masse.

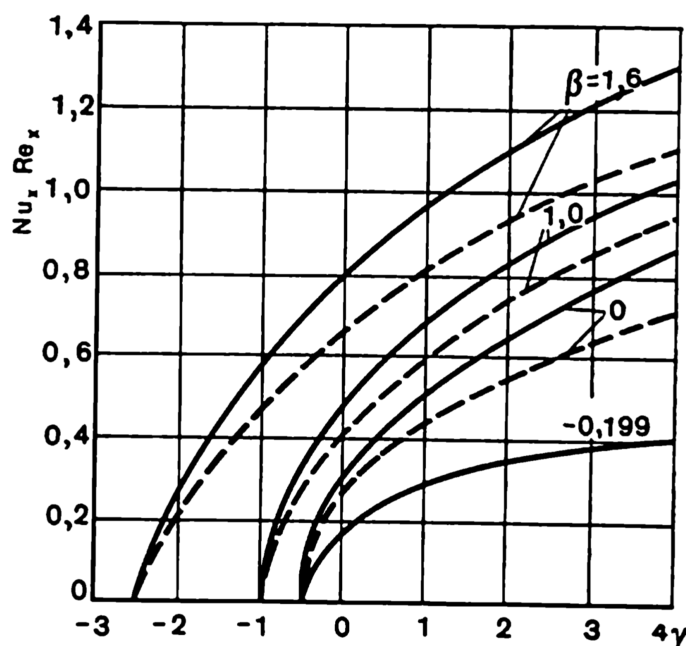


Fig. VI.9. Relation entre le transfert de chaleur et les paramètres β et γ avec Pr = 0,7:

——— calcul d'après la formule (VI.109); — — — — calcul d'après la formule (VI.118)

Il est curieux de noter que pour $\gamma = 1/(\beta - 2)$ le coefficient de transmission de chaleur et de transmission de masse est nul quelle que soit la valeur de Pr, Sc et β.

Pour le cas général de la valeur arbitraire de γ on a

$$\mathrm{Nu}_x \mathrm{Re}_x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2-\beta}} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0};$$

$$\mathrm{Nu}_{Dx} \mathrm{Re}_x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2-\beta}} \left(\frac{\partial \bar{C}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0}. \qquad \text{(VI.109)}$$

La figure VI.9 montre la relation entre le paramètre $\mathrm{Nu}_x\mathrm{Re}_x^{-1/2}$ et γ pour β différents.

La figure VI.9 montre qu'avec la croissance de l'exposant depuis les valeurs négatives jusqu'aux valeurs positives, le coefficient de transmission de chaleur et de masse pour la valeur de β donnée augmente brusquement. Pour β quelconque, il existe une valeur négative de γ telle que la transmission de chaleur (et de masse) locale sur toute la surface du corps soit nulle. Pour des β négatifs petits, jusqu'au cas limite de décollement de la couche limite (—0,199), cette valeur de γ est proche de $-1/2$.

3. Echange de chaleur à une surface curviligne

Lors du contournement d'une surface curviligne, la déformation des lignes de courant fait apparaître le gradient de pression longitudinal et sous des conditions définies (dans le domaine d'écoulement ralenti du fluide) on observe le décollement de la couche limite à partir de la surface contournée. Ce décollement s'accompagne de la formation d'un courant de retour dans la couche limite, celle-ci devenant sensiblement plus épaisse. Dans ces conditions, après le point de décollement, en aval du courant, les équations de la couche limite cessent d'être valides.

Pour expliquer le phénomène de décollement, considérons le contournement d'un cylindre circulaire (fig. VI.10). A partir du point d'attaque A, la pression à la frontière extérieure de la couche limite diminue, alors que la vitesse croît suivant l'équation de Bernoulli jusqu'au point M, où le gradient de pression devient nul. Puis, dans le domaine de l'écoulement ralenti ($\partial p/\partial x > 0$) la pression reprend sa valeur. Pourtant, la présence dans la couche limite des forces de frottement rend l'énergie cinétique des particules du fluide insuffisante pour surmonter la pression qui monte depuis le minimum jusqu'au point critique aval, et les particules du fluide qui se trouvent au voisinage immédiat de la paroi s'arrêtent d'abord, puis commencent à se déplacer en arrière en repoussant la couche limite dans le courant extérieur.

L'ensemble des lignes du courant dans la couche limite au voisinage du point de décollement B est représenté sur la figure VI.11. Au point où la couche limite se décolle, le gradient de la vitesse longitudinale à la surface s'écrit

$$(\partial w_x/\partial y)_{y=0} = 0, \qquad \text{(VI.110)}$$

et, par suite, la valeur locale du coefficient de frottement est nulle.

Le phénomène de décollement du courant lors du contournement extérieur qui vient d'être décrit s'observe également lorsque le liquide se déplace dans des canaux brusquement évasés.

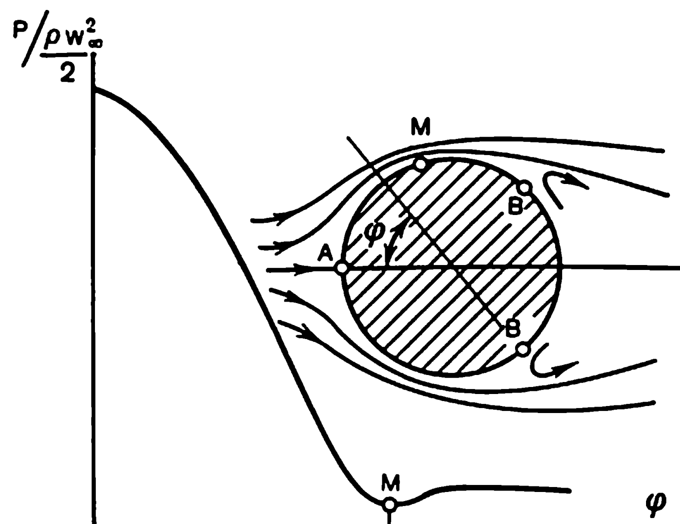


Fig. VI.10. Schématisation du contournement d'un cylindre rond

Comme nous l'avons indiqué dans ce qui précède, les équations de la couche limite restent valides seulement jusqu'au point de décollement ; avant donc de passer au calcul de l'échange de chaleur

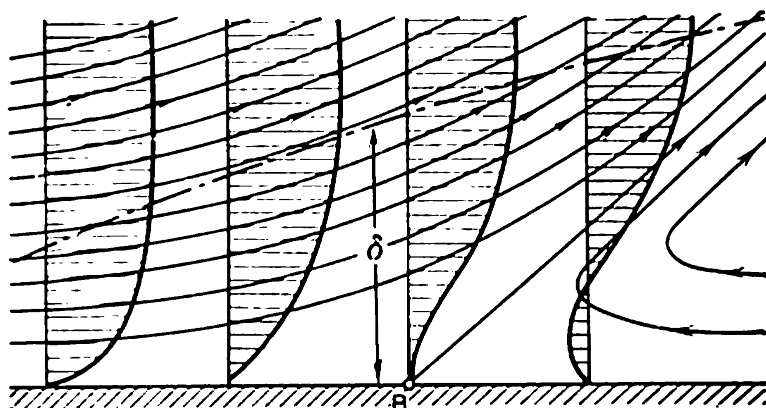


Fig. VI.11. Schématisation du courant dans la couche limite près du point de décollement

à une surface curviligne, il convient de déterminer les paramètres du point de décollement par intégration des équations de la couche limite compte tenu des conditions (VI.110).

Les calculs approchés montrent que le décollement de la couche limite laminaire isotherme se produit lorsque le paramètre de forme

qui figure dans l'équation (VI.49)

$$f = f_{cr} = -0{,}089/\mathrm{Re}^{**} \qquad \text{(VI.111)}$$

atteint la valeur critique.

Examinons maintenant l'influence du gradient de pression sur l'échange de chaleur. La figure VI.12 donne à titre d'illustration les distributions au point de décollement de la couche limite des flux thermiques et des contraintes tangentielles suivant la section de la couche limite ($\xi = y/\delta$). Comme le montre le graphique, le gradient de pression n'exerce pas d'action de quelque importance sur la distribution des flux thermiques suivant la section de la couche limite. Il convient donc de s'attendre qu'à la frontière extérieure de la couche limite la loi d'échange de chaleur doive également être sensiblement conservable par rapport à la variation du gradient de pression. Ces considérations sont confirmées par des calculs immédiats. Les valeurs de la quantité

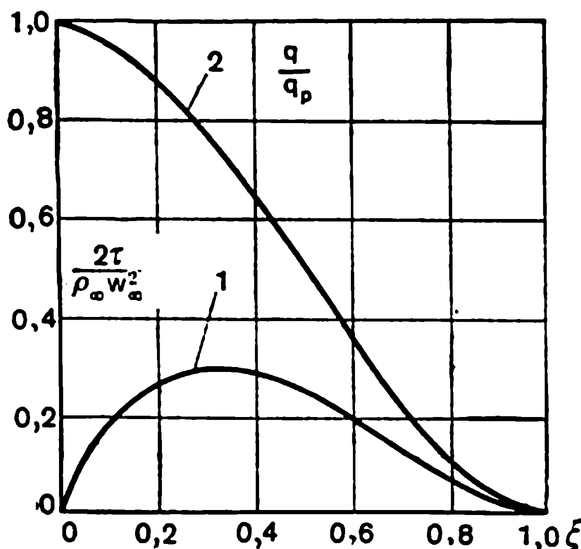


Fig. VI.12. Distribution des contraintes tangentielles (1) et des courants thermiques (2) au point de décollement de la couche limite

$$\Psi_s = \left(\frac{\mathrm{St}}{\mathrm{St}_0}\right)_{\mathrm{Re}_T^{**}}$$

au point de décollement de la couche limite laminaire à propriétés physiques constantes et à nombre Pr = 1 sont tirées de la monographie de Koutatéladzé [8]:

δ_T/δ	1,0	1,25	1,5	2.0
$(\mathrm{St}/\mathrm{St}_0)_{\mathrm{Re}_T^{**}}$	0,62	0,81	0,86	1,23

Les résultats des calculs confirment l'hypothèse suivant laquelle l'influence exercée par le gradient de pression longitudinal sur la

loi relative de l'échange de chaleur est assez faible; dans les calculs techniques on néglige donc cette influence en considérant que

$$\Psi_s = (\mathrm{St}/\mathrm{St}_0)_{\mathrm{Re}_T^{**}} \simeq 1. \qquad \text{(VI.112)}$$

Dans le cas de la distribution arbitraire de la vitesse à la frontière extérieure de la couche limite, les répartitions des valeurs locales du coefficient d'échange de chaleur peuvent être établies approximativement à l'aide de la méthode intégrale.

Lors du contournement d'une surface imperméable, la relation intégrale de l'énergie de la couche limite (VI.63) d'un fluide incompressible s'écrit

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{dX} + \frac{\mathrm{Re}_T^{**}}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{dX} = \Psi_s \mathrm{St}_0 \mathrm{Re}_L,$$

et pour un courant symétrique à l'axe

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{dX} + \mathrm{Re}_T^{**}\left[\frac{1}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{dX} + \frac{1}{R_x}\frac{dR_x}{dX}\right] = \Psi_s \mathrm{St}_0 \mathrm{Re}_L.$$

En adoptant $\Psi_s = 1$ et en portant dans cette équation la valeur

$$\mathrm{St}_0 = \frac{0{,}22}{\mathrm{Re}_T^{**}\mathrm{Pr}^{4/3}}, \qquad \text{(VI.113)}$$

obtenue par résolution exacte, on obtient une équation différentielle linéaire par rapport au nombre Re_T^{**}

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{dX} + \frac{\mathrm{Re}_T^{**}}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{dX} = \frac{0{,}22\,\mathrm{Re}_L}{\mathrm{Re}_T^{**}\mathrm{Pr}^{4/3}},$$

et pour le cas symétrique à l'axe

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{dX} + \mathrm{Re}_T^{**}\left[\frac{1}{\Delta T}\frac{d\Delta T}{dX} + \frac{1}{R_x}\frac{dR_x}{dX}\right] = \frac{0{,}22\,\mathrm{Re}_L}{\mathrm{Re}_T^{**}\mathrm{Pr}^{4/3}}.$$

Ici, dans le cas général, ΔT, Re_L et R_x sont les fonctions de x données. L'intégrale de cette équation différentielle sous les conditions aux limites $x = 0$; $\mathrm{Re}_T^{**} = 0$ vaut

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T}\left[\frac{0{,}44}{\mathrm{Pr}^{4/3}}\mathrm{Re}_0 \int_0^X \tilde{w}_\infty \Delta T^2\, dX\right]^{1/2}, \qquad \text{(VI.114)}$$

et pour le cas symétrique à l'axe

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T R_x}\left[\frac{0{,}44}{\mathrm{Pr}^{4/3}}\mathrm{Re}_0 \int_0^X \tilde{w}_\infty (\Delta T R_x)^2\, dX\right]^{1/2}.$$

Ici $Re_0 = \rho_\infty w_{0\infty} L/\mu_\infty$ est le nombre Re calculé d'après la vitesse du courant incident $w_{0\infty}$; $\tilde{w}_\infty = w_\infty / w_{0\infty}$, la vitesse relative à la frontière extérieure de la couche limite.

En portant les valeurs obtenues du nombre Re_T^{**} dans l'équation (VI.113), trouvons les valeurs locales du nombre St, et par suite, la distribution de la valeur locale du coefficient de transmission de chaleur le long de la surface contournée, jusqu'au point de décollement.

S'il faut calculer la répartition de la température de la paroi, la loi de la distribution du flux thermique $q_p(x)$ étant donnée, la relation intégrale de l'énergie (VI.63) pour le cas d'une paroi imperméable peut s'écrire

$$\frac{d\Delta T \, Re_T^{**}}{dx} = \frac{q_p(x)}{c_p \mu_\infty},$$

d'où

$$\Delta T \, Re_T^{**} = \frac{1}{c_p \mu_\infty} \int_0^x q_p(x)\, dx.$$

En exprimant Re_T^{**} à l'aide du nombre St d'après l'équation (VI.113), on obtient après des transformations peu compliquées

$$\Delta T = \left(\frac{q_p(x) L}{0{,}22 \, Re_L \, Pr^{2/3}} \int_0^x \frac{q_p(x)}{\lambda_\infty^2} dx \right)^{1/2}. \qquad (VI.115)$$

Il est intéressant de comparer les résultats des calculs de l'échange de chaleur d'après la méthode approchée avec les solutions similaires exactes. Comme nous l'avons montré, pour les conditions aux limites suivantes:

$$w_\infty = Cx^m; \quad T_p = T_\infty + ax^\gamma$$

il existe des solutions similaires de la couche limite laminaire thermique. En portant ces relations dans l'équation (VI.114), on trouve

$$Re_T^{**} = \left[\frac{0{,}44C}{Pr^{1/3} \nu (m + 2\gamma + 1)} \right]^{1/2} x^{\frac{m+1}{2}}. \qquad (VI.116)$$

L'expression du nombre de Stanton s'obtient en portant la relation (VI.116) dans l'équation (VI.113)

$$St = \frac{0{,}22}{Pr^{2/3} \left[\frac{0{,}44C}{\nu (m + 2\gamma + 1)} \right]^{1/2} x^{\frac{m+1}{2}}}. \qquad (VI.117)$$

Pour le paramètre $Nu_x Re_x^{-1/2}$, on a

$$Nu_x Re_x^{-1/2} = 0{,}332 Pr^{1/3} [m + 2\gamma + 1]^{1/2}. \qquad (VI.118)$$

La figure VI.9 compare les résultats du calcul du paramètre $Nu_x Re_x^{-1/2}$ d'après la formule (VI.118) avec la solution similaire exacte. Il convient de noter une assez bonne correspondance de la solution approchée à la solution

exacte dans tout le domaine de variation des paramètres γ et $\beta' = 2m/(m+1)$. L'équation (VI.118) amène que le coefficient de transmission de chaleur est nul sous la condition

$$\gamma = \frac{m+1}{2} \frac{1}{\beta' - 2}, \qquad \text{(VI.119)}$$

ce qui coïncide avec la solution exacte (cf. tableau VI.6).

Pour le coefficient de transmission de chaleur relatif on obtient la formule simple

$$\alpha/\alpha_0 = (m + 1 + 2\gamma)^{1/2}, \qquad \text{(VI.120)}$$

où α_0 est sa valeur pour le cas du contournement d'une plaque plane à température constante de la paroi ($m = 0$, $\gamma = 0$), calculé d'après la formule

$$\alpha_0 = \frac{\lambda}{x} \, 0{,}332 \, \mathrm{Pr}^{1/3} \, \mathrm{Re}_x^{1/2},$$

le critère $\mathrm{Re}_x = \frac{w_\infty x}{\nu}$ étant défini par la vitesse à la frontière extérieure de la couche limite dans la section donnée. Des résultats analogues peuvent s'obtenir pour le coefficient de transmission de masse. En particulier, pour le cas $w_\infty = Cx^m$ et $C_p = C_\infty + ax^\gamma$ on a

$$\beta_0 = \frac{D}{x} \, 0{,}332 \, \mathrm{Sc}^{1/2} \, \mathrm{Re}_x^{1/2}, \qquad \text{(VI.121)}$$

où β_0 est le coefficient de transmission de masse.

Pour le cas du contournement d'un corps symétrique à l'axe avec $\overline{\mathrm{Re}}_x = \bar{x}^n$ et $w_\infty = C\bar{x}^m$, $\Delta T = a\bar{x}^\gamma$, on a

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \left[\frac{0{,}44C}{\mathrm{Pr}^{1/3} \nu \, (m + 2\gamma + 2n + 1)} \right]^{1/2} \cdot \bar{x}^{\frac{m+1}{2}}$$

et

$$\alpha/\alpha_0 = (m + 2\gamma + 2n + 1)^{1/2}.$$

4. Echange de chaleur aux vitesses supersoniques de l'écoulement du gaz

Température de freinage. Lorsque la vitesse du courant atteint une valeur commensurable avec celle du son, c'est-à-dire lorsque

$$w_\infty \gg a = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s},$$

la diminution de la vitesse au sein de la couche limite sous l'action des forces de frottement entraîne une augmentation importante de la température près de la surface du corps contourné. Dans ces conditions il devient nécessaire de tenir compte de l'interaction des couches dynamique et thermique.

D'après le premier principe de la thermodynamique, l'enthalpie totale du gaz freiné adiabatiquement est définie par la formule

$$h_0 = h + u_\infty^2/2.$$

Si l'on retient que pour un gaz parfait l'enthalpie est seulement fonction de la température $h = c_pT$, on peut obtenir l'expression de la température de freinage $T^* = T + w_\infty^2/(2c_p)$ qui peut être réduite à la forme

$$T^* = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right) \qquad \text{(VI.122)}$$

du fait que pour un gaz parfait la vitesse de propagation des oscillations soniques est déterminée par la formule

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{kRT}.$$

L'équation (VI.122) permet d'évaluer la montée de la température sous l'effet du freinage isoenthropique. Ainsi, pour l'air ($k \sim 1{,}4$), avec $M = 1$, $T^* = 1{,}2T$, et avec $M = 6$, $T^* = 7{,}2T$, c'est-à-dire avec $M = 6$ la température d'un courant freiné isoenthropiquement est de sept fois supérieure à la température thermodynamique du gaz en mouvement.

L'augmentation ultérieure de la vitesse du courant conduit à une croissance excessive de la température, ce qui déclenche dans la couche limite des réactions chimiques (de dissociation et d'ionisation). C'est ce qu'on appelle le domaine des courants hypersoniques.

Pourtant, comme nous l'avons montré dans ce qui précède, même dans le domaine des courants supersoniques (pour l'air $M \leqslant 6$), au sein de la couche limite la température monte si vite sous l'effet du freinage que les valeurs des paramètres physiques (surtout de la viscosité et de la conductivité thermique) ne peuvent déjà plus être considérées comme constantes.

Facteur de récupération. Lorsqu'un courant de gaz contourne à grande vitesse une surface près de la surface, il se forme sous l'action des forces de frottement une grande quantité de chaleur. Si la surface est isolée adiabatiquement, cette chaleur peut être évacuée seulement par conduction thermique du gaz. A l'état stationnaire l'équilibre s'établit entre l'émission et le transfert de la chaleur. La température que la surface acquiert dans ces conditions s'appelle *température adiabatique de la paroi* T_p^*.

Le rapport entre l'écart des températures d'un gaz complètement isoenthropiquement freiné $T_\infty^* - T_\infty$ et la différence réelle des températures $T_p - T_\infty$ s'appelle *facteur de récupération*

$$r = (T_p^* - T_\infty)/(T_\infty^* - T_\infty). \qquad \text{(VI.123)}$$

Polhausen a analytiquement calculé ce facteur pour le contournement infrasonique longitudinal d'une plaque dans le cas d'un écoulement laminaire dans le domaine limite. Ses résultats peuvent être approximés par la relation

$$r = \sqrt{\mathrm{Pr}}. \qquad \text{(VI.124)}$$

Cette relation s'accorde bien avec les données expérimentales disponibles. Sur la figure VI.13 sont comparées les données expérimenta-

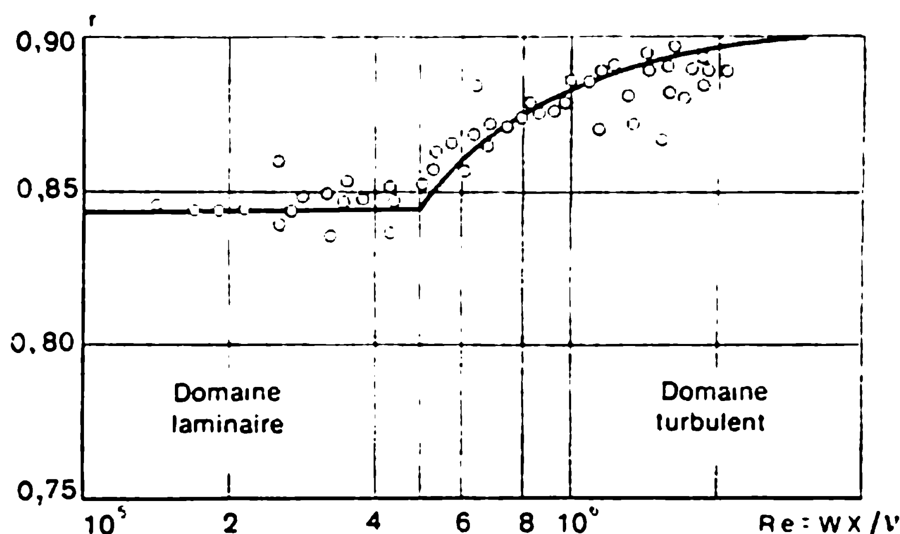


Fig. VI.13. Coefficient de restitution r de la plaque contournée longitudinalement avec M < 1 (d'après Eckert et Weise):
○ — expérience; ——— — calcul d'après la formule (VI.124)

les obtenues par Eckert et Weise pour l'air, avec les valeurs théoriques suivant la relation (VI.124).

Les calculs et les expériences réalisés dans le domaine laminaire du courant pour les vitesses qui dépassent celles du son montrent

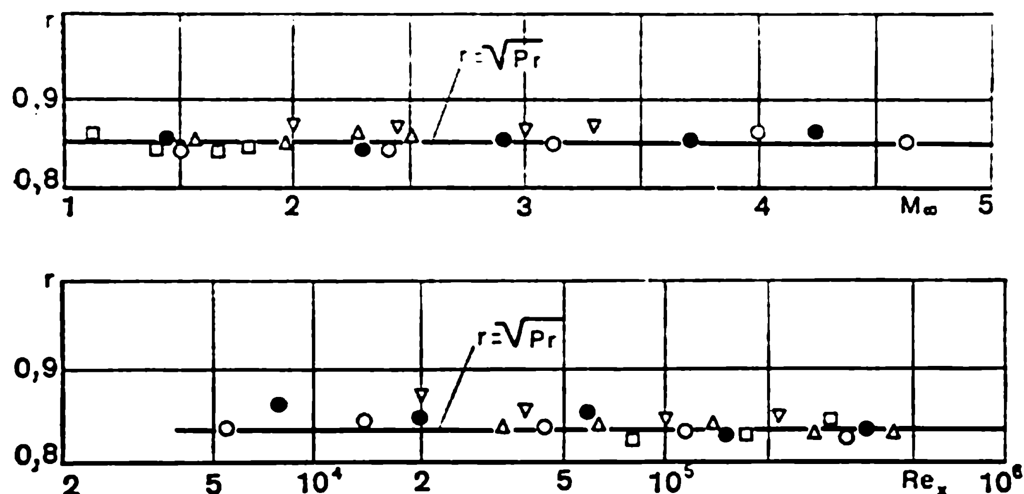


Fig. VI.14. Coefficients de restitution r mesurés pour une couche limite laminaire sur les cônes à angles d'ouverture différents:
●, □, ○, ▽, △ — expérience; ——— — calcul d'après la formule (VI.124)

que la dépendance du facteur de récupération par rapport au nombre Pr reste la même. La figure VI.14 traduit les résultats de l'expérience d'Ebert qu'il a obtenus en soumettant des cônes au soufflage

par un flux supersonique, qui confirment bien la formule théorique (VI.124).

Des résultats analogues s'obtiennent pour des corps de forme peu aérodynamique. Si pour un courant à allure laminaire on rapporte dans la couche limite le facteur de récupération aux paramètres à la frontière extérieure de la couche (fig. VI.15), alors les valeurs locales du facteur de récupération ainsi obtenues $r_{\alpha m}$, jusqu'au point de décollement, sont assez bien décrites par la relation $r_{\alpha m} = \sqrt{\mathrm{Pr}}$; or, ceci témoigne également de l'allure conservative du processus de récupération de l'enthalpie par rapport à la variation du gradient de pression longitudinal.

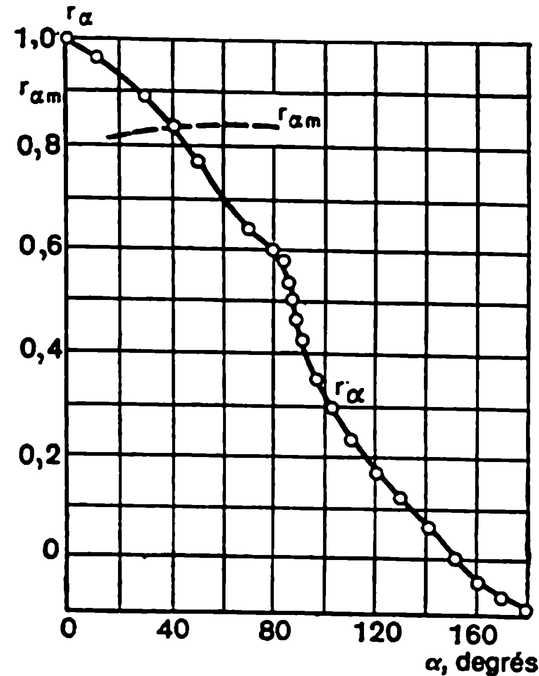


Fig. VI.15. Distribution des valeurs du coefficient de restitution r_α et $r_{\alpha m}$ suivant la circonférence d'un cylindre contourné transversalement (expériences d'Eckert et de Weise): $M_\infty = 0{,}685$; $Re_\infty = 1{,}05 \cdot 10^5$; α — angle au centre

Comme nous l'avons montré précédemment, pour le nombre Pr = 1 l'identité des conditions aux limites fait respecter l'identité des champs des vitesses et des températures de freinage

$$(T_p - T^*)/(T_p - T^*_\infty) = w_x/w_\infty.$$

Cette condition est remplie exactement lors du contournement longitudinal d'une plaque à température constante de la paroi par un courant indéfini.

Pour les gaz, les nombres Pr se distinguent peu de l'unité; on peut donc mettre à la base de la relation entre la distribution des températures et des vitesses la relation susmentionnée en la mettant sous la forme

$$\frac{(T_p - T^+)}{T_p - T^*_p} = \varepsilon(\xi)\, w_x/w_\infty, \tag{VI.125}$$

Ici ε (ξ) est le coefficient de non-identité des champs des températures et des vitesses; T^+, la température de calcul:

$$T^+ = T + r(\xi)\frac{w_x^2}{2c_p}. \tag{VI.126}$$

Dans le cas général, la forme des fonctions ε (ξ), r (ξ) dépend du gradient de pression, de l'allure non isotherme, de l'échange de masse.

Sur la paroi, $w_x = 0$; $T^+ = T_p^*$, $r(\xi) = r$. Comme nous l'avons noté, le facteur de récupération r des gaz est proche de l'unité; on peut donc admettre avec une précision suffisante que $r(\xi) = r$. Alors, la relation (VI.126) peut se récrire

$$T^+ = T + r\frac{w_x^2}{2c_p} = T + r\frac{k-1}{2}M^2\omega^2 T_\infty, \qquad \text{(VI.127)}$$

où $w = w_x/w_\infty$; $M = w_\infty/a$.

En tenant compte des égalités (VI.125), (VI.127), ainsi que de l'expression du facteur de récupération (VI.123), la relation entre

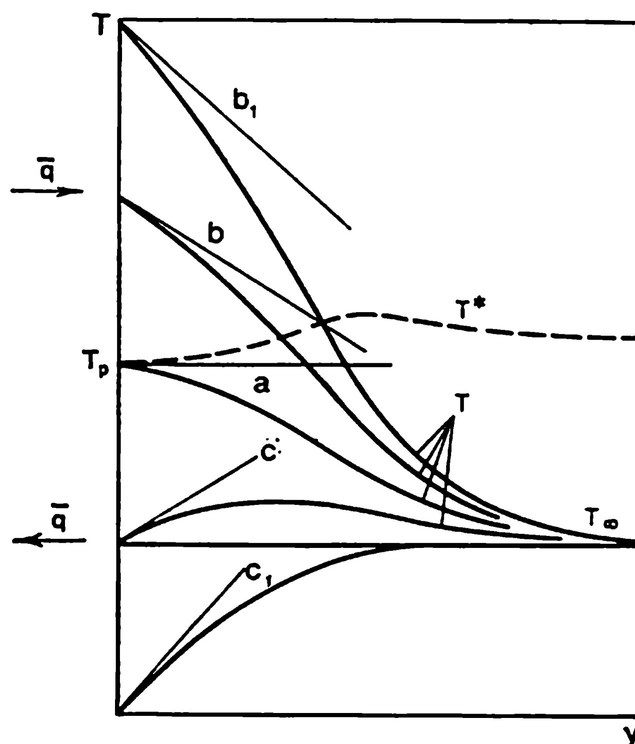


Fig. VI.16. Courbes de distribution de la température dans la couche limite laminaire sur une plaque aux vitesses élevées:

a — absence d'échange thermique $(\partial T/\partial y)_p = 0$; b, b_1 — pour $T_p > T_p^*$ et flux thermique dirigé à partir de la paroi; c, c_1 — flux thermique dirigé vers la paroi

la distribution des températures et des vitesses (VI.125) peut se mettre sous la forme

$$\frac{T}{T_\infty} = \psi - \Delta\psi\varepsilon\omega - (\psi^* - 1)\,\omega^2. \qquad \text{(VI.128)}$$

Ici $\psi = \frac{T_p}{T_\infty}$ est le facteur de température; $\psi^* = \frac{T_p^*}{T_\infty} = 1 + r\frac{k-1}{2}M^2$, le facteur de température cinétique; $\Delta\psi = \psi - \psi^*$, le facteur d'échange de chaleur. Avec $\Delta\psi < 0$, le flux thermique est dirigé vers la surface; avec $\Delta\psi > 0$, la surface cède la chaleur au flux.

Dès que la température de la surface contournée T_p s'écarte de la température adiabatique de la paroi T_p^*, un processus d'échange de chaleur s'amorce entre la surface et le courant. La figure VI.16 représente les courbes de la distribution des températures dans une couche limite laminaire d'un flux de gaz animé d'une grande vitesse. La figure montre que le coefficient de transmission de chaleur doit

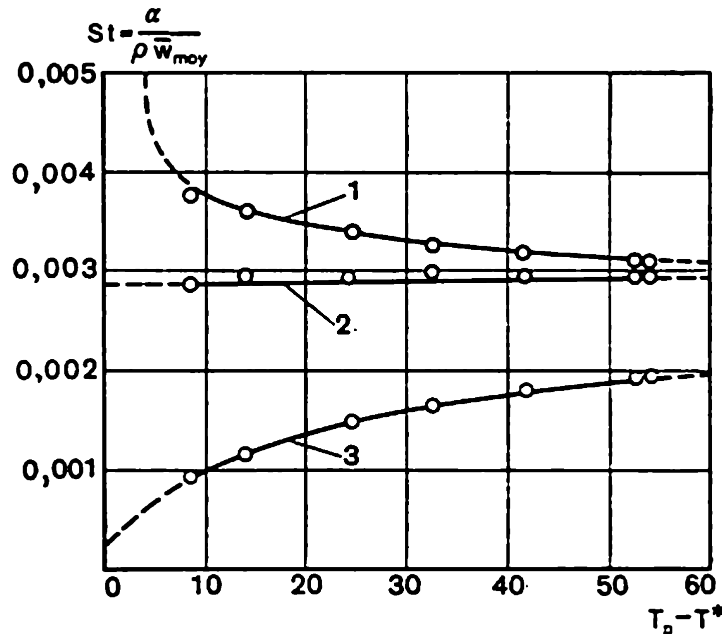


Fig. VI.17. Coefficients de transmission de chaleur relatifs aux définitions différentes lors de l'écoulement de l'air dans un tube avec M < 1 (d'après Mac Adams, Nikolaï, Keanan):

$1 - q = \alpha_e (T_p - T_p^*)$; $2 - q = \alpha_e (T_p - T_p^*)$; $3 - q = \alpha (T_p - T_\infty^*)$

se calculer d'après la différence entre la température réelle de la surface T_p et la température adiabatique de la paroi T_p^*, c'est-à-dire

$$q_p = \alpha_c (T_p - T_p^*).$$

Dans ce cas, pour $q_p \to 0$, $T_p - T_p^* \to 0$, tandis que le coefficient de transmission de chaleur, caractéristique de l'intensité d'échange de chaleur par convection et dépendant surtout de l'hydrodynamique du courant, conserve la valeur finale de α_c. Dans le cas particulier des vitesses subsoniques, $T_p^* \to T_\infty$ et il ne reste qu'à définir le coefficient de transmission de chaleur.

La figure VI.17 visualise les résultats des expériences de Mac Adams et autres relatifs au transfert de chaleur dans un tube à des vitesses élevées d'écoulement de gaz. Ces résultats justifient le choix, comme pression thermique, de la grandeur $\Delta T = T_p - T_p^*$. Dans ce cas le coefficient d'échange de chaleur ne dépend pratiquement pas des pressions thermiques. D'autre part, les résultats mentionnés

montrent que pour des valeurs élevées de ces dernières on peut retenir pour elles la grandeur $\Delta T = T_p - T^*_\infty$, ce qui est très commode du fait que la détermination du facteur de récupération devient inutile.

Transformation des équations de la couche limite compressible. Réalisée pour la première fois par Dorodnitsyne, cette transformation permet de ramener ces équations à la forme proche de celles des équations d'un fluide incompressible. La transformation des coordonnées simplifie sensiblement le calcul de la couche limite compressible et rend possible l'utilisation des méthodes bien élaborées et sûres (aussi bien intégrales qu'exactes) de résolution des équations de la couche limite incompressible.

Dans le cas du contournement d'une plaque imperméable, le système complet d'équations différentielles d'une couche limite compressible plane est de la forme

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\right);$$

$$\rho c_p w_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho w_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho w_y = 0$$

à conditions aux limites $y = 0$, $w_x = 0$, $w_y = 0$, $T = T_p$; $y = \infty$, $w_x = w_\infty$, $T = T_\infty$. En se conformant à Dorodnitsyne, introduisons les nouvelles variables

$$\xi = \int_0^x \frac{p}{p^*}\,dx, \quad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho^*}\,dy.$$

Ici p^* et ρ^* sont respectivement la pression et la densité du gaz adiabatiquement freiné.

Remplaçons dans le cas du contournement d'une plaque plane la pression et la densité à la frontière extérieure de la couche limite p^*, ρ^* par p_∞, ρ_∞; alors, les relations précédentes deviennent

$$\xi = \int_0^x \frac{p}{p_\infty}\,dx \equiv x; \quad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_\infty}\,dy, \tag{VI.129}$$

puisque $p = p_\infty$ en vertu de la permanence de la pression à travers la couche limite.

Le passage de la dérivation par rapport à x et y à la dérivation par rapport à ξ et η se fait d'après les formules

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\rho}{\rho_\infty}\frac{\partial}{\partial \eta}. \tag{VI.130}$$

En prenant en considération les relations (VI.130), on peut transformer l'équation du mouvement en la réduisant au préalable par ρ:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial \xi} + \left(w_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\rho}{\rho_\infty} w_y\right)\frac{\partial w_x}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho_\infty}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu \frac{\rho}{\rho_\infty}\frac{\partial w_x}{\partial \eta}\right).$$

Transformons maintenant l'équation de la continuité en la mettant sous la forme

$$\rho\frac{\partial w_x}{\partial x}+w_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}=0. \qquad \text{(VI.131)}$$

En dérivant la deuxième équation de (VI.129) d'abord par rapport à x pour une valeur constante de y, puis par rapport à η, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)=\frac{\rho_\infty}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^\infty\frac{1}{\rho_\infty}\frac{\partial\rho}{\partial x}dy=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

En portant l'expression obtenue dans (VI.131) et en passant aux nouvelles variables ξ et η, on obtient

$$\rho\frac{\partial w_x}{\partial\xi}+\rho\frac{\partial w_x}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\rho w_x\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)+\frac{\rho}{\rho_\infty}\frac{\partial}{\partial\eta}(\rho w_y)=0.$$

Cette expression est ramenée sans peine à la forme

$$\partial w_x/\partial\xi+\partial W_y/\partial\eta=0,$$

où $W_y=\left(w_x\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\rho}{\rho_\infty}w_y\right)$.

Ainsi, dans le cas du contournement d'une plaque imperméable, les équations du mouvement et de la continuité transformées deviennent

$$w_x\frac{\partial w_x}{\partial\xi}+W_y\frac{\partial w_x}{\partial\eta}=\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu\rho}{\mu_\infty\rho_\infty}\frac{\partial w_x}{\partial\eta}\right);\quad\frac{\partial w_x}{\partial\xi}+\frac{\partial W_y}{\partial\eta}=0. \qquad \text{(VI.132)}$$

Dans le cas de la dépendance linéaire de la viscosité par rapport à la température, c'est-à-dire lorsque $\mu\rho=\rho_\infty\mu_\infty$, les équations (VI.132) coïncident complètement suivant la forme avec les équations correspondantes du fluide incompressible.

Maintenant pour la résolution du problème dynamique on peut utiliser la méthode exposée dans ce qui précède.

Introduisons, d'après la définition, la fonction de courant ψ qui satisfait à l'équation de la continuité

$$w_x=\partial\psi/\partial\eta;\quad W_y=-\partial\psi/\partial\xi.$$

Alors, l'équation du mouvement se met sous la forme

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu\rho}{\mu_\infty\rho_\infty}\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}\right) \qquad \text{(VI.133)}$$

à conditions aux limites: pour $\eta=0$, $\psi=0$, $\partial\psi/\partial\eta=0$;

pour $\eta=\infty$, $\partial\psi/\partial\eta=w_\infty$.

Introduisons, comme précédemment, les variables de Blasius définies par les relations

$$\psi=\sqrt{\frac{\mu_\infty w_\infty \xi}{\rho_\infty}}\,f(z);\quad z=\eta\sqrt{\frac{\rho_\infty w_\infty}{\mu_\infty \xi}}.$$

Admettons que la fonction $f(z)$ dépend seulement de z. Alors, les dérivées de la fonction de courant sont de la forme

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta}=\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\eta}=\sqrt{\frac{\mu_\infty w_\infty \xi}{\rho_\infty}}\,f'(z)\sqrt{\frac{\rho_\infty w_\infty}{\mu_\infty \xi}}=w_\infty f'(z);$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_\infty w_\infty}{\rho_\infty \xi}}\,[f(z)-zf'(z)];$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=w_\infty\sqrt{\frac{\rho_\infty w_\infty}{\mu_\infty \xi}}\,f''(z);$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi\,\partial\eta}=-\frac{1}{2}\,w_\infty f''(z)\,\eta\sqrt{\frac{\rho_\infty w_\infty}{\mu_\infty \xi^3}}.$$

En portant les valeurs des dérivées dans l'équation du mouvement (VI.133), on obtient après simplification

$$\frac{1}{2}f\cdot f''+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu\rho}{\mu_\infty\rho_\infty}f''\right)=0 \qquad \text{(VI.134)}$$

à conditions aux limites: pour $z=0$, $f=0$, $f'=0$;

pour $z=\infty$, $f'=1$.

D'une façon analogue, à l'aide des variables de Dorodnitsyne, l'équation de l'énergie peut être ramenée à la forme

$$w_x\frac{\partial T}{\partial\xi}+W_y\frac{\partial T}{\partial\eta}=\frac{1}{\rho_\infty c_p}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\lambda\frac{\rho}{\rho_\infty}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)+\frac{\mu}{\rho c_p}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\frac{\partial w_x}{\partial\eta}\right)^2.$$

En introduisant les variables de Blasius, on obtient après des transformations peu compliquées

$$\frac{1}{2}f\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\mu\rho}{\mu_\infty\rho_\infty}\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\mu\rho}{\mu_\infty\rho_\infty}\frac{w_\infty^2}{c_p}f''^2=0.$$

En remarquant que $w_\infty^2/c_p=(k-1)M_\infty^2$, et en considérant que le nombre Pr est constant, ce qui s'observe avec une exactitude suffisante pour les gaz par suite de la même dépendance de la viscosité et de la conductivité thermique par rapport à la température, on obtient finalement

$$\frac{\mathrm{Pr}}{2}f\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\frac{\mu\rho}{\mu_\infty\rho_\infty}\right)\frac{\partial T}{\partial z}\right]+\mathrm{Pr}\,(k-1)\,\mathrm{M}_\infty^2\frac{\mu\rho}{\mu_\infty\rho_\infty}f''^2=0 \qquad \text{(VI.135)}$$

sous les conditions aux limites qui peuvent être exprimées par une des formes suivantes:

1) en l'absence de transfert de chaleur: pour $z=0$, $T=T_p^*$;

2) en présence de transfert de chaleur: pour $z=1$, $T=T_\infty$. Dans le cas général, l'intégration des expressions (VI.134), (VI.135) impose l'application des méthodes numériques; pourtant, dans le cas de la dépendance linéaire de la viscosité par rapport à la température, les équations susmentionnées prennent la forme des équations vraies pour un courant incompressible.

En effet, si la liaison entre les viscosités est donnée sous la forme d'une dépendance exponentielle par rapport à la température

$$\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^n$$

et, d'après l'équation du gaz parfait,

$$\rho/\rho_\infty = T_\infty/T,$$

alors, dans le cas de la dépendance linéaire de la viscosité par rapport à la température ($n = 1$)

$$\mu\rho = \mu_\infty\rho_\infty.$$

Ainsi, compte tenu de cette égalité, l'équation du mouvement devient

$$0{,}5ff'' + f''' = 0.$$

On voit aisément que dans ce cas l'équation du mouvement est autonome et ne se distingue en rien de l'équation correspondante du liquide incompressible; donc, pour calculer la fonction f et ses dérivées, on peut utiliser les données du tableau VI.2.

D'une façon analogue, en introduisant une nouvelle variable pour la température, on peut dans le cas de la dépendance linéaire de la viscosité par rapport à la température, ramener l'équation de l'énergie à la forme qui correspond à l'écoulement d'un liquide incompressible:

$$\Theta = (T - T_\infty)\Big/\frac{u_\infty^2}{2c_p},$$

$$\Theta'' + 0{,}5\mathrm{Pr}f\Theta' + 2\mathrm{Pr}f''^2 = 0. \qquad \text{(VI.136)}$$

5. Solutions exactes de l'équation de l'énergie de la couche limite d'un gaz compressible pour $\partial p/\partial x = 0$ et dépendance linéaire de la viscosité par rapport à la température

Cas d'une paroi calorifuge. L'équation de l'énergie écrite sous la forme (VI.136) est une équation différentielle ordinaire qui peut être résolue soit par la méthode de séparation des variables, soit en introduisant un facteur d'intégration. Cherchons d'abord la solution partielle de cette équation pour le cas d'une paroi calorifuge: $\Theta(\infty) = 0$, $\Theta'(0) = 0$. En désignant cette solution par Θ_{ad}, on obtient à l'aide de la méthode mentionnée l'expression suivante

$$\Theta_{ad} = \int_0^z \left\{ \frac{\int_0^z e^{\frac{\mathrm{Pr}}{2}\int_0^z f\,dz} \cdot 2\,\mathrm{Pr}\,(f'')^2\,dz}{e^{\int_0^z \frac{\mathrm{Pr}}{2} f\,dz}} \right\} dz. \qquad \text{(VI.137)}$$

Si on utilise la valeur de f, calculée précédemment, on peut intégrer l'équation (VI.137) par des méthodes numériques.

Les résultats obtenus dans la marge des nombres $\mathrm{Pr} = 0{,}5$ à 10 sont bien approximés par la relation $\Theta_{\mathrm{ad}} = \sqrt{\mathrm{Pr}}$. Notons que $\Theta_{\mathrm{ad}} = (T_{\mathrm{p}}^{*} - T_{\infty})\,(T^{*} - T_{\infty})$ est égale au facteur de récupération introduit auparavant. Comme nous l'avons déjà dit, la valeur obtenue s'accorde bien avec les données expérimentales.

Echange de chaleur à une vitesse modérée. Dans ce cas l'équation de l'énergie (VI.136) devient bien plus simple, puisque pour $M \to 0$ le terme qui rend compte de la dissipation de l'énergie disparaît. Dans le cas de la dépendance linéaire de la viscosité, l'équation de l'énergie se met sous une forme qui coïncide exactement avec l'équation de l'énergie et qui, si dans cette dernière T est remplacée par ϑ d'après l'équation (VI.78), est justifiée pour un courant à propriétés physiques constantes

$$\vartheta'' + \frac{\mathrm{Pr}}{2} f\vartheta' = 0,$$

où $\vartheta = (T_{\mathrm{p}} - T)\,(T_{\mathrm{p}} - T_{\infty})$.

La solution de cette équation a déjà été obtenue.

La densité du flux thermique sur la paroi se trouve d'après l'équation

$$q_{\mathrm{p}} = -\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\mathrm{p}} = \lambda\,(T_{\mathrm{p}} - T_{\infty})\,\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\bigg|_{\mathrm{p}}.$$

En passant aux variables z et η, on trouve

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\bigg|_{\mathrm{p}} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\bigg|_{\mathrm{p}}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\,\frac{\rho}{\rho_{\infty}}\,\frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\rho}{\rho_{\infty}}\sqrt{\frac{\rho_{\infty} w_{\infty}}{\mu_{\infty} x}}\cdot\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\bigg|_{\mathrm{p}}.$$

La dérivée $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\Big|_{\mathrm{p}}$ est déjà obtenue dans ce qui précède [cf. (VI.86)]. Si on en tient compte, l'expression de la densité du flux thermique devient

$$q = (T_{\mathrm{p}} - T_{\infty})\,\lambda_{\mathrm{p}}\,0{,}332\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_{\infty}}\sqrt{\frac{\rho_{\infty} w_{\infty}}{\mu_{\infty} x}}.$$

En passant à la valeur locale du nombre de Nusselt, on obtient

$$\mathrm{Nu}_{x\infty} = \frac{qx}{(T_{\mathrm{p}} - T_{\infty})\,\lambda_{\infty}} = 0{,}332\,\frac{\rho_{\mathrm{p}}\lambda_{\mathrm{p}}}{\rho_{\infty}\lambda_{\infty}}\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}\sqrt{\mathrm{Re}_{x\infty}}$$

et, enfin, en posant que la conductivité thermique se trouve sous le même rapport avec la température que la viscosité dynamique avec $n = 1$, il vient finalement

$$\mathrm{Nu}_{x\infty} = 0{,}332\,\sqrt[3]{\mathrm{Pr}}\,\sqrt{\mathrm{Re}_{x\infty}}.$$

De la sorte, si les paramètres physiques figurant dans les groupements sans dimensions sont rapportés à la température à la frontière extérieure de la couche limite, la solution obtenue pour une plaque contournée par un courant à propriétés physiques constantes est également justifiée pour le cas des propriétés variables. Dans ce cas on observe la compensation mutuelle de l'influence des propriétés physiques sur la loi d'échange de chaleur.

Echange de chaleur à une grande vitesse. Pour trouver la solution de l'équation de l'énergie en présence de l'échange de chaleur, il faut additionner une solution partielle quelconque avec la solution générale de l'équation homogène

$$\vartheta'' + \frac{\mathrm{Pr}}{2} f\vartheta' = 0.$$

De cette façon, on a la solution

$$\Theta = \Theta_{\mathrm{ad}} + C_1\vartheta + C_2. \qquad \text{(VI.138)}$$

Ici $\Theta = (T - T_\infty)\Big/\frac{u_\infty^2}{2c_p}$, $\vartheta = \frac{T_{\mathrm{p}} - T}{T_{\mathrm{p}} - T_\infty}$. Les constantes C_1 et C_2 se calculent d'après les conditions aux limites

$$z = 0 \quad \Theta = \Theta_{\mathrm{p}}; \quad z = \infty \quad \Theta = 0.$$

D'après la première condition aux limites $C_1 = -C_2$; et d'après la deuxième,

$$(T_{\mathrm{p}} - T_\infty)\Big/\frac{u_\infty^2}{2c_p} = \Theta_{\mathrm{ad}} + C_2.$$

En portant les valeurs calculées des constantes dans (VI.138), on trouve, après des transformations peu compliquées, la distribution de la température

$$T - T_\infty = r(k-1)\,\mathrm{M}_\infty^2 + (T_{\mathrm{p}} - T_{\mathrm{p}}^*)(1 - \vartheta). \qquad \text{(VI.139)}$$

La densité du flux thermique est donnée par l'équation

$$q_{\mathrm{p}} = -\lambda_{\mathrm{p}} \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{\mathrm{p}} = \lambda_{\mathrm{p}} (T_{\mathrm{p}} - T_{\mathrm{p}}^*) \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\Big|_{\mathrm{p}}.$$

En effectuant les mêmes transformations que dans le cas précédent du contournement par un courant de liquide incompressible à propriétés physiques variables, on trouve l'expression de la valeur locale du nombre de Nusselt sous la forme

$$\mathrm{Nu}_{x\infty} = \frac{T_{\mathrm{p}} - T_{\mathrm{p}}^*}{T_{\mathrm{p}} - T_\infty} \frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_\infty} \frac{\lambda_{\mathrm{p}}}{\lambda_\infty} 0{,}332 \sqrt[3]{\mathrm{Pr}} \sqrt{\mathrm{Re}_{x\infty}}.$$

Pour le rapport linéaire entre la conductivité thermique et la température, on obtient

$$\mathrm{Nu}_{x\infty} = \frac{T_\mathrm{p} - T^*_\mathrm{p}}{T_\mathrm{p} - T_\infty} 0{,}332 \sqrt[3]{\mathrm{Pr}} \sqrt{\mathrm{Re}_{x\infty}}. \qquad \text{(VI.140)}$$

Ici T^*_p caractérise l'influence du nombre M sur le transfert de chaleur. Si, comme nous l'avons montré dans ce qui précède, le coefficient de transmission de chaleur est rapporté à la différence des températures $(T_\mathrm{p} - T^*_\mathrm{p})$, on aboutit à la relation analogue obtenue précédemment pour l'écoulement d'un liquide incompressible à propriétés physiques constantes.

6. Méthode approchée de la résolution à l'aide de la relation intégrale de l'énergie

Dans le cas de la dépendance linéaire de la viscosité par rapport à la température, l'analyse des solutions exactes pour une plaque montre que l'influence de la variation des propriétés physiques du gaz peut se compenser réciproquement.

C'est pourquoi les solutions obtenues pour un écoulement à propriétés physiques constantes sont également justifiées pour les courants à propriétés variables à large marge de variations du facteur thermique $\psi = T_\mathrm{p}/T_\infty$ et dans les calculs techniques, à de faibles vitesses d'écoulement on néglige ordinairement l'influence de l'allure non isotherme.

Ces considérations sont également confirmées par les résultats des calculs plus précis. Plusieurs auteurs ont réalisé ces derniers par intégration numérique de certains cas des courants (écoulement au voisinage d'un coin, au voisinage du point critique d'un cylindre). Ils ont utilisé à cet effet les dépendances des constantes physiques par rapport à la température (300 à 1300 °C). Ces calculs ont montré que, premièrement, l'influence de la variabilité des propriétés physiques peut être évaluée par l'expression

$$\Psi_s = (\mathrm{St}/\mathrm{St}_0)_{\mathrm{Re}_x} = \psi^n,$$

la comparaison des nombres St se faisant sous la condition $\mathrm{Re}_x =$ $=$ idem; et deuxièmement, cette dépendance de la loi d'échange de chaleur est très faible, même dans le cas

$$\psi = T_\mathrm{p}/T_\infty > 1.$$

Ainsi, pour $w_\infty =$ const (plaque, coin)

$$n = -0{,}01 \quad \text{pour} \quad \psi > 1; \quad n = 0 \quad \text{pour} \quad \psi < 1.$$

La solution de l'équation de l'énergie de la couche limite compressible pour $\partial p/\partial x = 0$; $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, est obtenue par Van Driest par la méthode des approximations successives.

Les résultats de cette résolution sont visualisés sur la figure VI.18. On remarque sans peine que le nombre St diminue avec l'augmentation de M. Ces résultats sont bien approximés par la relation

$$\Psi_s = \left(\frac{St}{St_0}\right)_{Re_x} = \psi^{-0,08}\psi^{*-0,04}, \qquad \text{(VI.141)}$$

où $\psi^* = T_p^*/T_\infty$.

L'équation (VI.141) est vraie pour $\psi > 1$ et $M \leqslant 6$. Si on compare les nombres St en fonction du nombre Re_T^{**}, la relation (VI.141) devient

$$\Psi_s = \left(\frac{St}{St_0}\right)_{Re_T^{**}} = \psi^{-0,16}\psi^{*-0,08}. \qquad \text{(VI.142)}$$

Comme nous l'avons déjà montré, si on rapporte le nombre Re_T^{**} à la viscosité dynamique $\mu_{0\infty}$ définie d'après la température de frei-

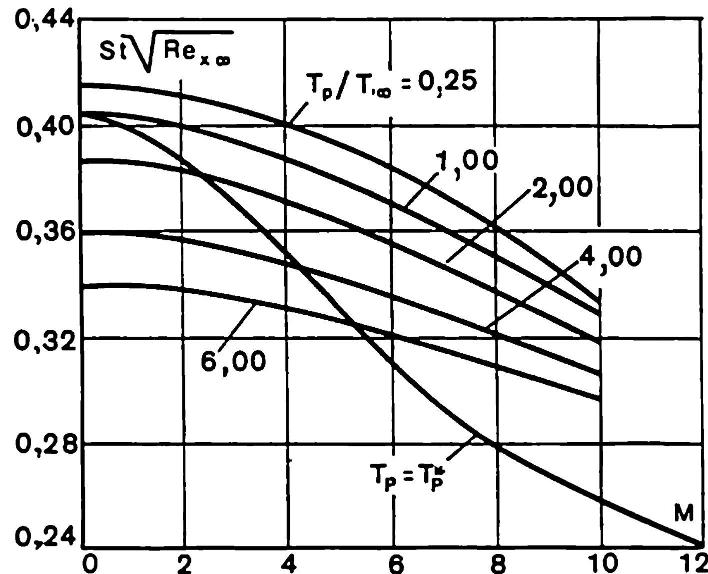


Fig. VI.18. Echange de chaleur dans une couche limite laminaire très rapide de l'air (d'après Van Driest)

nage du courant non perturbé, l'équation de l'énergie de la couche limite compressible s'écrit sous la forme (VI.60).

Le nombre St dans ce cas se calcule d'après la formule

$$St_0 = \frac{0,22}{Pr^{1/3}\, Re_T^{**} \mu_{0\infty}/\mu_\infty}.$$

De la sorte, par analogie avec (VI.114), l'intégrale de l'équation de l'énergie peut se mettre sous la forme

$$Re_T^{**} = \frac{1}{\Delta T}\left[\frac{0,44}{Pr^{1/3}} \int_0^X \Psi_s \frac{\Delta T^2 \rho_\infty \mu_\infty w_\infty L}{\mu_{0\infty}^2}\, dX\right]^{1/2},$$

où Ψ_s est déterminé par l'égalité (VI.142). La grandeur

$$\frac{\rho_\infty w_\infty L}{\mu_{0\infty}} \frac{\mu_\infty}{\mu_{0\infty}},$$

figurant sous le signe somme peut être transformée de la façon suivante

$$\frac{\rho_\infty w_\infty L}{\mu_{0\infty}} \frac{\mu_\infty}{\mu_{0\infty}} = \mathrm{Re}_{0\infty} u \frac{\rho_\infty}{\rho_{0\infty}} \frac{\mu_\infty}{\mu_{0\infty}}.$$

Ici le nombre $\mathrm{Re}_{0\infty} = \rho_{0\infty} w_{\max} L/\mu_{0\infty}$ ne dépend pas de X et peut être chassé du signe d'intégration

$$u = w_\infty / w_{\max},$$

où $w_{\max} = \sqrt{2c_p T^*_\infty}$ est la vitesse maximale de l'écoulement; $\rho/\rho_{0\infty} = (1-u^2)^{1/(k-1)}$; $\rho_{0\infty}$, la densité à la température de freinage du courant non perturbé.

En tenant compte de la transformation indiquée, on obtient finalement

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T} \left[\frac{0{,}44}{\mathrm{Pr}^{1/3}} \mathrm{Re}_{0\infty} \int_0^X \Psi_s \frac{\mu_\infty}{\mu_{0\infty}} u (1-u^2)^{1/(k-1)} \Delta T^2 \, dX \right]^{1/2}. \tag{VI.143}$$

Si la loi de la distribution des flux thermiques $q_p(x)$ est donnée, le calcul est conduit suivant la formule

$$\Delta T = \left(\frac{q_p L}{0{,}22 \Psi_s \mathrm{Re}_L \mathrm{Pr}_{0\infty}^{2/3}} \int_0^X \frac{q_p}{\lambda_{0\infty}^2} dX \right)^{1/2}. \tag{VI.144}$$

Ici, comme dans ce qui précède, Ψ_s se calcule d'après (VI.142).

7. Frottement et échange de chaleur à une surface perméable

Le système d'équations de la couche limite (VI.65) pour l'écoulement d'un fluide incompressible à paramètres constants et sous les conditions aux limites pour $y = 0$ $w_x = 0$, $w_y = w_p$; pour $y = \infty$ $w_x = w_\infty$ possède des solutions similaires.

Considérons le contournement d'une plaque plane semi-infinie par le courant d'une fluide incompressible en présence d'une aspiration uniforme régulière du gaz à partir de la couche limite (fig. VI.19).

Dans ce cas il existe une solution similaire pour laquelle la distribution des vitesses ne dépend pas de la longueur courante x.

Avec $\partial w_x/\partial x = 0$ l'équation de la continuité entraîne que $w_y = w_p$ = const et l'équation du mouvement devient

$$w_p \, \partial w_x/\partial y = \nu \partial^2 w_x/\partial y^2.$$

La solution de cette équation s'écrit

$$w_x = w_\infty \left(1 - e^{\frac{w_p y}{\nu}}\right); \quad w_y = w_p < 0. \tag{VI.145}$$

Pour l'épaisseur de déplacement et l'épaisseur de quantité de mouvement, on a

$$\delta^* = -\nu/w_p; \quad \delta^{**} = -0{,}5\nu/w_p. \tag{VI.146}$$

La contrainte tangentielle sur la paroi et le coefficient de frottement se calculent d'après les formules

$$\tau_p = \mu \, (\partial w_x/\partial y)_{y=0} = \rho \, (-w_p) \, w_\infty;$$
$$C_f = 2\tau_p/(\rho w_\infty^2) = -2w_p/w_\infty. \tag{VI.147}$$

Comme le montre la formule, dans les conditions envisagées la contrainte tangentielle ne dépend pas de la viscosité du fluide.

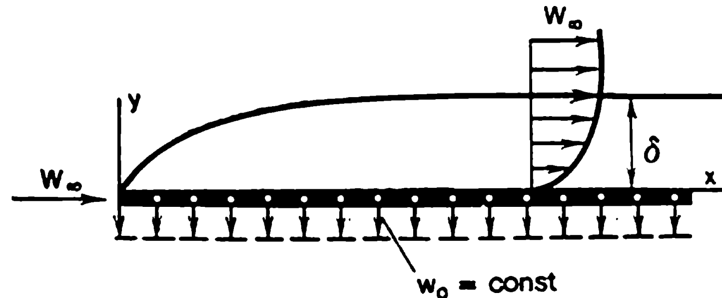


Fig. VI.19. Contournement longitudinal d'une plaque à aspiration répartie uniformément

Calculons le paramètre de perméabilité $b_1 = \frac{w_p}{w_\infty} \frac{2}{C_f}$; pour le cas envisagé, $b_1 = -1$.

La figure VI.20 compare les profils des vitesses sur les plaques perméable [d'après l'équation (VI.145)] et imperméable. Comme le montrent les courbes, l'absorption du fluide depuis la couche limite rend le profil plus rempli. La distribution similaire des vitesses de la forme (VI.145) s'établit pratiquement depuis les valeurs de la coordonnée longitudinale x définie par la formule

$$\left(-\frac{w_p}{w_\infty}\right)^2 \frac{w_\infty x}{\nu} = 4.$$

La loi de frottement relative des conditions envisagées est donnée par les équations (VI.147), (VI.146) et (VI.77):

$$\Psi = (C_f/C_{f0})_{\mathrm{Re}^{**}} = 2{,}28. \qquad \text{(VI.148)}$$

Ainsi, dans le cas de l'absorption asymptotique visualisée en coordonnées $\Psi = f(b_1)$, la loi de frottement correspond à un point

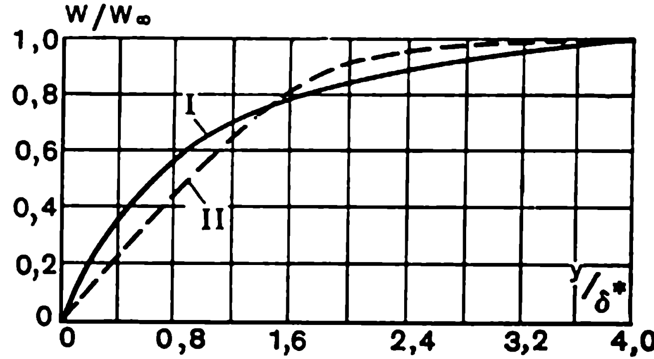


Fig. VI.20. Distribution des vitesses dans une couche limite sur une plaque plane:

I — profil asymptotique des vitesses lors de l'aspiration uniformément répartie; *II* — profil des vitesses sans aspiration

$(b_1 = -1;\ \Psi = 2{,}28)$. Respectivement,

$$\Psi_x = \left(\frac{C_f}{C_{f0}}\right)_{\mathrm{Re}_x} = -\frac{w_p\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{w_\infty 0{,}332} = -b_x, \qquad \text{(VI.149)}$$

où $b_x = \dfrac{w_p}{w_\infty}\dfrac{2}{C_{f0x}}$.

On peut obtenir d'une façon analogue la solution similaire de l'équation de l'énergie. Sous la condition $\partial T/\partial x = 0$ l'équation de l'énergie devient

$$w_p\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \qquad \text{(VI.150)}$$

Sa solution s'écrit

$$\frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} = \left(1 - e^{\frac{\mathrm{Pr}\, w_p y}{\nu}}\right). \qquad \text{(VI.151)}$$

Compte tenu du fait que $q_p = -\lambda\left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)_p$ et $\mathrm{St} = \dfrac{q_p}{\rho_\infty w_\infty c_p (T_\infty - T_p)}$, on obtient

$$\mathrm{St} = -w_p/w_\infty;\quad \Psi_s = \Psi = 2{,}28. \qquad \text{(VI.152)}$$

Pour la loi d'échange de chaleur dans le domaine intermédiaire des valeurs de b_1 on peut adopter la dépendance linéaire, c'est-à-dire

$$\Psi_s = 1 - 1{,}28\, b_1.$$

Ainsi, *lors de l'absorption asymptotique du gaz, le coefficient de transmission de chaleur est égal au débit relatif du gaz à travers la surface et devient plus grand par rapport à celui de la surface imperméable.* L'absorption du gaz à partir de la couche limite est utilisée pour prévenir le décollement de celle-ci sous l'action du gradient de pression positif.

Le cas d'insufflation du gaz à travers la surface d'échange de chaleur (évaporation, sublimation, refroidissement par paroi poreuse, etc.) présente de l'intérêt pour de nombreux problèmes appliqués.

Déterminons les conditions pour lesquelles existent les solutions similaires des équations de la couche limite.

Pour la loi exponentielle de la variation de la vitesse

$$w_y = -\partial\psi/\partial x; \quad \psi = \sqrt{\nu x w_\infty}\, f(\eta); \quad w_\infty = Cx^m, \qquad \text{(VI.153)}$$

d'où

$$w_y = -f(\eta)\left(\frac{m+1}{2}\right) x^{(m-1)/2}\sqrt{C\nu} - Cy\left(\frac{1}{2}\right) f'(\eta)\, x^{m-1}. \qquad \text{(VI.154)}$$

Sur la paroi pour $y=0$, $\eta=0$ et $w_y = w_p$; donc

$$w_p = -f(0)\left(\frac{m+1}{2}\right) x^{(m-1)/2}\sqrt{C\nu}, \qquad \text{(VI.155)}$$

ou

$$w_p = -\left(\frac{m+1}{2}\right) f(0) \frac{w_\infty}{\sqrt{w_\infty x/\nu}}\,; \qquad \text{(VI.156)}$$

$$f(0) = -\left(\frac{2}{m+1}\right)\frac{w_p}{w_\infty}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}. \qquad \text{(VI.157)}$$

De cette façon, pour que la fonction $f(0)$ ne dépende pas de x, il faut que l'insufflation du gaz change suivant la longueur conformément à la relation

$$w_p \sim x^{(m-1)/2}. \qquad \text{(VI.158)}$$

En particulier, au voisinage du point d'attaque ($m = 1$), $w_p =$ = const. Pour le contournement d'une plaque plane ($m = 0$) $w_p \sim$ $\sim 1/\sqrt{x}$.

La résolution de l'équation de l'énergie sous la forme (VI.82) est également justifiée pour les conditions envisagées, seulement la fonction $f(\eta)$ doit être prise pour la couche limite dynamique d'une surface perméable.

Les résultats des calculs de la couche limite thermique à la surface perméable pour de différentes valeurs du paramètre de perméabilité $b_x = \frac{w_p}{w_\infty}\frac{2}{C_{f0x}}$, où $\frac{C_{f0x}}{2} = \frac{0{,}332}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$, consignés sur les tableaux VI.6, VI.7, montrent que l'insufflation du gaz dans la couche

Tableau VI.6

Valeurs de $Nu_x Re_x^{-1/2}$ dans la couche limite laminaire (T_p, T_∞, w_∞ constants) pour de différentes valeurs de b_x et du nombre Pr

b_x	Pr			b_x	Pr		
	0,7	0,8	1,0		0,7	0,8	1,0
−7,500	1,850	2,097	2,59	+0,750	0,166	0,166	0,165
−2,250	0,722	0,797	0,945	+1,125	0,107	0,103	0,094
−0,750	0,429	0,461	0,523	+1,500	0,052	0,046	0,036
0	0,292	0,307	0,332	+1,857	—	—	0

Tableau VI.7

Valeurs de groupement $Nu_x Re_x^{-1/2}$ dans la couche limite laminaire (T_p, T_∞ constants, Pr = 0,7) pour de différentes valeurs de b_x et m

b_x	m							
	−0,04175	−0,0036	0	0,0257	0,0811	0,333	0,500	1,000
0,717	0,103	—	—	—	—	—	—	—
0,750	—	—	0,166	—	—	—	—	—
1,000	—	—	—	—	—	0,242	—	—
1,125	—	—	0,107	—	—	—	0,259	—
1,500	—	0,0251	0,0152	—	—	—	—	0,293
1,554	—	—	—	—	0,087	—	—	—
1,674	—	—	—	—	0,109	—	—	—
2,001	—	—	—	—	—	0,131	—	—
3,000	—	—	—	—	—	—	—	0,146

limite conduit à une diminution brusque des coefficients de transmission de chaleur. Dans le cas du contournement d'une plaque plane à paramètre d'insufflation

$$b_x = 3\,\frac{w_p}{w_\infty}\sqrt{Re_x} = 1,86$$

la couche limite est repoussée de la paroi et le coefficient de transmission de chaleur s'annule.

Lorsqu'il s'agit d'insuffler un gaz étranger, il convient d'ajouter aux équations du mouvement, de la continuité et de l'énergie l'équation de la diffusion de ce gaz. Le système d'équations complet de la couche limite compressible

à deux composantes est de la forme

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) = 0;$$

$$\rho w_x \frac{\partial C_1}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D_{1\text{-}2} \frac{\partial C_1}{\partial y}\right);$$

$$\rho c_p w_x \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p w_y \frac{\partial T}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)^2 + \rho D_{1\text{-}2}(c_{p1} - c_{p2}) \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial C_1}{\partial y}. \quad \text{(VI.159)}$$

Ici $C_1 = \rho_1/\rho$ est la fraction de masse du gaz insufflé; D_{1-2}, le coefficient de diffusion.

Les conditions aux limites sont: pour $y = 0$ $w_x = 0$; $w_y = w_p$, $T = T_p$; pour $y = \infty$ $w_x = w_\infty$, $T = T_\infty$, $C_1 = 0$.

La concentration du gaz insufflé sur la paroi se calcule à partir de l'équation du bilan de la masse à la surface d'échange de chaleur qui, pour une paroi semi-perméable, est de la forme

$$\rho_p w_p = C_1 \rho_p w_p - D_{1\text{-}2} \rho_p \left(\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)_p, \quad \text{(VI.160)}$$

d'où

$$w_p = -\frac{D_{1\text{-}2}}{1 - C_{1p}} \left(\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)_p. \quad \text{(VI.161)}$$

Le système d'équations différentielles (VI.159) est résolu pour certains cas particuliers. Ainsi, Eckert et Hartnet l'ont résolu pour le cas de contournement d'une plaque par un courant de fluide incompressible à propriétés physiques constantes. Ceci en supposant que les propriétés des composantes ne dépendent pas de la pression et de la température et se distinguent peu l'une de l'autre.

Les figures VI.21, VI.22 représentent les distributions de la température, de la vitesse et de la concentration en fonction du paramètre d'insufflation $\frac{w_p}{w_\infty}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ $(\rho_p = \rho_\infty)$ qui est associé sans ambiguïté au facteur de perméabilité de la paroi introduit précédemment

$$b_x = \frac{2\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty C_{f0x}} \cong 3 \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty} \sqrt{\mathrm{Re}_x}.$$

Ici $C_{f0x} = 0{,}332/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$.

L'analyse des courbes des figures VI.21 et VI.22 montre qu'avec la croissance des paramètres d'insufflation, la couche limite s'épaissit, et lorsque sont atteintes les valeurs $\frac{w_p}{w_\infty}\sqrt{\mathrm{Re}_x} = 0{,}619$ (ce qui correspond à $b_x = b_{cr} \cong 1{,}86$), la couche limite se décolle de la surface contournée.

La figure VI.23 traduit les résultats des calculs numériques d'échange de chaleur réalisés par Baron pour l'insufflation de

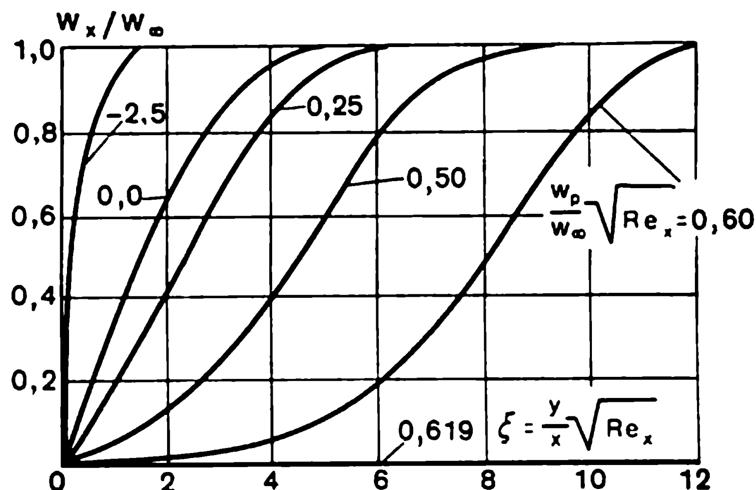


Fig. VI.21. Développement du profil de vitesse sans dimension dans la couche limite laminaire en fonction du paramètre d'insufflation

l'hélium et du gaz carbonique dans la couche limite laminaire de l'air. Il y a là aussi la courbe relative à l'insufflation d'un gaz

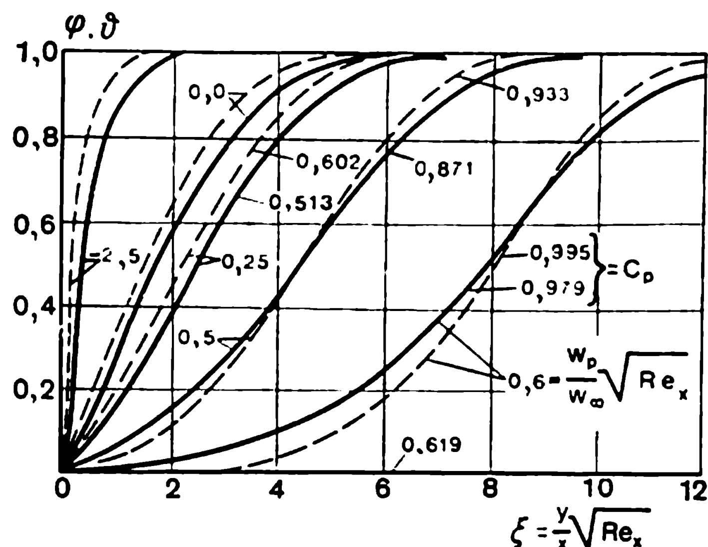


Fig. VI.22. Profils de température sans dimension $\vartheta = \frac{T-T_p}{T_0-T_p}$ et de concentration $\varphi = \frac{C_1-C_{1p}}{C_{10}-C_{1p}}$ dans la couche limite laminaire pour des paramètres d'insufflation différents et les nombres de Prandtl:
——— $Pr = Sc = 0,7$; – – – – – $Pr = Sc = 1$

homogène. On remarque sans peine que l'insufflation des gaz « légers » fait croître l'efficacité de la protection calorifuge. Ceci est dû surtout à l'influence de la chaleur spécifique du gaz insufflé.

Gross, Hartnet et autres ont généralisé les résultats des résolutions numériques des équations de la couche limite laminaire sur une plaque perméable et ont proposé la formule suivante pour le calcul de l'échange de chaleur local

$$\frac{q_p}{q_{p0}} = 1 - 1{,}82\varepsilon^{1/3} \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty} \sqrt{\mathrm{Re}_x},$$

où ε est le rapport des masses moléculaires relatives du gaz du courant principal et du gaz insufflé; q_{p0}, le flux thermique sur la plaque imperméable pour la même valeur de Re_x.

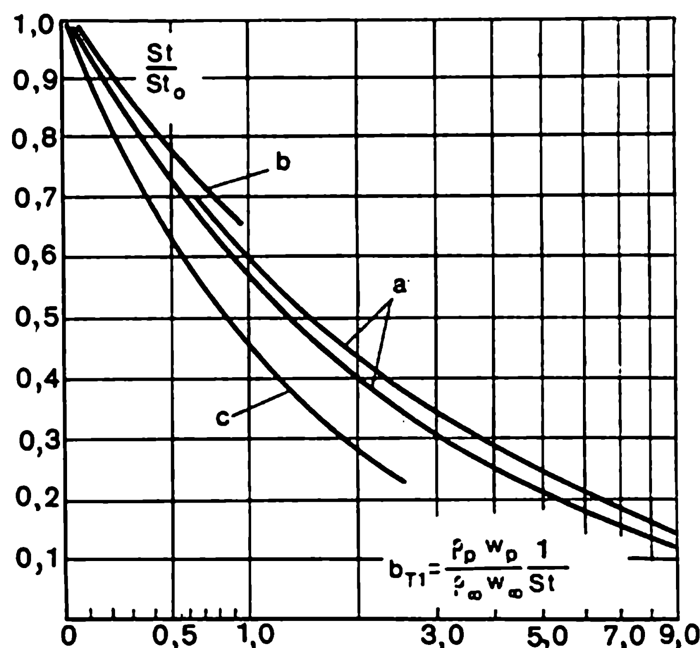


Fig. VI.23. Echange de chaleur dans la couche limite laminaire avec insufflation et vitesse constante du courant extérieur:

a — pour des propriétés physiques constantes (Pr = 1 ; 0,7); *b* — pour des propriétés physiques variables et insufflation de CO_2 dans le courant d'air (Pr = 0,73; Sc = 1,04); *c* — pour des propriétés physiques variables et insufflation de He dans le courant d'air (Pr = 0,73; Sc = 0,23)

Les constantes physiques figurant dans le nombre Re_x se calculent d'après la température déterminante

$$T_d = T_\infty + 0{,}5\,(T_p - T_\infty) + 0{,}22\,(T_p^* - T_\infty).$$

Sur la base des relations susmentionnées, S. Koutatéladzé [18] a proposé une formule plus commode de la prise en considération de l'influence de l'insufflation sur la loi relative de l'échange de chaleur pour Re_T^{**} = idem

$$\Psi_s = (\mathrm{St}/\mathrm{St}_0)_{\mathrm{Re}_T^{**}} = (1 - \bar{b}_T)^{1/3}. \qquad \text{(VI.162)}$$

Ici $\overline{b}_T = b_T/b_{cr}$ est le facteur relatif de la perméabilité de la paroi

$$b_{cr} = 1{,}82\varepsilon^{1/3} \sqrt{1+0{,}5\,(T_p/T_\infty - 1) + 0{,}22\,(T_p^*/T_\infty - 1)}\,; \quad \text{(VI.163)}$$

$b_T = \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty \mathrm{St}_0}$, le paramètre thermique de la perméabilité; St_0, le nombre de Stanton à la surface imperméable pour la valeur existante du nombre Re_T^{**}.

L'expression obtenue pour la loi relative d'échange de chaleur d'une plaque semi-perméable peut être utilisée pour le calcul de l'échange de chaleur d'une surface non isotherme semi-perméable contournée par un courant subsonique. Dans ce cas l'équation intégrale de l'énergie (VI.63) s'écrit

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{dX} + \frac{\mathrm{Re}_T^{**}}{\Delta T}\,\frac{d\,\Delta T}{dX} = \mathrm{Re}_L\,\mathrm{St}_0\,(\Psi_s + b_T).$$

Ici $\Psi_s = \Psi_T\,(1 - b_T)^{4/3}$, et Ψ_T est la correction pour l'allure non isotherme et la compressibilité [cf. (VI.142)].

Dans le cas général, pour les fonctions données $\widetilde{w}_\infty$, ΔT et b_T de la coordonnée longitudinale sans dimensions X et la surface perméable suivant toute la longueur, la solution de l'équation de l'énergie par rapport à Re_T^{**} est de la forme

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T}\left[\frac{0{,}44}{\mathrm{Pr}^{4/3}}\,\mathrm{Re}_{0\infty}\int_0^X \widetilde{w}_\infty\,[\Psi_T\,(1-\widetilde{b}_T)^{4/3} + b_T]\,\Delta T\,dX^2\right]^{1/2}. \quad \text{(VI.164)}$$

La distribution de l'amenée du gaz refroidi se trouve d'après la formule

$$j_p = \rho_p w_p = \rho_\infty w_\infty b_T\,\mathrm{St}_0.$$

D'après les valeurs obtenues du nombre Re_T^{**} la formule (VI.93) donne la distribution du nombre St_0.

Le nombre local St est déterminé par l'expression

$$\mathrm{St} = \Psi_T\,(1 - \widetilde{b}_T)\,\mathrm{St}_0,$$

et la température initiale du gaz de refroidissement, d'après le débit connu

$$T' = T_p - q_p/(c_p j_p).$$

Mais si c'est la température de la paroi qui est donnée, comme, par exemple, lors de l'évaporation d'un liquide ou de la sublimation d'une matière de la surface, alors il faut calculer la quantité de la vapeur évacuée de cette surface.

Dans ce cas le débit de la vapeur se calcule d'après l'équation du bilan thermique

$$q_{\text{p}} = rj_{\text{p}}.$$

Ici r est la chaleur latente d'évaporation (de sublimation).

En introduisant dans cette équation, comme dans ce qui précède, les valeurs de b_T et St, on obtient

$$b_T = \Psi_s/\mathrm{K}, \tag{VI.165}$$

où $\mathrm{K} = r/c_{p\text{p}}\,\Delta T$ est le nombre de Koutatéladzé.

En résolvant ensemble les équations (VI.162) et (VI.165), on trouve le paramètre d'insufflation b_T, puis, d'après l'équation (VI.164), le nombre Re_T^{**}, etc.

Si l'on donne les paramètres du courant extérieur, la température de la paroi et la température initiale du gaz de refroidissement amené à travers la paroi poreuse T', le débit du gaz de refroidissement se calcule également à partir de l'équation du bilan

$$q_{\text{p}} = j_{\text{p}} c_{p\text{p}}\,\Delta T',$$

où $\Delta T' = T_{\text{p}} - T'$.

Après l'introduction des grandeurs b_T et St on obtient

$$b_T = \Psi_s\,\Delta T/\Delta T'. \tag{VI.166}$$

Ainsi, en comparant les expressions (VI.165) et (VI.166), notons que pour une plaque la condition $b_T = \text{const}$ est équivalente à la condition $T_{\text{p}} = \text{const}$.

8. Echange de chaleur en présence des réactions chimiques

En présence des réactions chimiques dans la couche limite l'expression du flux thermique (sans tenir compte des diffusions thermique et barométrique) est d'après l'équation (VI.31) de la forme

$$-q = \left[\frac{\lambda}{\bar{c}_p}\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} + \sum_i \left(\rho D_i - \frac{\lambda}{\bar{c}_p}\right)\bar{h}_i\,\frac{\partial C_i}{\partial y}\right]. \tag{VI.167}$$

Ici $\bar{c}_p = \sum_i C_i c_{pi}$ est ce qu'on appelle la chaleur spécifique figée du mélange; $\bar{h}_i = h_i - h^*$, l'enthalpie totale qui comprend aussi bien l'énergie thermique que chimique; $\bar{h}_0 = \bar{h}_i + w_x^2/2$, l'enthalpie totale du freinage.

Récrivons l'équation (VI.167) de la façon suivante

$$-q = \frac{\lambda}{\bar{c}_p}\left[\frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y} - \sum_i \bar{h}_i\,\frac{\partial C_i}{\partial y} + \rho\frac{D_i \bar{c}_p}{\lambda}\sum_i \bar{h}_i\,\frac{\partial C_i}{\partial y}\right],$$

c'est-à-dire la valeur relative de l'énergie thermique transmise par deux mécanismes dépend aussi bien du rapport des énergies chimique et thermique, que de la valeur du nombre de Lewis-Sémionov

$$\mathrm{Le} = \rho D_i \bar{c}_p / \lambda.$$

Si le nombre Le = 1, alors $-q = \frac{\dot{\lambda}}{\bar{c}_p} \frac{\partial \bar{h}_0}{\partial y}$ indépendamment du mécanisme d'échange de chaleur et de la vitesse des réactions chimiques au sein du mélange. Dans ce cas, l'équation différentielle de l'énergie, écrite à l'aide des enthalpies totales du freinage, ne contient pas la vitesse de la formation des composantes isolées et a la même forme que l'équation ordinaire de l'énergie pour le gaz non réagissant. Par conséquent, dans ce cas le flux thermique q dépend essentiellement de la différence des enthalpies totales sur la paroi et dans le courant, et ne dépend pas de la disposition de la zone des réactions chimiques. Pour la plupart des mélanges de gaz la valeur du nombre Le ~ 1, et les propriétés de transfert dépendent faiblement de la composition du mélange; c'est pourquoi une telle approximation est admissible. Une simplification analogue du problème a été utilisée pour la première fois par Schwab et Zeldovitch dans l'exploration de la flamme de diffusion laminaire.

Interaction entre le courant et le matériau de la surface. Examinons la question de l'interaction entre la couche limite réagissante et la surface. Pour les phénomènes qui nous intéressent, le trait commun est la marche simultanée des réactions chimiques à l'état de gaz et des réactions entre la surface solide et la couche limite réagissante. Pourtant, si on envisage les concentrations partielles des composantes du mélange réagissant, même dans le cas de la triple analogie, lorsque Le = Pr = Sc = 1, comme nous l'avons déjà dit, les distributions de la concentration, de la température et de la vitesse ne sont pas identiques.

En introduisant les concentrations totales des éléments du mélange, nous éliminons cet inconvénient. La liaison entre $\tilde{C}_i$ et C_k est donnée par l'expression

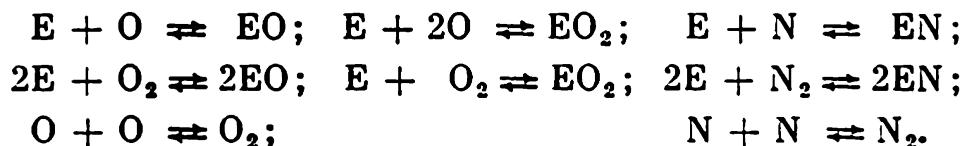
$$\tilde{C}_i = \sum_k r_{i,k} C_k, \tag{VI.168}$$

où $\tilde{C}_i$ est la fraction de masse de l'i-ième élément; $r_{i,k}$, la fraction de masse de l'i-ième élément dans la k-ième composante; C_k, la fraction de masse de la k-ième composante.

Puisque $\tilde{C}_i$ = const, il vient

$$d\tilde{C}_i = 0 = \sum_k r_{i,k}\, dC_k. \tag{VI.169}$$

Examinons l'écoulement près de la surface dont le matériau s'évapore intensément, les vapeurs du matériau de la surface réagissant avec la couche limite chauffée composée du mélange des molécules et des atomes d'oxygène et d'azote. Dans ces conditions la couche limite peut être le siège des réactions simultanées suivantes



$$\begin{aligned} &E + O \rightleftharpoons EO; \quad E + 2O \rightleftharpoons EO_2; \quad E + N \rightleftharpoons EN;\\ &2E + O_2 \rightleftharpoons 2EO; \quad E + O_2 \rightleftharpoons EO_2; \quad 2E + N_2 \rightleftharpoons 2EN;\\ &O + O \rightleftharpoons O_2; \qquad\qquad\qquad N + N \rightleftharpoons N_2. \end{aligned}$$

Alors, en vertu de l'égalité (VI.168), pour les fractions de masse de O, N et E, on obtient

$$\tilde{C}_E = C_E + r_{E,EO}C_{EO} + r_{E,EO_2}C_{EO_2} + r_{E,EN}C_{EN},$$

$$\tilde{C}_N = C_N + C_{N_2} + r_{N,EN}C_{EN};$$

$$\tilde{C}_O = C_O + C_{O_2} + r_{O,EO}C_{OE} + r_{O,EO_2}C_{EO_2}. \qquad \text{(VI.170)}$$

En utilisant l'équation (VI.168), on a pour dC_E

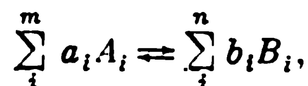
$$dC_E = -r_{E,EO}dC_{EO} - r_{E,EO_2}dC_{EO_2} - r_{E,EN}dC_{EN}. \qquad \text{(VI.171)}$$

Des égalités analogues peuvent s'obtenir pour les autres fractions de masse.

Les réactions qui marchent dans la couche limite peuvent s'accompagner soit de l'émission de la chaleur lors de la formation des composantes, soit de l'absorption de la chaleur lors de la dissociation.

La variation de l'enthalpie pendant la réaction avec $p = \text{const}$ est caractérisée par l'effet thermique de la réaction $\Delta Q_p = -\Delta H$.

La réaction de la formation peut s'écrire



$$\sum_i^m a_i A_i \rightleftharpoons \sum_i^n b_i B_i,$$

où a_i, b_i sont les coefficients stœchiométriques; A_i, B_i, les symboles des éléments chimiques; il vient

$$-\Delta H = \sum_i^m a_i H_{A_i} - \sum_i^n b_i H_{B_i}. \qquad \text{(VI.172)}$$

Ici H_{A_i} est l'enthalpie molaire de l'A-ième élément chimique.

Introduisons la notion de l'enthalpie spécifique définie par l'égalité

$$h_{A_i} = H_{A_i}/\mu_{A_i}.$$

Ici μ_{A_i} est la masse moléculaire relative de l'élément chimique A_i.

L'effet thermique spécifique de la réaction de l'élément peut s'obtenir à partir de l'égalité (VI.172) sous la forme

$$\Delta Q = -\frac{\Delta H}{\mu_{A_1}} a_1 \cdot h_{A_1} + \frac{1}{\mu_{A_1}} \left(\sum_{i=2}^{m} \mu_{A_i} a_i h_{A_i} - \sum_{i=1}^{i=n} \mu_{B_i} b_i h_{B_i} \right). \quad \text{(VI.173)}$$

Ainsi, pour la réaction $E + O \rightleftharpoons EO$,

$$a_E = a_O = a_{EO} = 1\,; \quad \Delta Q_{EO} = h_O + \frac{1}{\mu_O} \mu_E h_E - \frac{1}{\mu_O} \mu_{EO} h_{EO}.$$

Multiplions et divisons le deuxième membre de l'égalité obtenue par μ_{EO} (masse moléculaire de EO) et, en notant que, par exemple,

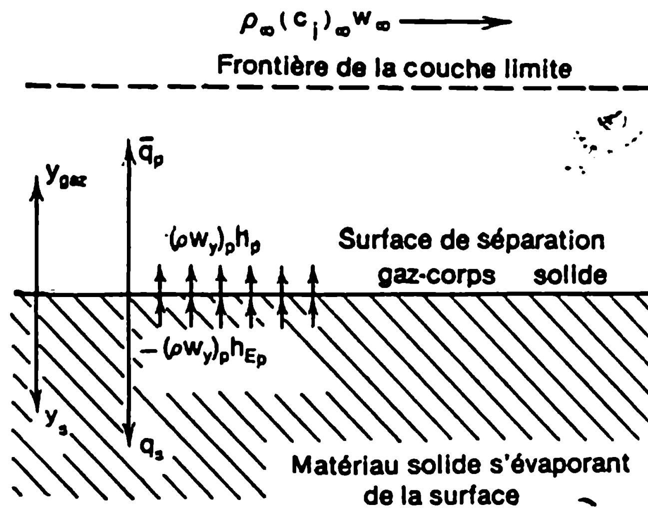


Fig. VI.24. Flux thermiques schématisés sur une surface réagissante

$\mu_O \mid \mu_{EO} = r_{O,EO}$, calculons la valeur de l'effet thermique spécifique

$$\Delta Q_{EO} = h_O + \frac{r_{E.\,EO}}{r_{O.\,EO}} h_E - \frac{1}{r_{E.\,EO}} h_{EO}. \quad \text{(VI.174)}$$

D'une façon analogue déterminons les effets thermiques spécifiques des réactions restantes.

Les chaleurs de dissociation de l'oxygène et de l'azote valent respectivement

$$\Delta Q_{O_2} = 2\,(h_O - h_{O_2})\,; \quad \Delta Q_{N_2} = 2\,(h_N - h_{N_2}). \quad \text{(VI.175)}$$

Flux thermique en présence des réactions chimiques dans la couche limite laminaire pour Le = 1. Composons l'équation du bilan de la chaleur à la surface réagissante (fig. VI.24). Comme nous

l'avons montré précédemment, la chaleur est transférée vers la surface par conduction et diffusion

$$-q_p = \left[\frac{\lambda}{\bar{c}_p}\frac{\partial \bar{h}_O}{\partial y} + \sum_i \left(\rho D_{1\text{-}2} - \frac{\lambda}{\bar{c}_p}\right) h_i \frac{\partial C_i}{\partial y}\right]_p .$$

En même temps, le flux d'enthalpie $(\rho w_y)_p h_p$ s'échappe de la surface vers la couche limite, et du côté de la paroi s'amène le flux d'enthalpie $(\rho w_y)_p h_{E_p}$, où h_p est l'enthalpie totale du mélange des gaz à la surface; h_{E_p}, l'enthalpie du matériau de la paroi à la température de la surface.

Si on néglige l'échange de chaleur par rayonnement, on obtient l'expression du flux thermique global qui pénètre dans la surface

$$q_S = -q_p - (\rho w_y)_p h_p + (\rho w_y)_p h_{E_p}.$$

En portant dans cette équation l'expression de q_p, on obtient

$$q_S = \left[\frac{\lambda}{\bar{c}_p}\frac{\partial \bar{h}_O}{\partial y} + \sum_i \left(\rho D_{1\text{-}2} - \frac{\lambda}{\bar{c}_p}\right) h_i \frac{\partial C_i}{\partial y}\right]_p - (\rho w_y)_p h_p + (\rho w_y)_p h_{E_p}. \quad \text{(VI.176)}$$

Si le nombre Le = 1, il vient

$$-q_p = \frac{\lambda}{\bar{c}_p}\left(\frac{\partial \bar{h}_O}{\partial y}\right)_p = \text{St}\, \rho_\infty w_\infty \left\{[h_{O\infty} - h_p] + \frac{w_\infty^2}{2}\right\}.$$

Introduisons dans l'expression (VI.176), comme dans le cas de la paroi perméable, le paramètre d'insufflation

$$b_{T_1} = \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty \text{St}}$$

et la chaleur latente d'évaporation de la surface h_ϑ. Ainsi, pour la réaction $E_{sol} \rightleftarrows E_{gaz}$

$$h_{E_{sol}} + h_\vartheta = h_{E_{gaz}}.$$

De la sorte, lorsque le nombre Le = 1, le flux thermique vers la paroi peut s'écrire

$$q_s = \rho_\infty w_\infty \text{St}\, \{(h_{O\infty} - h_p) + w_\infty^2/2 - b_{T_1} h_p + b_{T_1}(h_{E_{gaz}} - h_\vartheta)\}. \quad \text{(VI.177)}$$

Par définition, écrivons la différence des enthalpies du mélange des gaz de la façon suivante

$$(h_{O\infty} - h_p) = \sum_i \{C_{i\infty} h_{Oi\infty} - C_{ip} h_{ip}\} = \sum_i C_{i\infty}(h_{Oi\infty} - h_{ip}) + \sum_i h_{ip}(C_{i\infty} - C_{ip}). \quad \text{(VI.178)}$$

La composante E n'est présente que dans la couche limite, c'est-à-dire $C_{E\infty} = 0$; réunissons donc les équations (VI.177), (VI.178) pour obtenir

$$q_s = \rho_\infty w_\infty \mathrm{St} \{ \sum_i C_{i\infty} [h_{i\infty} - h_{ip}] + w_\infty^2/2 +$$

$$+ \sum_{i \neq E} h_{ip} [C_{i\infty} - (1 + b_{T_1}) C_{ip}] + h_{E_p} [b_{T_1} - (1 + b_{T_1}) C_{E_p}] - b_{T_1} h_\theta \}. \qquad (VI.179)$$

Si on utilise les expressions du type (VI.174), (VI.175), l'équation (VI.179) peut également s'écrire à l'aide des effets thermiques de la réaction. Simplifions l'équation (VI.179) en utilisant les conditions aux limites.

Comme nous l'avons montré dans le cas de la triple analogie (Le = Sc = Pr = 1), si on introduit la concentration totale, les équations différentielles de l'énergie et de la diffusion de la couche limite deviennent identiques, d'où il s'ensuit que lorsque les conditions aux limites sont identiques, la distribution de l'enthalpie totale du freinage et des concentrations est identique elle aussi.

Ainsi, pour la composante O on peut écrire

$$(\tilde{C}_O - \tilde{C}_{Op})/(\tilde{C}_{O\infty} - \tilde{C}_{Op}) = (\bar{h}_O - h_p)/(h_{O\infty} - h_p). \qquad (VI.180)$$

A la surface d'un corps, pour toute composante, sauf E, le flux de masse global doit disparaître, c'est-à-dire le flux de masse de diffusion de la composante doit être égal au flux convectif

$$\rho_p w_p \tilde{C}_{ip} - \left(\rho D_{1\text{-}2} \frac{\partial \tilde{C}_i}{\partial y} \right)_p = 0, \quad i \neq E. \qquad (VI.181)$$

Pour un élément de la surface, le flux global de la masse est égal au flux du matériau qui s'évapore à partir de la surface

$$\rho_p w_p = \rho_p w_p \tilde{C}_{Ep} - \left(\rho D_{1\text{-}2} \frac{\partial \tilde{C}_E}{\partial y} \right)_p. \qquad (VI.182)$$

En portant (VI.180) dans (VI.181) et en dérivant, on obtient

$$\rho_p w_p \tilde{C}_{ip} = \rho D_{1\text{-}2} \frac{(\tilde{C}_{i\infty} - \tilde{C}_{ip})}{(\bar{h}_{O\infty} - h_p)} \left(\frac{\partial \bar{h}_O}{\partial y} \right)_p.$$

Introduisons dans cette relation le paramètre d'insufflation b_{T_1} et le nombre St pour obtenir

$$\tilde{C}_{i\infty}/\tilde{C}_{ip} = b_{T_1} + 1, \quad i \neq E. \qquad (VI.183)$$

Ici $b_{T_1} = \rho_p w_p / \rho_\infty w_\infty \mathrm{St}$.

Et enfin, en y portant la valeur de $\widetilde{C}_i$ définie par les relations (VI.170), on trouve

$$(C_j + C_{j_2})_\infty - (b_{T_1} + 1)(C_j + C_{j_2})_p =$$
$$= (b_{T_1} + 1)(r_{j,\,Ej} C_{Ej} + r_{j,\,Ej_2} C_{Ej_2})_p. \quad (VI.184)$$

Ici $j = O,\ N;\ j_2 = O_2,\ N_2$.

Une relation analogue peut s'obtenir pour la composante E en tenant compte qu'à la frontière extérieure de la couche limite $C_{E\infty} = 0$ l'équation (VI.182) devient

$$\widetilde{C}_{E_p} = b_{T_1}/(b_{T_1} + 1). \quad (VI.185)$$

En utilisant les relations (VI.184), (VI.185) et (VI.174), (VI.175), l'équation (VI.179) peut être ramenée à la forme

$$q_s = \rho_\infty w_\infty \mathrm{St} \{ \underbrace{\sum_i C_{i\infty} (h_{i\infty} - h_{ip})}_{1} + \underbrace{w_\infty^2/2}_{2} +$$
$$+ \underbrace{\sum_{j=O,\,N} [\widetilde{C}_{j\infty} - (b_{T_1} + 1)(\widetilde{C}_j - r_{j,\,Ej} C_{Ej})_p]\, \Delta Q_{Ej}}_{3} -$$
$$- \underbrace{\sum_{j=O,\,N} [C_{j_{2\infty}} - (b_{T_1} + 1) C_{j_{2p}}]\, \Delta Q_{j_2}}_{4} - \underbrace{b_{T_1} h_\vartheta}_{5} \}. \quad (VI.186)$$

Dans cette expression, pour simplifier, on n'examine pas les réactions qui conduisent à la formation des bioxydes, du fait qu'aux températures élevées les surfaces de concentration Ej_2 sont très petites. Cette équation, obtenue sous l'hypothèse que Le = Sc = = Pr = 1, permet de dégager divers facteurs qui en présence des réactions chimiques dans la couche limite influent sur l'échange de chaleur.

Ainsi, le premier terme détermine le transfert de chaleur par conduction; le deuxième, la dissipation dans la couche limite; le troisième, la chaleur qui se dégage dans la réaction chimique pendant la formation des composantes; le quatrième, l'absorption de la chaleur pendant la dissociation des composantes; le cinquième, l'absorption de la chaleur par évaporation (sublimation) de la surface.

De la sorte, la diminution de la vitesse de formation des composantes, l'accélération de la dissociation et de la sublimation conduisent à une diminution notable du transfert de chaleur à la surface.

L'analyse de l'expression obtenue pour le flux thermique (VI.186) montre que si l'on connaît les conditions aux limites, on peut, sous les hypothèses adoptées, calculer la valeur du flux thermique sans

tenir compte des phénomènes dont la couche limite est le siège. Pourtant, il convient de retenir que la grandeur q_S dépend sous une forme implicite, par l'intermédiaire du nombre St, des processus qui marchent dans la couche limite. Pour calculer le nombre de Stanton figurant dans l'équation (VI.186), il faut résoudre l'équation intégrale de l'énergie pour des conditions aux limites concrètes.

Calcul de l'échange de chaleur par convection à la surface chimiquement réagissante. Lorsque le nombre Le = 1 et les propriétés de transfert sont indépendantes de la composition du mélange, le flux thermique ne dépend pas de la disposition de la zone des réactions chimiques.

Par conséquent, on peut supposer que les réactions chimiques ne marchent que directement à la surface du corps. Dans ce cas, la composition du mélange de gaz dans la section droite de la couche limite est déterminée seulement par les processus de convection et de diffusion des produits de la réaction des substances réagissantes. Une telle couche limite est dite stabilisée.

De cette façon, le calcul de l'échange de chaleur en présence des réactions chimiques sous l'hypothèse d'une couche limite stabilisée (immuable) ne doit pas se distinguer en principe du calcul analogue de l'échange de chaleur à une surface semi-perméable. Dans ce cas les lois de l'échange de chaleur (VI.142), (VI.162) qui rendent compte de l'allure non isotherme et du courant transversal de la substance sont également justifiées.

Pour le cas du contournement d'une surface non isotherme par un gaz réagissant compressible, l'équation intégrale de l'énergie est de la forme

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_h}{dX} + \mathrm{Re}_h^{**}\left[\frac{1}{\Delta\bar{h}_O}\,\frac{d\,\Delta\bar{h}}{dX}\right] = \mathrm{Re}_L \mathrm{St}_O (\Psi_s + b_T), \qquad \text{(VI.187)}$$

où $\Psi_s = \Psi_T (1 - \tilde{b}_T)^{4/3}$.

La solution de cette équation différentielle linéaire s'écrit

$$\mathrm{Re}_h^{**} = \frac{1}{\Delta\bar{h}_O}\left[\frac{0{,}44}{\mathrm{Pr}^{3/4}}\,\mathrm{Re}_{O\infty}\int_0^X u\,(1-u^2)^{(k-1)/k} \times \right.$$
$$\left. \times\,[\Psi_s (1-\bar{b}_T)^{4/3} + b_T]\,\Delta\bar{h}_O\,dX\right]^{1/2}. \qquad \text{(VI.188)}$$

La valeur du nombre local de Stanton est donnée par l'équation

$$\mathrm{St} = \frac{0{,}22}{\mathrm{Re}_h^{**}\mathrm{Pr}^{4/3}}\,\Psi_s. \qquad \text{(VI.189)}$$

L'intensité de l'évaporation (combustion) de la surface se détermine d'après l'expression

$$j_p = (\rho w_y)_p = \rho_\infty w_\infty b_{T_1}\,\mathrm{St}. \qquad \text{(VI.190)}$$

Comme nous l'avons montré précédemment, le paramètre d'insufflation b_{T_1} peut s'obtenir en calculant la composition équipondérale d'après une équation analogue à (VI.185).

Le flux thermique global qui pénètre la surface se calcule à l'aide de l'équation (VI.186).

Si on porte dans l'équation (VI.187) l'expression correspondante de la loi d'échange de chaleur justifiée pour la couche limite turbulente, la méthode de calcul de l'échange thermique en présence des réactions chimiques, examinée dans ce paragraphe devient également applicable au calcul de la couche limite turbulente.

Dans les équations (VI.188), (VI.190) la température de la surface d'échange de chaleur doit être donnée. Pourtant, souvent c'est une grandeur à établir, ce paramètre étant défini non seulement par les réactions chimiques à la surface du corps et l'intensité de l'échange de chaleur avec le courant incident de gaz, mais encore par l'intensité de l'évacuation de la chaleur dans le corps solide.

Dans certains cas on peut négliger l'évacuation de la chaleur à l'intérieur du corps (par exemple, lors de la sublimation du carbone); la température de la surface est alors déterminée par l'équation (VI.186) sous l'hypothèse que $q_S = 0$.

Dans un autre cas limite on peut admettre que la vitesse de sublimation est stationnaire et la substance sublimée s'échauffe depuis une certaine température initiale T_1 jusqu'à la température de la surface T_p, c'est-à-dire

$$q_s = \rho_p w_p \int_{T_1}^{T_p} C_E \, dT = \rho_p w_p C_E (T_p - T_1). \qquad \text{(VI.191)}$$

Compte tenu de (VI.191), l'équation (VI.186) entraîne

$$b_{T_1} C_E (T_p - T_1) = \Delta h_{ef} - b_{T_1} h_{\vartheta}, \qquad \text{(VI.192)}$$

où

$$\Delta h_{ef} = \sum_i C_{i\infty} (h_{i\infty} - h_{i_p}) + w_\infty^2/2 + \ldots, \qquad \text{(VI.193)}$$

C_E est la capacité calorifique du matériau de la paroi ; d'où

$$T_p = T_1 + \Delta h_{ef}/(b_{T_1} C_E) - h_{\vartheta}/C_E. \qquad \text{(VI.194)}$$

En toute rigueur, les équations (VI.193), (VI.194) sont résolues par approximations successives ou par méthode graphique. Dans ce cas il est commode d'écrire (VI.192) de la façon suivante:

$$b_{T_1} [C_E (T_p - T_1) + h_{\vartheta}] = \Delta h_{ef}. \qquad \text{(VI.195)}$$

Les premier et deuxième membres de l'équation dépendent de la température de la surface, cette dernière s'obtient par résolution graphique de l'équation (VI.195).

§ VI.3. Convection forcée sous l'écoulement turbulent d'un liquide

1. Formation de l'écoulement turbulent

En étudiant le mouvement de l'eau dans des tubes circulaires. O. Reynolds a été le premier à établir qu'un fluide peut se déplacer suivant l'un des deux régimes, laminaire ou turbulent.

Dans le cas de l'écoulement *laminaire*, les particules du fluide suivent des trajectoires parfaitement définies. Comme l'a montré l'analyse des résultats de la résolution décrite dans ce qui précède, les lois générales de l'écoulement laminaire sont décrites par l'équation de Navier-Stokes.

Cependant, sous des conditions définies, avec l'augmentation de la vitesse, le mouvement laminaire perd sa stabilité, les perturbations initiales, en se développant, produisent une nouvelle forme de mouvement qui est un mouvement chaotique des masses du fluide. Les processus de formation et d'évolution des mouvements de cette sorte ont un caractère aléatoire, et leur étude impose une approche statistique. Cette forme de mouvement est très fréquente dans la nature et porte le nom d'écoulement *turbulent*.

O. Reynolds a montré que le passage d'un régime à un autre se produit lorsque le nombre Re atteint une valeur définie. Ainsi, de nombreuses expériences ont permis d'établir que l'écoulement d'un liquide dans des tubes circulaires a toujours une allure laminaire, si $Re \leqslant 2200$, où $Re = w_p\, d/\nu$; d, le diamètre du tube ; w_{moy}, la vitesse moyenne.

L'écoulement est alors stable quelles que soient les perturbations. La valeur mentionnée du nombre Re s'appelle *nombre de Reynolds critique* (Re_{cr}) ; il détermine la limite inférieure du régime laminaire. Pour la limite supérieure de Re les expériences n'ont pas permis d'obtenir une valeur définie. cette limite étant repoussée à de multiples reprises par la création des conditions artificielles spéciales (entrée progressive, surface lisse, etc.) jusqu'à $Re = 5 \cdot 10^4$.

Dans la région de transition $Re_{cr} < Re < 5 \cdot 10^4$ l'écoulement est instable. et toute perturbation, même infime, conduit au régime turbulent.

Une étude minutieuse de l'écoulement d'un fluide dans des tubes avec $Re \sim Re_{cr}$ a montré que dans la même section du tube les régimes laminaire et turbulent se succèdent l'un à l'autre. Ce phénomène porte le nom d'« alternance ». Celle-ci doit son origine à la turbulence qui apparaît dans des régions discrètes du courant sous la forme de bouchons dont l'étendue dépend du nombre Re. La mesure quantitative de l'alternance est donnée par le *coefficient d'alternance* γ, qui est la part du temps pendant lequel subsiste dans la section donnée un écoulement turbulent.

La figure VI.25 représente les courbes de pulsation de la composante longitudinale de la vitesse dans la région de transition ($Re_x = 2 \cdot 10^6$, le degré de turbulence du courant extérieur $\varepsilon = 0{,}0025$ %) des points qui reposent à l'in-

térieur de la couche limite. On y distingue nettement les domaines alternants de l'écoulement laminaire et turbulent. Les phénomènes transitoires ayant lieu

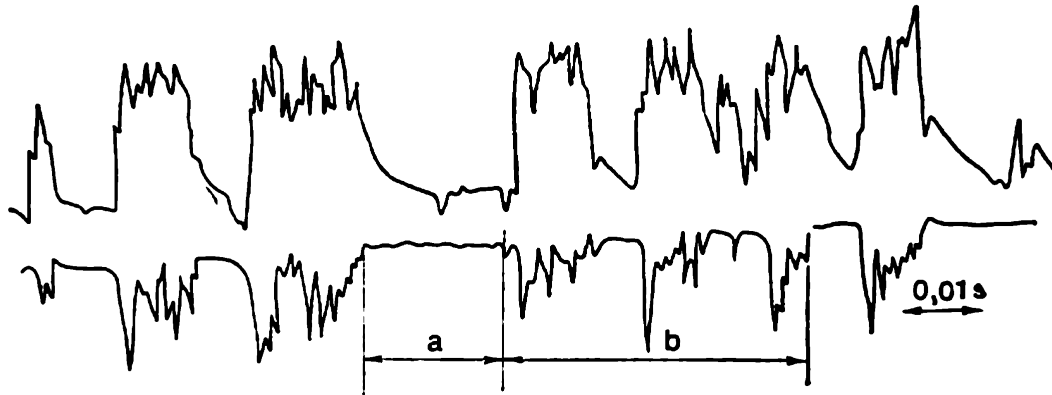


Fig. VI.25. Diagrammes des pulsations de la composante longitudinale de la vitesse dans le domaine transitoire du courant dans la couche limite d'une plaque: a — courant laminaire; b — courant turbulent; $y = 0{,}4$ mm — courbe supérieure; $y = 2{,}1$ mm — courbe inférieure

dans la couche limite, en plus du nombre Re et de l'intensité de la turbulence, dépendent encore de facteurs tels que la variation de la pression à la frontière extérieure de la couche limite, l'état de surface, le courant transversal de la matière, la compressibilité et l'allure non isotherme.

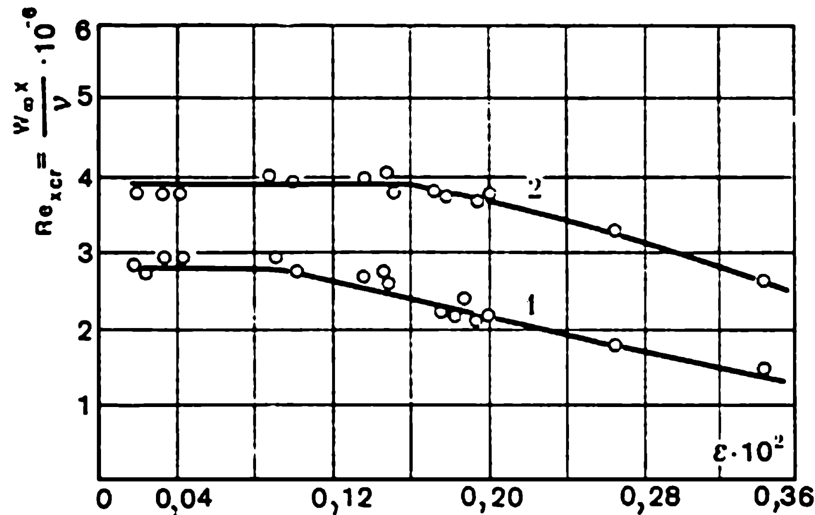


Fig. VI.26. Influence du degré de turbulence ε sur Re_{cr} pour une plaque plane contournée dans le sens longitudinal (d'après les données de Schubauer et Scremsted):

1 — courant laminaire; 2 — courant turbulent

Ainsi, sur une plaque à bord d'attaque effilé contournée par un courant d'air le passage du régime laminaire au régime turbulent dans la couche limite se produit à la distance x du bord d'attaque, définie par l'égalité

$$Re_{cr} = (w_\infty x/\nu_\infty)_{cr} = 0{,}35 - 2{,}8 \cdot 10^6. \qquad \text{(VI.196)}$$

La valeur de Re_{cr} dépend de l'intensité initiale du courant incident. La figure VI.26 représente les résultats des mesures de Schubauer et Scremsted [16].

Les courbes montrent qu'avec la diminution de l'intensité de la turbulence la valeur du nombre $\mathrm{Re_{cr}}$ augmente d'abord, puis avec $\varepsilon = 0{,}0008$, après avoir atteint la valeur $\mathrm{R_{cr}} = 2{,}8\cdot10^6$, reste constant, alors que l'intensité de la turbulence continue à décroître. Ceci signifie que sur une plaque contournée longitudinalement pour $\mathrm{Re_{cr}}$ il existe également une frontière supérieure.

La grandeur $\mathrm{Re_{cr}}$ est aussi sensiblement influencée par la variation de la pression à la frontière extérieure de la couche limite. Ainsi, dans un écoulement convergent la valeur du nombre Re est bien plus grande, et dans un écoulement de diffusion, bien plus petite que lors du contournement d'une plaque. C'est pourquoi dans la région convergente de la couche limite, où à la surface extérieure de la couche limite le courant est accéléré, le passage au régime turbulent retarde, en se déplaçant en aval suivant le courant, et dans la région de diffusion, au contraire, il apparaît plus tôt.

2. Equations de la couche limite turbulente

Les équations différentielles du mouvement, de la continuité, de l'énergie et de la diffusion pour le mouvement moyenné dans la couche limite turbulente d'un fluide compressible s'obtiennent par évaluation comparative de la valeur des termes figurant dans le système (VI.68)-(VI.73). En conservant dans ces équations les plus grands termes de même ordre, on obtient pour la couche limite turbulente compressible plane le système suivant:

$$\bar\rho\bar w_x\frac{\partial\bar w_x}{\partial x}+\bar\rho\bar w_y\frac{\partial\bar w_x}{\partial y}=-\frac{\partial\bar p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\bar w_x}{\partial y}-\overline{j_y v_x}\right);$$

$$\frac{\partial\overline{\rho w_x}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\rho w_y}}{\partial y}=0;$$

$$c_p\left(\overline{\rho w_x}\frac{\partial\bar T}{\partial x}+\overline{\rho w_y}\frac{\partial\bar T}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial\bar T}{\partial y}-c_p\overline{j_y\Theta}\right)+\bar w_x\frac{\partial\bar p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial\bar w_x}{\partial y}\right)^2;$$

$$\bar\rho\bar w_x\frac{\partial\bar C}{\partial x}+\rho w_y\frac{\partial\bar C}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar\rho D\frac{\partial\bar C}{\partial y}-\overline{j_y C'}\right). \qquad \text{(VI.197)}$$

Les équations intégrales du mouvement, de l'énergie et de la diffusion de la couche limite turbulente se déduisent de (VI.197) à (VI.199), de la même façon que dans le cas de la couche laminaire, et ont la même forme *):

$$\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{dX}+f\,\mathrm{Re}_L(2+H)=\mathrm{Re}_L\frac{c_{f0}}{2}(\Psi+b);$$

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{dX}+\frac{\mathrm{Re}_T^{**}}{\Delta T}\frac{d\,\Delta T}{dX}=\mathrm{Re}_L\,\mathrm{St}_0(\Psi_s+b_T);$$

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_D^{**}}{dX}+\frac{\mathrm{Re}_D}{\Delta\bar C}\frac{d\,\Delta\bar C}{dX}=\mathrm{Re}_L\,\mathrm{St}_D(\Psi_D+b_D). \qquad \text{(VI.198)}$$

*) Ces équations peuvent également s'obtenir en considérant le bilan de la quantité du mouvement, de l'énergie et de la matière pour un volume élémentaire du fluide.

Toutefois, comme nous le montrerons dans ce qui suit, à la différence de la couche limite laminaire, les lois de résistance, d'échange de chaleur et de masse ne peuvent pas s'obtenir analytiquement par résolution du système d'équations différentielles (VI.197), du fait que ce système n'est pas fermé.

3. Contrainte tangentielle turbulente, flux thermique et de diffusion

En comparant les équations différentielles de la couche limite laminaire avec les équations de la couche limite turbulente obtenues pour des valeurs moyennes, on voit sans peine que dans la couche limite turbulente apparaissent des contraintes de frottement, des flux thermique et diffusif complémentaires, définis par les relations

$$\tau_T = -\overline{j_y v_x}, \quad q_T = -\overline{c_p j_y \Theta}, \quad j_T = -\overline{j_y C'}. \qquad \text{(VI.199)}$$

Ici j_y est la composante pulsative du débit, donnée par la relation

$$\rho w_y = \overline{\rho w_y} + j_y. \qquad \text{(VI.200)}$$

L'égalité (VI.200) permet de récrire la relation (VI.199) sous la forme

$$-\tau_t = \overline{j_y v_x} = \overline{[(\bar{\rho} + \delta)(\bar{w}_y + v_y) - \overline{\rho w_y}]\, v_x} =$$

$$= \bar{\rho}\overline{v_y v_x} + \bar{w}_y\overline{\delta v_x} + \overline{\delta v_y v_x};$$

$$-q_t = c_p\overline{j_y\Theta} = c_p\,\overline{[(\bar{\rho} + \delta)(\bar{w}_y + \bar{v}_y) - \overline{\rho w_y}]\,\Theta} =$$

$$= c_p\,(\bar{\rho}\overline{v_y\Theta} + \bar{w}_y\overline{\delta\Theta} + \overline{v\delta_y\Theta});$$

$$-j_T = \overline{j_y C'} = \overline{[(\bar{\rho} + \delta)(\bar{w}_y + v_y) - \overline{\rho w_y}]\, C'} =$$

$$= (\bar{\rho}\overline{v_y C'} + \bar{w}_y\overline{\delta C'} + \overline{\delta v_y C'}). \qquad \text{(VI.201)}$$

Ici les quantités δ, Θ et C' sont déterminées par les relations $\rho = \bar{\rho} + \delta$; $T = \bar{T} + \Theta$; $C = \bar{C} + C'$.

Dans le cas de l'écoulement d'un fluide incompressible ($\delta = 0$) les relations deviennent bien plus simples pour s'écrire

$$\tau_t = -\rho\overline{v_y v_x}; \quad q_t = -c_p\rho\overline{v_y\Theta}; \quad j_t = -\rho\overline{v_y C'}. \qquad \text{(VI.202)}$$

Si on admet que la pulsation de la densité est associée seulement à celle du champ thermique, c'est-à-dire si $\rho = \rho\,(T)$ et ne dépend pas de la pression, il vient

$$\delta = \rho - \bar{\rho} = -\rho\beta\Theta.$$

Ici $\beta = 1/T$ est le coefficient d'expansion volumique.

Dans ce cas les expressions du frottement turbulent, des flux thermique et de diffusion (VI.201) peuvent se récrire

$$\tau_t = -\rho\overline{v_x v_y}\,(1 - \beta);\quad q_t = -c_p\rho\overline{v_y\Theta}\,(1 - \beta_t);$$

$$j_t = -\rho\overline{v_y C'}\,(1 - \beta_D);\quad \beta = \frac{\bar{w}_y\overline{v_x\Theta} + \overline{v_x v_y\Theta}}{\overline{v_y v_x}T};$$

$$\beta_T = \frac{\bar{w}_y\overline{\Theta^2} + \overline{\Theta^2 v_y}}{\overline{v_y\Theta}T};\quad \beta_D = \frac{\bar{w}_y\overline{C'^2} + \overline{C'^2 v_y}}{\overline{v_y C} + \bar{C}'}, \qquad \text{(VI.203)}$$

où les coefficients β, β_T et β_D tiennent compte de l'influence de la température, de la concentration et de la vitesse sur les grandeurs τ_t, q_t et j_t.

Les équations (VI.203) amènent que dans la couche limite turbulente il existe entre les flux de l'impulsion, de la chaleur et de la masse une liaison étroite qu'on utilise largement dans les calculs des processus d'échange de chaleur et de masse.

4. Théories semi-empiriques du transfert turbulent

Comme nous l'avons dit plus haut, le système (VI.197) se distingue des équations correspondantes de la couche limite laminaire par des termes complémentaires $\overline{j_y v_x}$, $c_p\overline{j_y\Theta}$ et $\overline{j_y C'}$, qui peuvent être interprétés comme des contraintes « reynoldsiennes » complémentaires du frottement turbulent, et des composantes du flux de chaleur et de masse provoqué par la turbulence.

Les composantes turbulentes de transfert mentionnées ne peuvent pas être définies par résolution du système d'équations (VI.197) et des conditions aux limites, établis pour des grandeurs moyennes. On se rend donc compte depuis longtemps qu'il est nécessaire d'introduire des hypothèses non liées aux équations de l'écoulement turbulent moyenné. Ces hypothèses, qui, avec une précision suffisante pour des buts pratiques, permettent de résoudre certains problèmes de la couche limite, sont à la base d'une branche spéciale nommée *théorie semi-empirique de la turbulence*. Ces hypothèses associent la viscosité apparente et le flux thermique aux paramètres de l'écoulement moyenné.

Transfert d'impulsion. Pour la contrainte turbulente de frottement cette hypothèse a été énoncée pour la première fois par Boussinesq qui a proposé d'exprimer le frottement turbulent par une expression analogue à la formule de Newton

$$\tau_t = A_\tau\, d\bar{w}_x/dy,$$

où A_τ est le coefficient d'échange turbulent. A la différence de la viscosité dynamique, la grandeur A_τ dépend de plusieurs grandeurs, y compris la distribution de la vitesse moyennée $\bar{w}_x$.

Mais la relation entre le coefficient d'échange turbulent et le champ des vitesses moyennées a été pour la première fois indiquée par Prandtl. Pour exposer ses idées, considérons le cas de l'écoulement plan d'un fluide incompressible.

Admettons que la direction de l'écoulement moyenné coïncide avec l'axe des x; alors $\overline{w}_x = \overline{w}_x(y)$; $\overline{w}_y = 0$; $\overline{w}_z = 0$.

Dans ce cas la contrainte de frottement s'exprime par la formule

$$\tau_t = -\rho\overline{v_x v_y} = A_\tau\, d\overline{w}_x/dy. \qquad \text{(VI.204)}$$

D'après Prandtl, la pulsation de la vitesse v_y normale aux lignes de courant du déplacement moyenné doit être du même ordre que la pulsation longitudinale

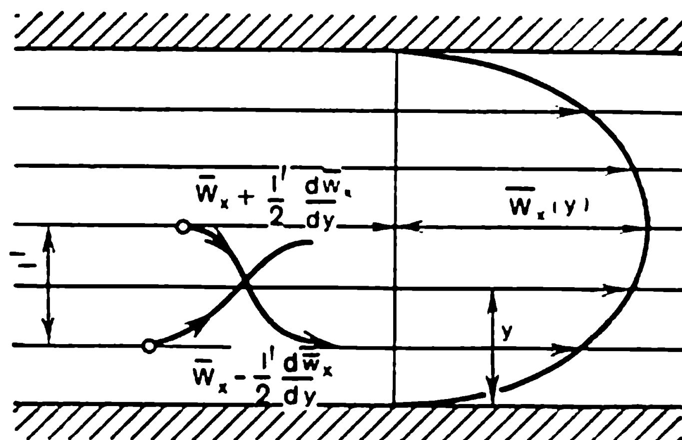


Fig. VI.27. Illustration de la notion de longueur de mélange

de la vitesse v_x et proportionnelle à la différence des vitesses entre les couches (fig. VI.27):

$$v_x \sim v_y \sim l\, d\overline{w}_x/dy.$$

En portant la relation obtenue dans l'équation (VI.204), on obtient la formule de Prandtl

$$\tau = \text{nombre } l^2\, (\partial w_x/\partial y)^2.$$

Prandtl a donné à la grandeur l le nom de longueur de mélange, ce qui a fait donner à la théorie semi-empirique de Prandtl le nom de « théorie de la longueur de mélange ».

La formule de Prandtl peut s'obtenir également à partir de la théorie des dimensions, si on admet que l'écoulement turbulent permet de négliger l'action de la viscosité moléculaire par rapport à la viscosité turbulente.

La viscosité apparente ou coefficient de diffusion de la quantité de mouvement A_τ qui figure dans (VI.204) doit, dans le cas général, être fonction de la densité et de la distribution de la vitesse moyennée, c'est-à-dire de l'ensemble des valeurs des dérivées $\partial\overline{w}_x/\partial y$, $\partial^2\overline{w}_x/\partial y^2$, . . . Admettons en première approximation que A_τ peut être mis sous la forme de produit des fonctions exponentielles de la densité et de la dérivée première de la vitesse

$$A_\tau = \rho^a\, (\partial w_x/\partial y)^b. \qquad \text{(VI.205)}$$

Calculons les exposants a et b par la méthode de la théorie des dimensions. Les dimensions de la masse, de la longueur et du temps (M, L, T) sont alors exprimées de la façon suivante

$$[A_\tau]=\frac{\mathrm{MLT}}{\mathrm{T^2L^2}}=\mathrm{ML^{-1}T^{-1}}; \quad [\rho]=\mathrm{ML^{-3}}; \quad [d\overline{w}_x/dy]=\mathrm{T^{-1}}.$$

En portant les dimensions obtenues dans l'équation (VI.205) on trouve

$$\mathrm{ML^{-1}T^{-1}} = [\mathrm{ML^{-3}}]^a\,[\mathrm{T^{-1}}]^b = \mathrm{M^aL^{3a}T^{-b}}.$$

La comparaison des exposants des dimensions de même nom fournit le système d'équations pour définir les exposants du système: $3a = 1$; $a = 1/3$; $b = 1$. Ce système d'équations est irréalisable, ce qui traduit l'impossibilité physique de la relation de la forme (VI.205). Complétons cette dernière par le facteur contenant la longueur portée à une certaine puissance c:

$$A_\tau = \rho^a l^c\,(d\overline{w}_x/dy)^b.$$

Après avoir effectué des opérations analogues, on obtient le système d'égalités suivant:

$$c - 3a = 1; \quad b = 1; \quad a = 1,$$

possédant la solution unique: $a = 1$; $b = 1$; $c = 2$. Par conséquent, $A_\tau = \rho l^2\, d\overline{w}_x/dy$; $\tau = \rho l^2\,(d\overline{w}_x/dy)^2$. Il est plus correct de mettre cette dernière expression sous la forme

$$\tau_t = \rho l^2 \left|\frac{d\overline{w}_x}{dy}\right| \left(\frac{\partial \overline{w}_x}{dy}\right), \tag{VI.206}$$

du fait que le signe de la contrainte tangentielle est déterminé par le signe de la dérivée.

Comme il est devenu clair par la suite, le schéma adopté par Prandtl n'est pas justifié physiquement, puisqu'en fait dans un écoulement turbulent le transfert de l'impulsion est assuré par le spectre des pulsations. Pourtant cette hypothèse s'est avérée très efficace pour le calcul des paramètres moyennés de la couche limite turbulente.

En considérant l'écoulement turbulent plan d'un fluide incompressible et en retenant que sur une paroi la contrainte turbulente de frottement est nulle (absence du mouvement de pulsation), on peut admettre que dans la couche limite la longueur de mélange est proportionnelle à la distance jusqu'à la paroi

$$l = \chi y, \tag{VI.207}$$

où χ est une constante universelle établie par expérience.

Compte tenu de la relation (VI.207), l'équation (VI.206) devient

$$\tau_t = \rho\chi^2 y^2\,(d\overline{w}_x/\partial y)^2. \tag{VI.208}$$

La distance d'échelle l peut également être formée d'une autre façon. Par exemple, le rapport de la dérivée première à la dérivée seconde de la vitesse moyennée suivant la coordonnée donne une certaine longueur caractéristique du champ des vitesses. Ainsi, en adoptant

$$l = -\chi_1 \frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y} \Big/ \frac{\partial^2 \overline{w}_x}{\partial y^2}, \tag{VI.209}$$

on obtient l'expression

$$\tau_t = \rho\chi_1^2 \left(\frac{\partial \overline{w}_x}{\partial y}\right)^4 \Big/ \left(\frac{\partial^2 \overline{w}_x}{\partial y^2}\right)^2. \tag{VI.210}$$

Le signe moins de (VI.209) est nécessaire pour qu'il y ait $l > 0$ près de la paroi, où, généralement,

$$\partial w_x/\partial y > 0, \text{ et } \partial^2\overline{w}_x/\partial y^2 < 0.$$

La formule (VI.210) a été proposée pour la première fois par Von Karman.

Transfert de chaleur et de masse. Dans un courant turbulent plan d'un fluide incompressible l'expression du flux de chaleur et de masse provoqué par le brassage turbulent est de la forme

$$q_t = -c_p\rho\overline{v_y\Theta}, \quad j_t = -\rho\overline{v_yC'}.$$

Ceci signifie que les pulsations v_y transportent une quantité de chaleur et de masse dans le sens perpendiculaire au courant principal. Par analogie avec le processus de transfert de l'impulsion, on peut donc admettre que

$$\Theta \sim l_t\,\partial\overline{T}/\partial y; \quad C' \sim l_D\,\partial\overline{C}/\partial y,$$

et ceci conduit à une hypothèse analogue à celle de Prandtl pour le transfert d'impulsion

$$q_t = \rho c_p l_t l \frac{d\overline{w}_x}{dy}\frac{\partial\overline{T}}{dy}, \quad j_t = \rho l_D l \frac{d\overline{w}_x}{dy}\frac{d\overline{C}}{dy}, \tag{VI.211}$$

où l_t et l_D sont certaines échelles linéaires, dans le cas général différentes de l.

En introduisant les coefficients de transfert turbulent de chaleur A_q et de masse A_D, par analogie avec l'expression (VI.204) les flux de chaleur et de masse peuvent s'écrire sous la forme

$$q_t = c_p A_q \frac{dT}{dy}, \quad j_t = A_D \frac{d\overline{C}}{dy}. \tag{VI.212}$$

A la base de la théorie du transfert turbulent repose l'idée suivant laquelle les mêmes volumes, ou « moles » de fluide, transportent simultanément une quantité de mouvement, de chaleur et de matière. Dans ces conditions on peut supposer que pour le cas considéré les coefficients de transfert A_τ, A_q et A_D doivent être égaux entre eux. Ceci est possible si au cours du transfert les « moles » n'interagissent pas avec le milieu ambiant. En réalité il n'en est pas ainsi : lors de leur déplacement, les « moles » interagissent avec le milieu par rapport auquel elles se déplacent. La différence entre les coefficients de transfert est alors conditionnée par l'allure particulière de l'interaction moléculaire (dynamique, thermique, etc.) du caloporteur avec le milieu.

Aussi, tout comme dans le cas de l'écoulement laminaire, la liaison entre les mécanismes du transfert turbulent de la quantité

de mouvement, de la chaleur et de la masse est-elle définie par les nombres caractéristiques de la turbulence Pr_t et Sc_t:

$$\mathrm{Pr}_t = c_p \mu_t / \lambda_t = A_\tau / A_q; \quad \mathrm{Sc}_t = A_\tau / A_D.$$

D'après les mesures de différents auteurs, pour les conditions de la turbulence au voisinage de la paroi ces grandeurs sont proches de l'unité ($\sim$0,9).

5. Distribution des vitesses, des températures et des concentrations dans la partie de la couche limite turbulente plane adhérente à la paroi

Les lois empiriques de Prandtl (VI.208) et de Von Karman (VI.210) permettent d'obtenir les lois de distribution des vitesses dans la couche limite turbulente.

Les idées modernes sur la structure de la couche limite turbulente sont fondées sur la division de la couche limite en trois régions qui diffèrent entre eux par l'allure de l'écoulement.

Au voisinage immédiat de la paroi il existe une zone de la sous-couche visqueuse dont l'épaisseur atteint 1 % de l'épaisseur totale de la couche et où le rôle principal est assumé par les processus de transfert moléculaire. La sous-couche visqueuse est liée à la partie complètement évoluée de la couche limite turbulente par une région transitoire. Dans cette dernière, la contrainte laminaire de frottement est commensurable avec la contrainte turbulente. Dans la région complètement évoluée de la couche limite turbulente le frottement turbulent présente une importance décisive.

D'après l'équation du mouvement, dans la couche limite turbulente la contrainte de frottement totale peut être mise sous la forme

$$\tau = \mu\, \partial \bar{w}_x / \partial y + \tau_t.$$

En portant dans cette expression la valeur de τ_t définie par l'égalité (VI.206), on obtient

$$\tau = \mu\, \partial \bar{w}_x / \partial y + \rho l^2 (\partial \bar{w}_x / \partial y)^2. \qquad \text{(VI.213)}$$

Dans la région de la sous-couche visqueuse $0 < y < y_0$

$$\tau = \mu\, \partial \bar{w}_x / \partial y. \qquad \text{(VI.214)}$$

Mettons les relations (VI.213) et (VI.214) sous la forme sans dimensions:

$$\varphi = \bar{w}_x / v_*; \quad \eta = v_* y / \nu, \qquad \text{(VI.215)}$$

où

$$v_* = \sqrt{\tau_p / \rho}, \qquad \text{(VI.216)}$$

v_* est ce qu'on appelle la vitesse de frottement.

En tenant compte des relations (VI.215) et (VI.216), récrivons les équations des contraintes tangentielles (pour $dp/dx = 0$) :

pour la sous-couche visqueuse $0 < \eta < \eta_0$

$$d\varphi/d\eta - \tau/\tau_p = 0; \qquad \text{(VI.217)}$$

pour la région $\eta > \eta_0$

$$\frac{d\varphi}{d\eta} + \left(\frac{l}{y}\eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 - \frac{\tau}{\tau_p} = 0. \qquad \text{(VI.218)}$$

Si on adopte que dans la sous-couche visqueuse $\tau = \tau_p$, l'équation (VI.217) implique

$$\varphi = \eta. \qquad \text{(VI.219)}$$

Considérons maintenant la région de la couche turbulente en pleine évolution, où $\tau_t \gg \tau_\lambda$. En se conformant à Prandtl, faisons l'hypothèse que la contrainte tangentielle totale transversale par rapport à la couche limite est constante et égale à sa valeur sur la paroi ; alors, l'équation (VI.218) devient

$$(\chi\eta\, d\varphi/d\eta)^2 - 1 = 0, \qquad \text{(VI.220)}$$

dont l'intégrale

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{1}{\chi}\ln\frac{\eta}{\eta_1}, \qquad \text{(VI.221)}$$

où l'indice « 1 » marque les grandeurs associées à la frontière extérieure de la région transitoire. Pour simplifier les calculs *), admettons que la couche limite se compose de deux sous-couches. Dans ce cas le profil laminaire peut être étendu jusqu'à la frontière extérieure de la couche transitoire et alors $\varphi_1 = \eta_1$.

La figure VI.28 visualise la loi de la distribution des vitesses dans la couche limite de l'écoulement turbulent dans le cas d'une plaque plane. Les données expérimentales représentées sur la figure VI.28 permettent de calculer χ et η_1

$$\chi = 0{,}4; \quad \eta_1 = 11{,}6. \qquad \text{(VI.222)}$$

Il est commode de mettre l'équation (VI.221) sous la forme

$$\varphi = \frac{1}{\chi}\ln\eta + C, \qquad \text{(VI.223)}$$

où $C = \eta_1 - \frac{1}{\chi}\ln\eta_1$.

En portant les valeurs (VI.222) dans (VI.223) on obtient finalement

$$\varphi = 2{,}5\ln\eta + 5{,}5. \qquad \text{(VI.224)}$$

*) Dans la région transitoire $\eta_0 \leqslant \eta \leqslant \eta_1$ on peut également obtenir les équations du profil des vitesses; toutefois, leur forme est très compliquée et incommode pour des opérations mathématiques ultérieures;

On peut également donner à cette loi une autre forme en étendant l'action de la formule (VI.223) jusqu'à la frontière extérieure de la couche limite. Alors, pour $y = \delta$, $w_x = w_\infty$ l'équation (VI.223) devient

$$\frac{w_\infty}{v_*} = 2{,}5 \ln \delta + 2{,}5 \ln (v_*/\nu) + 5{,}5.$$

En retranchant terme à terme de la relation obtenue l'expression (VI.224), on obtient ce qu'on appelle la loi du défaut de vitesse

$$(w_\infty - w_x)/v_* = -2{,}5 \ln (y/\delta). \qquad \text{(VI.225)}$$

Cette loi est strictement vérifiée pour l'écoulement d'un fluide dans des canaux fermés, et approximativement pour la couche limite,

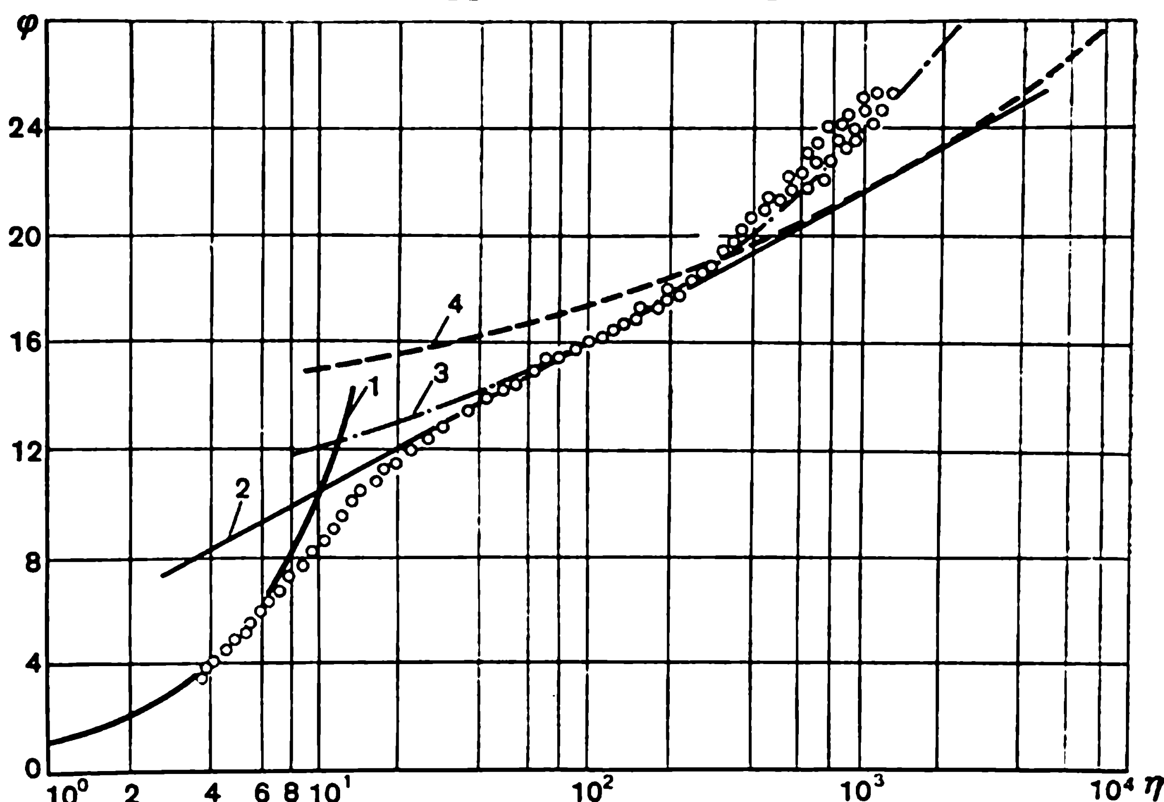


Fig. VI.28. Loi logarithmique universelle de la distribution des vitesses dans une couche limite turbulente sur une plaque plane:

1 — correspond à l'équation $\varphi = \eta$; *2* — à l'équation (VI.224); *3* et *4* — aux lois exponentielles (VI.226) à valeurs $n = 7$ et 10 respectivement; ○ — données expérimentales (Ecole Technique supérieure Bauman de Moscou)

du fait que dans des canaux fermés le profil logarithmique de la vitesse subsiste dans le cas de l'écoulement turbulent presque jusqu'à l'axe et se perturbe dans le domaine extérieur de la couche limite.

Il est intéressant de noter que, comme il s'ensuit de la figure VI.29, la loi du défaut de vitesse sous la forme (VI.225) est vraie aussi bien pour une surface lisse que pour une surface rugueuse.

La loi universelle de la distribution des vitesses (VI.224) est commode pour approximer par une relation exponentielle

$$\varphi(\eta) = A\eta^{n}. \tag{VI.226}$$

Comme le montre la figure VI.28, le profil logarithmique forme alors une enveloppe de la famille des profils exponentiels. Pour de nombreux calculs, l'approximation des profils de la vitesse par une relation exponentielle est très commode. Les coefficients A et n peuvent se calculer à partir du profil logarithmique.

D'une façon analogue on peut obtenir les lois logarithmiques de la distribution des températures et des concentrations suivant la section de la couche limite turbulente. Si l'on retient que $Pr_t = Sc_t = 1$, les équations (VI.211) entraînent

$$\varphi^{+} = A \ln \eta^{+} + C, \tag{VI.227}$$

où : a) pour une couche limite thermique

$$\varphi^{+} = \varphi_t = \theta/\theta^{+},$$
$$\eta^{+} = \eta_t = q_p y/(\lambda \Pr \theta^{+}); \tag{VI.228}$$

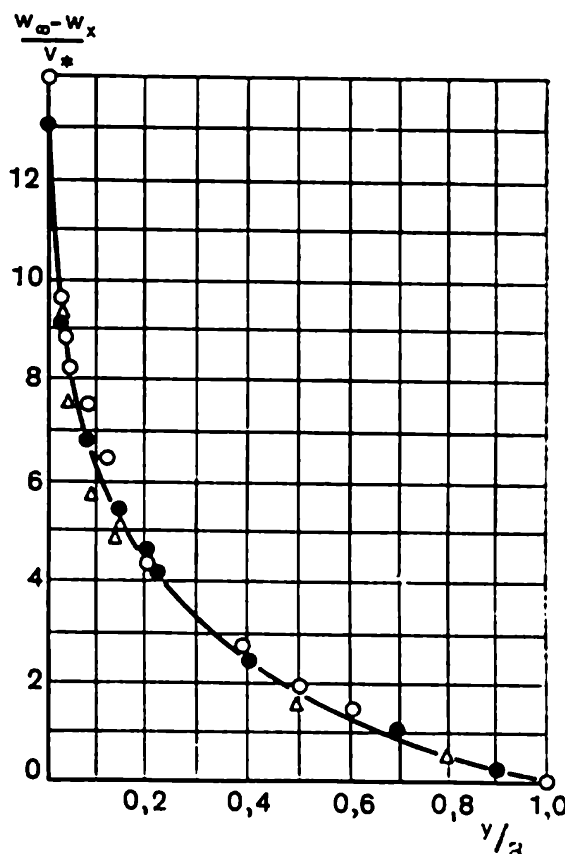


Fig. VI.29. Loi de distribution universelle des vitesses:
——— — d'après la formule (VI.225); données expérimentales avec $Re = 10^6$: • — paroi lisse; △ — $r/k_s = 126$; ○ — $r/k_s = 507$

$\theta^{+} = \sqrt{q_p \Delta T/(c_p \rho_\infty w_\infty)}$ est l'analogue thermique de la vitesse de frottement;

b) pour une couche limite de diffusion

$$\varphi^{+} = \varphi_D = \frac{C_1 - C_{1p}}{\Delta C^{+}}, \quad \eta^{+} = \eta_D = \frac{j_{1p} y}{D \Delta C^{+}}; \tag{VI.229}$$

$\Delta C^{+} = \sqrt{j_{1p} \Delta C/(\rho_\infty w_\infty)}$ est l'analogue de diffusion de la vitesse de frottement. La figure VI.30 compare les mesures expérimentales

de la distribution de la température suivant la section de la couche limite turbulente avec les données fournies par le calcul suivant

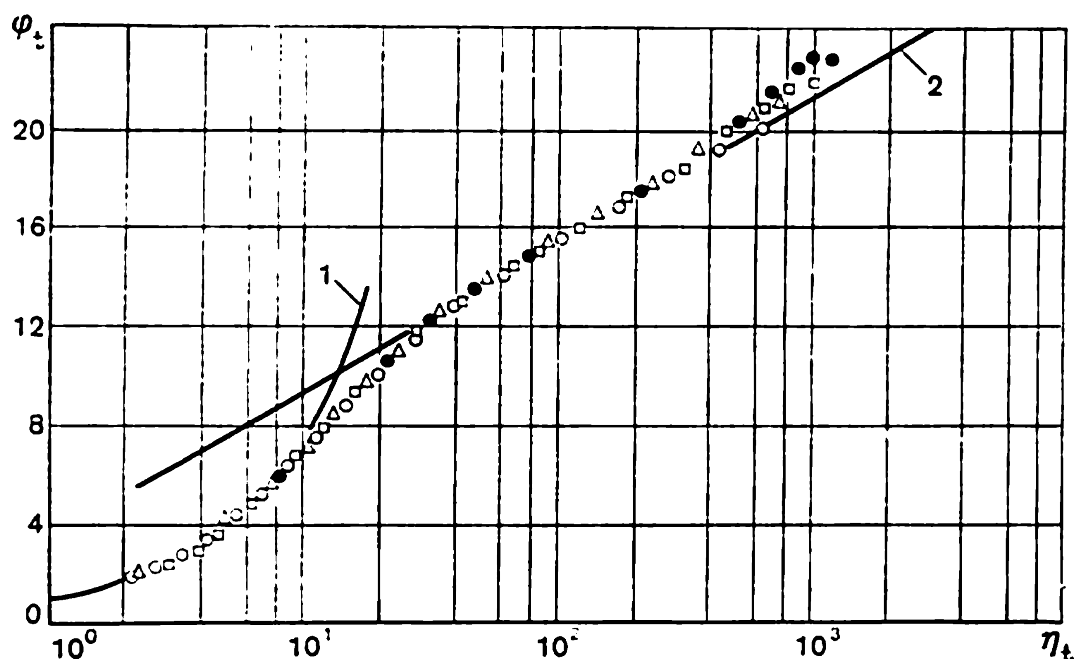


Fig. VI.30. Distribution universelle de la température dans la couche limite turbulente de l'air:

1 — $\varphi_t = 0{,}72\eta_t$; *2* — $\varphi_t = 5{,}9 \log \eta_t + 3{,}2$; ● ○, △, □, ... — expérience de l'Ecole Technique supérieure Bauman de Moscou

la formule (VI.227). On voit que la partie logarithmique du profil de la température est bien décrite par la relation

$$\varphi_t = 5{,}9 \log \eta_t + 3{,}2.$$

6. Lois de frottement, d'échange de chaleur et de masse

Ces lois ne peuvent pas s'obtenir analytiquement par résolution des équations différentielles du mouvement moyenné de la couche limite turbulente, du fait que le système d'équations composé pour ce cas n'est pas fermé. Les lois de frottement, d'échange de chaleur et de masse d'une couche limite turbulente se déduisent des données expérimentales ou en faisant appel aux théories de la turbulence semi-empiriques.

Comme le montre V. Ievlev dans son ouvrage [15], pour la couche limite turbulente ces lois sont conservatives par rapport aux variations des conditions aux limites à la frontière extérieure de la couche limite et sur la paroi, et de ce fait il est possible d'étendre les lois obtenues pour T_p = const et w_∞ = const aux conditions aux

limites plus compliquées. Comme nous le montrerons dans ce qui suit, la variété éventuelle des conditions aux limites est assez bien appréciée par l'intégration des équations des impulsions et de l'énergie. Le profil logarithmique de la vitesse [cf. (VI.224)] permet d'obtenir la loi de frottement en adoptant pour $y = \delta$, $w_x = w_\infty$. Alors, l'équation (VI.224) entraîne

$$1/\sqrt{C_f/2} = 5{,}5 + 2{,}5 \ln \mathrm{Re}_\delta \sqrt{C_f/2}, \qquad \text{(VI.230)}$$

où $\mathrm{Re}_\delta = w_\infty \delta/\nu$; $C_f/2 = \tau_p/(\rho w_\infty^2)$.

Dans cette expression le coefficient de frottement peut être représenté en fonction du nombre de Reynolds construit suivant l'épaisseur de la quantité de mouvement Re**. Par définition

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \int_0^1 \frac{w_x}{w_\infty}\left(1 - \frac{w_x}{w_\infty}\right) d\,\frac{y}{\delta}.$$

En portant dans cette relation l'expression du défaut de vitesses (VI.225), on obtient

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = 2{,}5\sqrt{C_f/2} - 6{,}25 C_f.$$

Enfin, en remplaçant dans l'équation (VI.230) δ par δ^{**}, on trouve finalement la loi de résistance

$$\sqrt{2/C_f} = 5{,}5 + 2{,}5 \ln\,[\mathrm{Re}^{**}/(2{,}5 - 12{,}5\sqrt{C_f/2})]. \qquad \text{(VI.231)}$$

L'équation (VI.231) est approximée avec une précision suffisante par la formule de Von Karman

$$C_f = 2/(2{,}5 \ln \mathrm{Re}^{**} + 3{,}8)^2. \qquad \text{(VI.232)}$$

Il est commode de mettre l'équation (VI.232) sous la forme d'une relation exponentielle

$$C_f = B/(\mathrm{Re}^{**})^m, \qquad \text{(VI.233)}$$

où les coefficients B et m dépendent de la marge de variation de Re**. Avec $\mathrm{Re}^{**} < 10^4$, $B = 0{,}252$; $m = 0{,}25$. En portant l'équation (VI.233) dans la relation intégrale des impulsions de la plaque, on a

$$d\mathrm{Re}^{**}/d\mathrm{Re}_x = B/(\mathrm{Re}^{**})^m. \qquad \text{(VI.234)}$$

Considérons la couche turbulente qui se développe à partir du bord d'attaque de la plaque (pour $x = 0$, $\mathrm{Re}^{**} = 0$), pour obtenir

$$\mathrm{Re}^{**} = [(m + 1)\, B\, \mathrm{Re}_x]^{1/(m+1)}. \qquad \text{(VI.235)}$$

Par conséquent,

$$C_f = B_1 \mathrm{Re}_x^{-m_1}, \qquad \text{(VI.236)}$$

où $B_1 = B^{1/(m+1)} \left(\frac{2}{1+m}\right)^{m(1+m)}$, $m_1 = m/(1+m)$. Les valeurs des coefficients des formules (VI.233) et (VI.236) sont consignées sur le tableau VI.8.

Tableau VI.8

Valeurs des coefficients des formules de la distribution exponentielle des vitesses

n	A	m	m_1	B	B_1
1/7	8,74	0,250	0,200	0,0252	0,0576
1/8	9,71	0,222	0,182	0,0206	0,0450
1/9	10,6	0,200	0,167	0,0190	0,0362
1/10	11,1	0,182	0,154	0,0148	0,0308

Dans le domaine des valeurs des nombres de Reynolds de $5 \cdot 10^5 <$ $< \mathrm{Re}_x < 10^7$, $B = 0{,}0252$; $m = 0{,}25$; $m_1 = 0{,}2$ et

$$C_f = 0{,}0576\ \mathrm{Re}_x^{-0{,}2}. \qquad \text{(VI.237)}$$

Pour les moyennes des coefficients de frottement on a

$$\overline{C}_f = \frac{1}{L} \int_0^L C_f\, dx.$$

Par conséquent,

$$\overline{C}_f = 0{,}072\ \mathrm{Re}_L^{-0{,}2}. \qquad \text{(VI.238)}$$

Sur la figure VI.31 on compare les données expérimentales avec les valeurs calculées d'après la formule (VI.237). D'une façon analogue on peut obtenir les lois d'échange de chaleur et de masse dans la couche limite turbulente.

Pour le cas Pr = 1 et Sc = 1, en adoptant $y = \delta_t$ et $y = \delta_D$, on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{1/\mathrm{St}} &= 5{,}5 + 2{,}5 \ln [\mathrm{Re}_T^{**}/(2{,}5 - 12{,}5)\sqrt{\mathrm{St}})]; \\ \sqrt{1/\mathrm{St}_D} &= 5{,}5 + 2{,}5 \ln [\mathrm{Re}_D^{**}/ (2{,}5 - 12{,}5)\sqrt{\mathrm{St}_D})] \end{aligned} \qquad \text{(VI.239)}$$

ou par analogie avec la formule (VI.238)

$$\mathrm{St} = \frac{B}{2} \Big/ (\mathrm{Re}_T^{**})^m. \qquad \text{(VI.240)}$$

Les lois d'échange de chaleur et de masse du type (VI.240) peuvent être extrapolées également au cas Pr ≠ 1 et Sc ≠ 1.

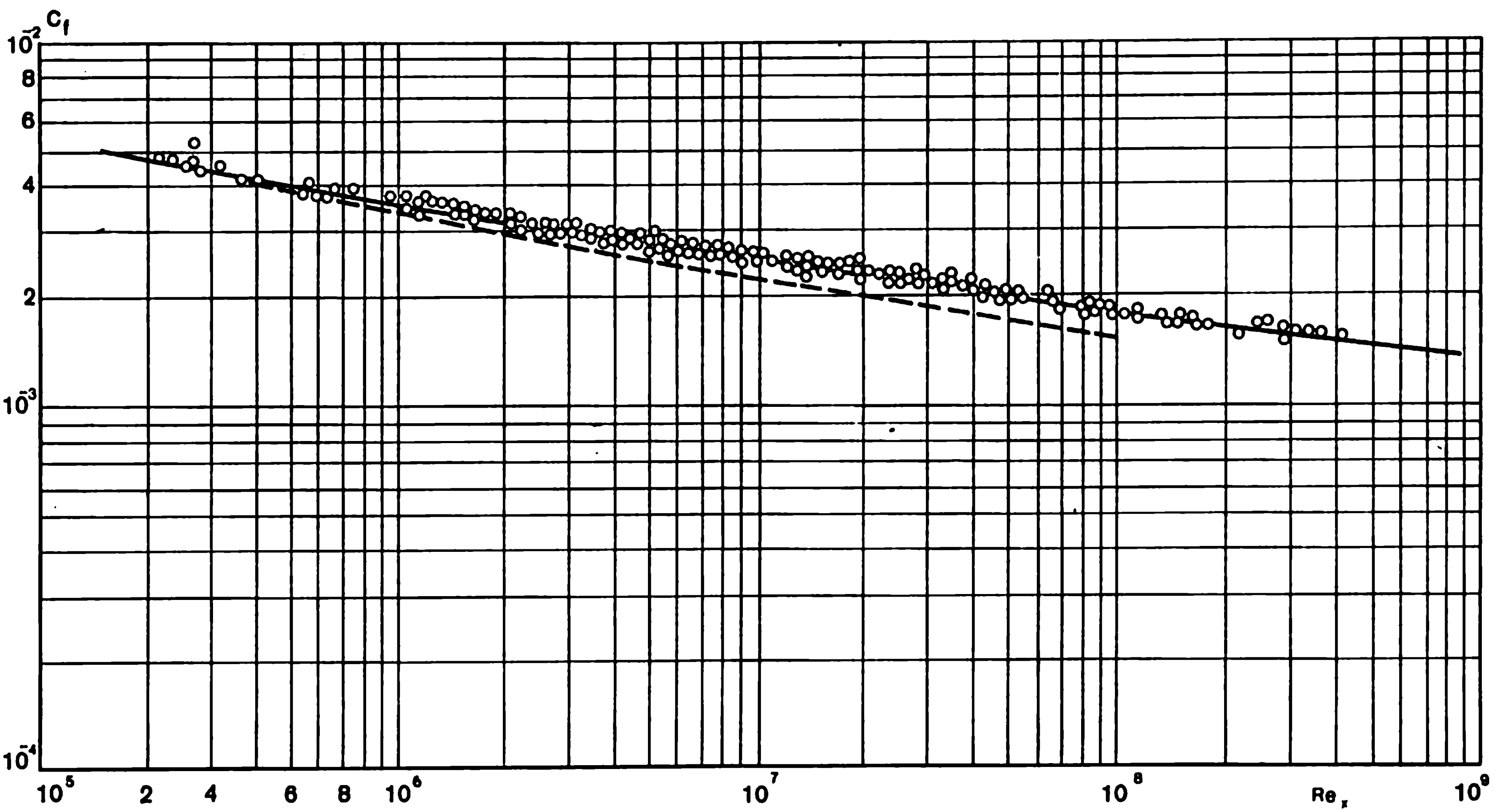


Fig. VI.31. Frottement sur une plaque plane:
——— — calcul d'après la formule (VI.237); — — — — — — calcul d'après la formule (VI.232); ○ — expérience

Dans la marge des variations de Pr et Sc de 0,5 à 10, on obtient de bons résultats avec les formules

$$\mathrm{St} = \frac{B}{2} \Big/ [(\mathrm{Re}_T^{**})^m \, \mathrm{Pr}^{0,75}] ; \tag{VI.241}$$

$$\mathrm{St}_D = \frac{B}{2} \Big/ [(\mathrm{Re}_D^{**})^m \, \mathrm{Sc}^{0,75}] . \tag{VI.242}$$

Dans le cas du contournement d'une plaque plane imperméable sous des conditions aux limites $T_p =$ const et $C_p =$ const, les équa-

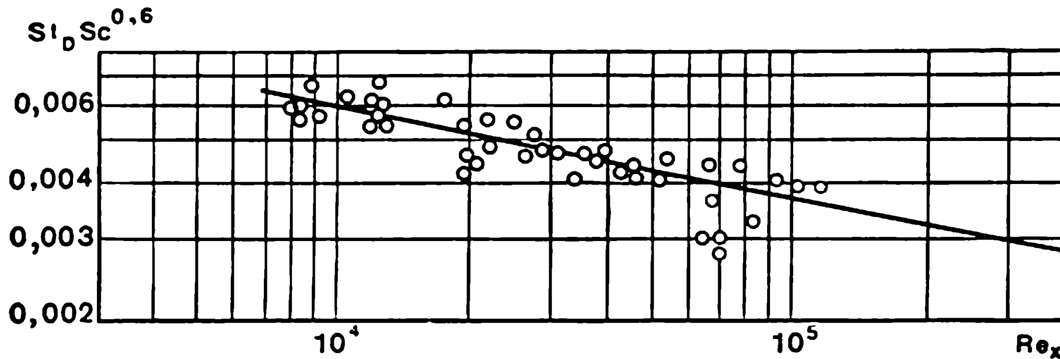


Fig. VI.32. Echange de masse sur une plaque plane:
———— calcul d'après la formule (VI.248) ; ○ — données expérimentales

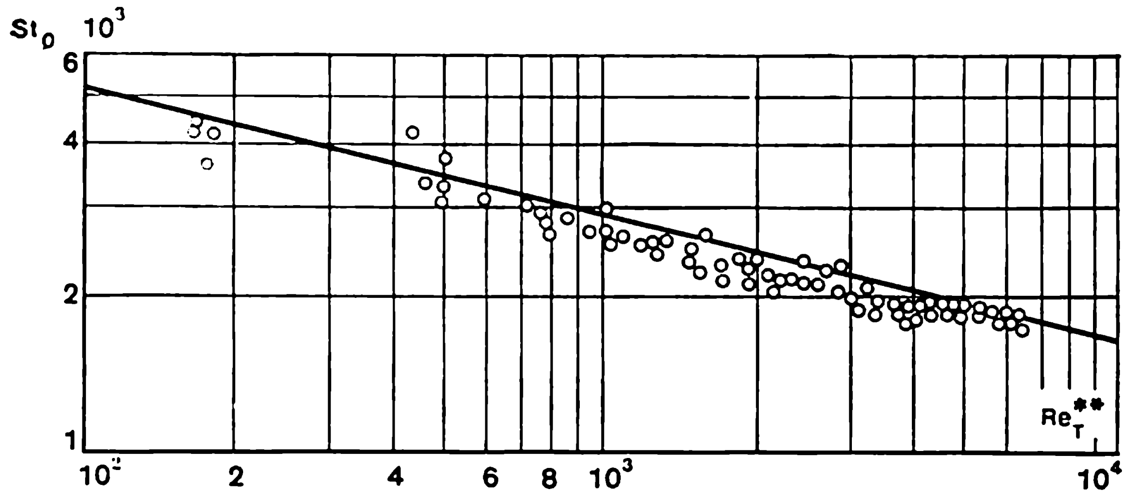


Fig. VI.33. Loi d'échange de chaleur sur une plaque plane:
————]— calcul d'après la formule (VI.241); ○ — données expérimentales (Ecole Technique supérieure Bauman de Moscou), [17]

tions intégrales de l'énergie et de la diffusion amènent suivant la longueur de la plaque

$$d\,\mathrm{Re}_T^{**}/dX = \mathrm{Re}_L \mathrm{St} ; \tag{VI.243}$$

$$d\,\mathrm{Re}_D^{**}/dX = \mathrm{Re}_L \mathrm{St}_D . \tag{VI.244}$$

En portant dans (VI.243) et (VI.244) les expressions (VI.241) et (VI.242) pour St et St_D et en intégrant les équations obtenues sous les conditions aux limites $x = 0$; $\mathrm{Re}_T^{**} = \mathrm{Re}_D^{**} = 0$, il vient

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \left[(m+1)\frac{B}{2}\,\mathrm{Pr}^{-0,75}\,\mathrm{Re}_x\right]^{0,8}; \qquad \text{(VI.245)}$$

$$\mathrm{Re}_D^{**} = \left[(m+1)\frac{B}{2}\,\mathrm{Sc}^{-0,75}\,\mathrm{Re}_x\right]^{0,8}. \qquad \text{(VI.246)}$$

En portant (VI.245) et (VI.246) dans (VI.241) et (VI.242) on obtient les formules de calcul de l'échange de chaleur et de masse turbulent pour le contournement d'une plaque plane par le courant d'un fluide à paramètres physiques constants:

$$\mathrm{St} = 0{,}0288\mathrm{Re}_x^{-0,2}\mathrm{Pr}^{-0,6}; \qquad \text{(VI.247)}$$

$$\mathrm{St}_D = 0{,}0288\mathrm{Re}_x^{-0,2}\mathrm{Sc}^{-0,6}. \qquad \text{(VI.248)}$$

Les figures VI.32 et VI.33 comparent les données expérimentales avec les calculs suivant les formules (VI.241) et (VI.248). D'après les courbes des graphiques leur coïncidence est satisfaisante.

7. Influence de la compressibilité du gaz et de son allure non isotherme sur les lois de frottement, d'échange de chaleur et de masse dans la couche turbulente

Lors de l'écoulement d'un gaz à des vitesses supersoniques dans les domaines des flux thermiques intenses à travers la surface d'un corps il convient de prendre en considération l'influence de la compressibilité et de l'allure non isotherme sur le frottement et l'échange de chaleur et de masse dans la couche limite turbulente. Pour évaluer cette influence, introduisons les lois relatives de frottement, d'échange de chaleur et de masse

$$\left(\frac{C_f}{C_{f0}}\right)_{\mathrm{Re}^{**}} = \Psi; \quad \left(\frac{\mathrm{St}}{\mathrm{St}_0}\right)_{\mathrm{Re}_T^{**}} = \Psi_s; \quad \left(\frac{\mathrm{St}_D}{\mathrm{St}_{D0}}\right)_{\mathrm{Re}_D^{**}} = \Psi_D, \qquad \text{(VI.249)}$$

où Ψ, Ψ_S et Ψ_D sont les rapports entre les coefficients de frottement, les nombres thermiques et de diffusion de Stanton dans les conditions données et les valeurs de ces paramètres dans les conditions « standard » lors du contournement d'une plaque plane imperméable par un courant de fluide à paramètres physiques constants et à valeur constante de la température et de la concentration suivant la longueur de la plaque, ces rapports étant pris pour les mêmes nombres Re^{**}, Re_T^{**}, Re_D^{**} que dans les conditions envisagées. Les valeurs « standard » de C_{f0}, St_0, St_D se calculent d'après les équations (VI.233), (VI.241) et (VI.242) respectivement.

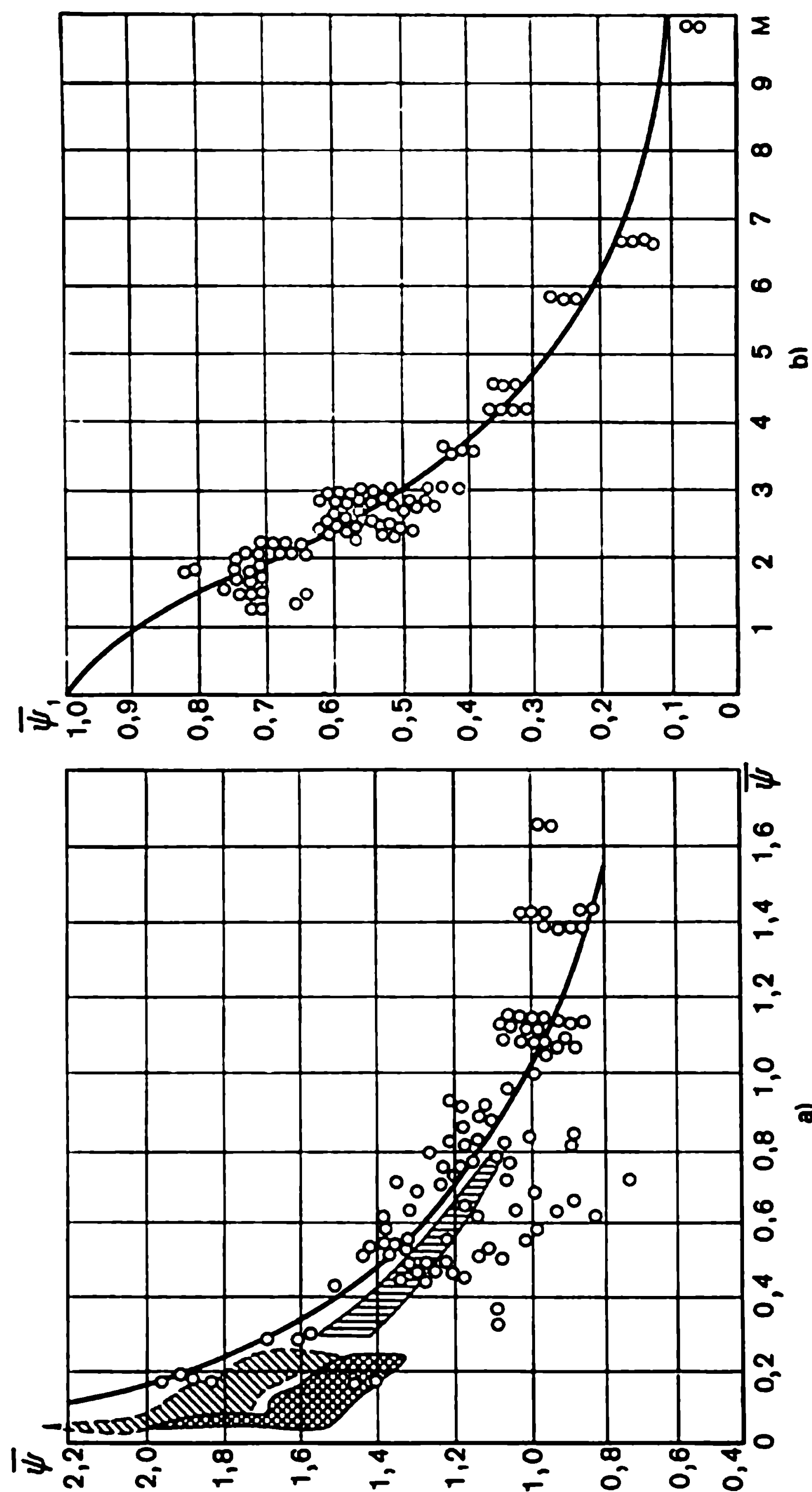


Fig. VI.34. Influence de l'allure non isotherme (*a*) et de la compressibilité (*b*) sur les lois relatives de frottement et d'échange de chaleur :

lignes — calcul d'après la formule (VI.250)

Les graphiques de la figure VI.34 visualisent les résultats du traitement des données expérimentales relatifs à l'influence exercée par l'allure non isotherme et la compressibilité sur les lois relatives de frottement et d'échange de chaleur pendant un écoulement tur-

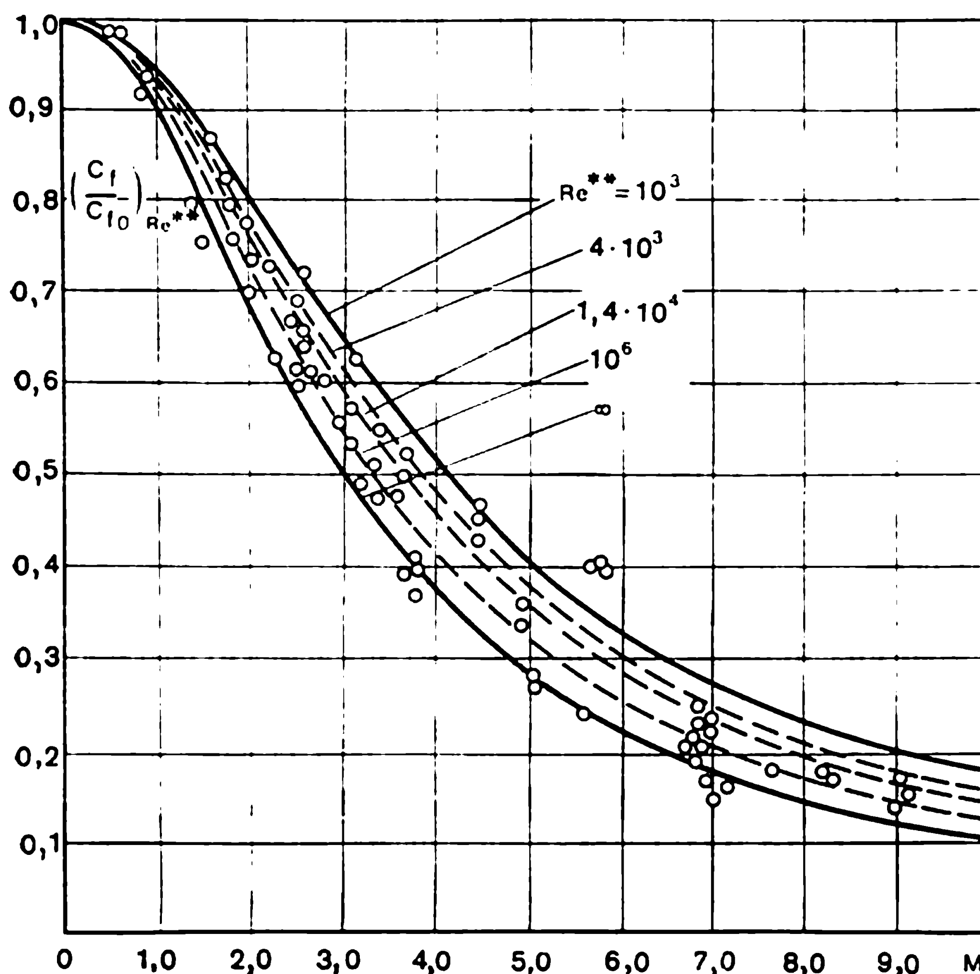


Fig. VI.35. Influence du nombre Re et de la compressibilité du gaz sur la loi relative de frottement

bulent du gaz. Les nombres Re_T^{**} et Re_t^{**} sont définis par les formules

$$Re^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta^{**}/\mu_p, \quad Re_T^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta_t^{**}/\mu_p,$$

où μ_p est la viscosité dynamique à la température de la paroi. Comme le montre la figure VI.34, l'allure non isotherme et la compressibilité du gaz influent sensiblement sur le frottement et l'échange de chaleur et ce fait ne doit pas être négligé dans les calculs techniques.

Les traits continus de la figure VI.34 visualisent les relations analytiques établies par S. Koutatéladzé et A. Léontiev [19] sous

la forme

$$\Psi = \bar{\Psi}\Psi_M, \tag{VI.250}$$

où

$$\bar{\Psi} = \left(\frac{2}{\sqrt{\bar{\psi}+1}}\right)^2; \tag{VI.251}$$

$$\Psi_M = \left[\frac{\operatorname{arc\,tg} M_\infty \sqrt{r(k-1)/2}}{M_\infty \sqrt{r(k-1)/2}}\right]^2; \tag{VI.252}$$

$$\bar{\psi} = T_p/T_p^*.$$

D'après les expériences, le facteur de récupération de la couche limite turbulente $r = \sqrt[3]{\mathrm{Pr}}$.

Pour le cas $r = 0,9$ ($\mathrm{Pr} = 0,72$, $k = 1,4$) l'équation (VI.250) est approximée avec une précision suffisante par la formule

$$\Psi = \left\{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{T_p}{T_\infty}\right)^{1/2} + 1\right]^2 + 0,03M_\infty^2\right\}^{-1}. \tag{VI.253}$$

(VI.250) est obtenue pour le domaine $\mathrm{Re} \to \infty$; pourtant, il s'ensuit de la figure VI.35 que cette équation correspond également assez bien aux données fournies par l'exploration expérimentale du domaine des valeurs finies des nombres de Reynolds; elle peut donc être recommandée pour des calculs pratiques.

8. Lois relatives limites du frottement, des échanges de chaleur et de masse dans la couche limite turbulente

L'expression (VI.201) du frottement turbulent peut être mise sous la forme

$$\tau_t = -\rho\overline{v_x v_y}\,(1 - \beta), \tag{VI.254}$$

où $\beta = (\overline{w_y}\,\overline{v_x\theta} + \overline{v_x v_y \theta})/(\overline{v_x v_y}\,\overline{T})$.

D'autre part, d'après l'hypothèse de Prandtl,

$$\overline{v_x v_y} = l^2\,(d\overline{w}_x/dy)^2.$$

Introduisons dans l'équation (VI.254) la valeur $\overline{v_x v_y}$ pour écrire que dans le noyau tourbillonnaire

$$\tau = \tau_t = \rho\,(l\,dw_x/dy)^2\,(1 - \beta)\ ^{*}). \tag{VI.255}$$

---

*) Ici et dans les expressions qui suivent nous omettons le signe de moyennage des grandeurs ρ, T, w.

En retenant que $C_f/2 = \tau/\rho_\infty w_\infty^2$, l'expression (VI.255) peut être ramenée à la forme

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\rho(1-\beta)}{\rho_\infty w_\infty^2 \bar{\tau}} \left(l \frac{dw_x}{dy}\right)^2, \qquad \text{(VI.256)}$$

où $\bar{\tau} = \tau/\tau_p$. Introduisons, comme dans ce qui précède, la notion de la loi relative de résistance

$$\Psi = (C_f/C_{f_0})_{\mathrm{Re}^{**}},$$

où C_f est la valeur locale du coefficient de frottement pour les conditions du contournement données; C_{f_0}, la valeur du coefficient de frottement local pour certaines conditions « standard », c'est-à-dire pour le contournement d'une plaque par un courant isotherme de fluide incompressible, établi pour la valeur du nombre Re** calculée pour la section envisagée sous les conditions de contournement données.

Multiplions les deux membres de l'équation (VI.256) par $\bar{\tau}_0 = \tau_0/\tau_p$ pour obtenir après des transformations peu compliquées

$$\Psi = \left[\frac{1}{Z} \int_{\omega_1}^{1} \left(\frac{\rho \bar{\tau}_0}{\rho_\infty \bar{\tau}}\right)^{1/2} d\omega\right]^2, \qquad \text{(VI.257)}$$

où

$$Z = \sqrt{\frac{C_{f_0}}{2}} \int_{\xi_1}^{1} \sqrt{\frac{\bar{\tau}_0}{1-\beta}} \frac{d\xi}{l}. \qquad \text{(VI.258)}$$

Ici $\omega = w_x/w_\infty$ est la vitesse sans dimensions de l'écoulement; $\omega_1 = w_{x_1}/w_\infty$, la vitesse sans dimensions à la frontière de la sous-couche visqueuse; $\xi_1 = y_1/\delta$, l'épaisseur sans dimensions de la sous-couche visqueuse.

La relation (VI.211) permet de tirer par analogie l'expression de la loi relative d'échange de chaleur sous la forme

$$\Psi_S = \left(\frac{\mathrm{St}}{\mathrm{St}_0}\right)_{\mathrm{Re}_T^{**}} = \left[\frac{1}{Z_S} \int_{\vartheta_1}^{1} \left(\frac{\rho \bar{q}_0}{\rho_\infty \bar{q} \varepsilon}\right)^{1/2} d\vartheta\right]^2, \qquad \text{(VI.259)}$$

où

$$Z_S = (\mathrm{St}_0)^{1/2} \int_{\xi_{T_1}}^{1} \left(\frac{\bar{q}_0}{1-\beta_T}\right)^{1/2} \frac{d\xi_T}{l_q}; \qquad \text{(VI.260)}$$

St_0 est la valeur du nombre de Stanton pour le cas du contournement d'une plaque imperméable par un courant incompressible à propriétés physiques constantes, trouvée pour les valeurs du nombre Re_T^{**} dans la section envisagée sous des conditions de contournement et d'échange de chaleur considérées; $\varepsilon = \varepsilon(\xi)$, le coefficient de non-similitude des champs thermique et des vitesses, considéré ordinairement dans les calculs comme constant; ϑ_1, la température sans dimensions à la frontière de la sous-couche visqueuse; ξ_{T_1}, l'épaisseur sans dimensions de la sous-couche visqueuse thermique.

L'analyse des équations (VI.257) et (VI.259) montre que dans le cas général, pour obtenir les lois relatives de frottement et d'échange de chaleur sous forme analytique il faut connaître les lois de variation des grandeurs

$$\xi_T,\ \omega_1,\ \vartheta_1,\ \xi_1,\ \bar{\tau},\ \bar{\tau}_0,\ \rho/\rho_\infty,\ \beta,\ \beta_T,\ \bar{q},\ \bar{q}_0,\ l,\ l_q,$$

ce qui est de nos jours pratiquement impossible. Quant à la justification de telles ou telles hypothèses retenues par plusieurs méthodes semi-empiriques, elle est plutôt insuffisante.

Toutefois, comme S. Koutatéladzé et A. Léontiev l'ont montré dans leurs ouvrages, les lois relatives de frottement et d'échange de chaleur sous la forme des équations (VI.257) et (VI.259) cessent de dépendre des constantes empiriques de la turbulence dans le cas limite où les nombres Re^{**} et R_T^{**} tendent vers l'infini.

L'existence des lois limites s'explique physiquement par le fait qu'avec l'augmentation du nombre Re, les épaisseurs de la sous-couche visqueuse tendent vers zéro plus vite que l'épaisseur de la partie turbulente de la couche limite.

En effet, l'équation du profil logarithmique des vitesses (VI.224) entraîne que pour $y = \delta$ et $w_x = w_\infty$

$$v_*\delta/\nu = 0{,}111 \exp\left[(0{,}4/C_{f_0})^{1/2}\right]. \qquad \text{(VI.261)}$$

d'où, en appliquant la relation (VI.219), on peut obtenir

$$\xi_1 = \frac{y_1}{\delta} = \varphi_1\left(\frac{\nu}{v_*\delta}\right) = 104 \exp\left[-\left(\frac{0{,}4}{C_{f_0}}\right)^{1/2}\right]. \qquad \text{(VI.262)}$$

En utilisant la loi de résistance (VI.232) et les relations (VI.261) et (VI.262), on montre sans peine que pour $\mathrm{Re}^{**} \to \infty$

$$C_{f_0} \to 0;\ \xi_1 \to 0;\ \omega_1 \to 0.$$

On peut montrer également que dans ce cas le coefficient β tend lui aussi vers zéro.

Ainsi, pour $\mathrm{Re} \to \infty$

$$Z \to \sqrt{\frac{C_{f_0}}{2}} \int_0^1 \sqrt{\bar{\tau}_0}\, \frac{\delta}{l}\, d\xi. \qquad \text{(VI.263)}$$

En développant la fonction $\Phi = Z\sqrt{C_{f_0}/2}$ en série suivant les puissances du facteur perturbateur et en désignant la somme des termes de $i = 2$ à $i = \infty$ par $\Delta\Phi$, on obtient

$$Z = Z_0 + \Delta\Phi \sqrt{C_{f_0}/2}, \qquad \text{(VI.264)}$$

où $Z_0 = 1 - \omega_{10}$, ce qui s'ensuit de l'équation (VI.257) écrite pour le cas de l'écoulement isotherme ($\rho = \rho_\infty$; $\bar{\tau} = \bar{\tau}_0$ et $\Psi = 1$).

Pour $\mathrm{Re} \to \infty$, $C_{f_0} \to 0$; $\omega_1 \to 0$. Par conséquent, si la fonction $\Delta\Phi$ est finie, alors $Z_{\mathrm{Re}\to\infty} \to 1$.

D'une façon analogue on peut montrer que $Z_{S_{\mathrm{Re}\to\infty}} \to 1$. De cette façon, pour $\mathrm{Re} \to \infty$ les équations (VI.257), (VI.259) se mettent sous la forme de ce qu'on appelle *lois limites de frottement et d'échange de chaleur*

$$\Psi = \left[\int_0^1 \left(\frac{\rho \bar{\tau}_0}{\rho_\infty \bar{\tau}} \right)^{1/2} d\omega \right]^2; \tag{VI.265}$$

$$\Psi = \left[\int_0^1 \left(\frac{\rho \bar{q}_0}{\rho_\infty \bar{q} \varepsilon} \right)^{1/2} d\vartheta \right]^2. \tag{VI.266}$$

Pour obtenir leurs expressions sous la forme analytique, il convient de connaître la distribution des grandeurs ρ/ρ_∞, ω, ϑ, $\bar{\tau}$, $\tilde{q}$ dans la couche limite turbulente. A l'état actuel de la théorie de la couche limite turbulente les relations analytiques exactes de ces grandeurs sont impossibles à obtenir.

Pourtant, comme nous le montrerons par la suite, la forme de ces relations peut s'établir en partant de l'analyse générale des écoulements turbulents avec une précision suffisante pour les calculs pratiques. Pour ce qui est des distributions de $\tilde{\tau}$ et $\tilde{q}$, elles peuvent s'obtenir à partir de l'analyse des conditions aux limites correspondantes [19].

Influence de l'allure non isotherme et de la compressibilité. Pour $\mathrm{Pr} = 1$ la loi relative d'échange de chaleur (VI.259) devient

$$\Psi_S = \left[\frac{1}{Z_S} \int_{\vartheta_1}^{1} \left(\frac{\rho \bar{q}_0}{\rho_\infty \bar{q}} \right)^{1/2} d\vartheta \right]^2. \tag{VI.267}$$

D'après l'approximation adoptée, la distribution des flux thermiques à travers la couche limite ne dépend pas de l'allure non isotherme et de la compressibilité. On peut donc admettre dans l'équation (VI.267) [19]

$$\bar{q}_0 = \bar{q} = 1 - 3\xi_T^2 + 2\xi_T^3 + b_{1T}\vartheta\,(1 - \xi_T)^2. \tag{VI.268}$$

Ici $b_{1T} = \rho_p w_p / (\mathrm{St}\, \rho_\infty w_\infty)$; $\vartheta = (T_p - T)/(T_p - T_\infty)$.

La distribution de la densité est donnée par l'équation (VI.128) sous la condition que le gaz est parfait, alors que la pression à travers la couche limite reste constante

$$\rho/\rho_\infty = \psi + \Delta\psi + (\psi^* - 1)\,\omega^2. \tag{VI.269}$$

En portant dans (VI.267) les relations (VI.268), (VI.269) et en intégrant, on trouve

$$\Psi_S = \frac{1}{(\psi^* - 1)} \frac{1}{Z_S} \left[\arcsin \frac{2(\psi^* - 1) + \Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + (\Delta\psi)^2}} - \arcsin \frac{\Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^* - 1)(\psi^* + \Delta\psi) + (\Delta\psi)^2}} \right]^2. \tag{VI.270}$$

En vertu de l'hypothèse adoptée de la similitude des champs thermique et de vitesses ($\mathrm{Pr} = 1$), on observe l'analogie de Reynolds; les lois de résistance et d'échange de chaleur coïncident totalement, c'est-à-dire pour $\mathrm{Pr} = 1$

$$\Psi = \Psi_S.$$

Si le nombre $\mathrm{Pr} \neq 1$, au lieu de l'équation (VI.270) on a deux solutions différentes qui correspondent aux cas $\delta_T > \delta$ et $\delta_T < \delta$.

En posant dans l'équation (VI.270) $Z_S = 1$, on obtient la loi limite d'échange de chaleur

$$\Psi_S = \frac{1}{(\psi^* - 1)}\left[\arc\sin\frac{2(\psi^*-1)+\Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^*-1)(\psi^*+\Delta\psi)+(\Delta\psi)^2}} - \right.$$

$$\left. - \arc\sin\frac{\Delta\psi}{\sqrt{4(\psi^*-1)(\psi^*+\Delta\psi)+(\Delta\psi)^2}}\right]. \quad \text{(VI.271)}$$

Pour le domaine d'écoulement subsonique $\psi^* \to 1$, l'équation (VI.271) se met sous la forme

$$\Psi_S = \left[\frac{2}{\sqrt{\psi}+1}\right]^{2*)}. \quad \text{(VI.272)}$$

Lorsqu'un courant supersonique contourne une paroi adiabatique $\Delta\Psi = 0$

$$\Psi_S = \left[\arc\sin\left(\frac{\psi^*-1}{\psi^*}\right)^{1/2}\right]^2 \Big/ (\psi^*-1). \quad \text{(VI.273)}$$

Influence du coulant de matière transversal. De nombreux problèmes pratiques d'échange de chaleur par convection peuvent envisager l'existence à la surface d'un corps d'un courant de masse transversal (refroidissement poreux par insufflation du gaz refroidissant, absorption du gaz à travers une surface perméable, condensation des vapeurs, combustion des revêtements calorifuges, etc.).

Ecrivons pour ce cas la loi limite d'échange de chaleur (VI.266) sous la forme

$$\int_0^1 \frac{d\vartheta}{\sqrt{\rho_\infty/\rho}\,[\Psi_S\bar{q}/\bar{q}_0]^{1/2}} = 1. \quad \text{(VI.274)}$$

En portant dans cette équation l'expression de $\bar{q}$ (VI.268), on trouve

$$\int_0^1 d\vartheta \Big/ \sqrt{\frac{\rho_\infty}{\rho}\,[\Psi_S + \varepsilon b_T \vartheta f(\xi_T)]} = 1. \quad \text{(VI.275)}$$

D'une façon analogue on peut transformer la loi limite de frottement

$$\int_0^1 d\omega \Big/ \sqrt{\frac{\rho_\infty}{\rho}\,[\Psi + b\omega f(\xi)]} = 1. \quad \text{(VI.276)}$$

L'intégrale de l'équation (VI.276) doit être finie. Etant donné que les quantités ω et ξ varient de 0 à 1, le paramètre d'insufflation b (b_T) doit également posséder une certaine valeur limite b_{cr} telle que le coefficient de frottement s'annule. Ceci est possible lorsque la couche limite est repoussée à partir de la surface contournée par le courant insufflé. La valeur critique du coefficient de perméabilité est donnée par l'équation (VI.276) pour $\Psi = 0$

$$b_{cr} = \left(\int_0^1 d\omega \Big/ \sqrt{\frac{\rho_\infty}{\rho}\,\omega f(\xi)}\right)^2. \quad \text{(VI.277)}$$

---

*) La première fois cette formule a été obtenue par S. Koutatéladzé [18] pour le cas de l'écoulement du gaz dans un tube rugueux.

Dans ce qui suit nous allons nous borner à l'examen du cas $f(\xi) = f(\xi_T)$ et $\varepsilon = 1$, c'est-à-dire du cas de la triple analogie, si les distributions des vitesses, des températures et des concentrations à travers la couche limite sont identiques.

Puisque dans ces conditions les solutions des équations (VI.275), (VI.276) ont la même forme, il vient

$$\Psi_S(b_T) = \Psi(b) = \Psi_D(b_D). \tag{VI.278}$$

D'après la formule (VI.128), dans la couche limite homogène subsonique (avec $\varepsilon = 1$)

$$\rho_\infty/\rho = T/T_\infty \simeq \psi - (\psi - 1)\,\omega. \tag{VI.279}$$

En portant cette expression dans l'équation (VI.276) avec $\varepsilon = 1$, $\xi = 1$, et en intégrant, on obtient:

pour $\psi < 1$

$$\Psi = \frac{4}{(1-\psi)\,b_1}\left[\ln\frac{\sqrt{(1-\psi)(1+b_1)}+\sqrt{b_1}}{\sqrt{1-\psi}+\sqrt{b_1\psi}}\right]^2; \tag{VI.280}$$

$$b_{\text{cr}} = \frac{1}{1-\psi}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1-\psi}}{1-\sqrt{1-\psi}}\right]^2; \tag{VI.281}$$

pour $\psi > 1$

$$\Psi = \frac{4}{(\psi-1)\,b_1}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b_1}{\sqrt{(\psi-1)(b_1+1)}}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b_1\psi}{\psi-1}}\right]^2; \tag{VI.282}$$

$$b_{\text{cr}} = \frac{1}{\psi-1}\left[\arccos\frac{2-\psi}{\psi}\right]^2. \tag{VI.283}$$

Les formules (VI.280) et (VI.282) se prêtent bien à l'approximation par la relation

$$\Psi = 4\left(\frac{1-b/b_{\text{cr}}}{\sqrt{\psi}+1}\right)^2. \tag{VI.284}$$

En vertu de l'égalité (VI.278), les lois des échanges de chaleur et de masse s'écrivent d'une façon analogue. Lors de l'absorption du gaz à travers la surface d'échange de chaleur le paramètre de perméabilité est pris avec le signe négatif.

Pour les nombres Pr peu différents de l'unité, on peut introduire pour l'analogie de Reynolds une correction ordinaire $\mathrm{Pr}^{-0,6}$

$$\mathrm{St} = (C_f/2)\,\mathrm{Pr}^{-0,6}.$$

Dans le cas d'une densité constante, les intégrales des (VI.274), (VI.276) ont la forme

$$\Psi_S = \Psi = \left(1 - \frac{b}{b_{\text{cr}}}\right)^2; \tag{VI.285}$$

$$b_{\text{cr}} = 4. \tag{VI.286}$$

L'amenée du gaz hétérogène dans la couche limite provoque le processus de diffusion qui, à la frontière extérieure de la couche limite, fait changer la densité partielle du gaz insufflé de ρ_p' à 0.

Dans le cas de la triple analogie, le champ des concentrations de masse peut être associé à un champ des vitesses et de l'enthalpie par la relation de la forme

$$(h^* - h_p)/(h^*_\infty - h_p) = (\bar{\rho}'_p - \bar{\rho}')/\bar{\rho}_p = \omega. \qquad \text{(VI.287)}$$

La densité partielle du gaz insufflé ρ' est liée à la constante de gaz du mélange par la relation connue

$$R = \frac{\rho'}{\rho} R' + \frac{\rho_\infty}{\rho} R_\infty. \qquad \text{(VI.288)}$$

Ici, R, R', R_∞ sont respectivement les constantes de gaz du mélange, du gaz insufflé et du courant principal.

De la sorte, compte tenu de la loi de conservation de la masse, on obtient

$$\frac{R}{R_\infty} = \frac{\rho'}{\rho}\left(\frac{R'}{R_\infty} - 1\right) + 1. \qquad \text{(VI.289)}$$

D'autre part, un mélange binaire des gaz parfaits vérifie la relation

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = \frac{R}{R_\infty}\frac{T}{T_\infty}. \qquad \text{(VI.290)}$$

L'expression (VI.290), compte tenu des égalités (VI.287) et (VI.289), se transforme comme suit

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = \left[1 + \frac{\rho'_p}{\rho}\left(\frac{R'}{R_\infty} - 1\right)(1 - \omega)\right]\frac{T}{T_\infty}. \qquad \text{(VI.291)}$$

Si le gaz de refroidissement est amené à travers une paroi poreuse, le courant de gaz insufflé j_p est défini par la formule

$$j_p = \rho_p w_p = \rho'_p w_p - D_{1\text{-}2}\rho_p\left(\frac{\partial\bar{\rho}'}{\partial y}\right)_p. \qquad \text{(VI.292)}$$

L'équation (VI.287) implique que

$$-\left(\frac{\partial\bar{\rho}'}{\partial y}\right)_p = \frac{\bar{\rho}'_p}{w_\infty}\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_p. \qquad \text{(VI.293)}$$

D'autre part, par définition,

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)_p = \frac{C_f}{2\nu_p\rho_p}\rho_\infty w_\infty^2,$$

d'où

$$-D_{1\text{-}2}\rho_p\left(\frac{\partial\rho'}{\partial y}\right)_p = \frac{1}{\text{Le Pr}}\frac{C_f}{2}\bar{\rho}'\rho_\infty w_\infty. \qquad \text{(VI.294)}$$

En écrivant la relation obtenue pour le cas de la triple analogie Le = Sc = = Pr et en la portant dans l'équation (VI.292), on trouve

$$\bar{\rho}'_p = \rho'_p/\rho_p = b_1/(1 + b_1), \qquad \text{(VI.295)}$$

où $b_1 = \frac{\rho_p w_p}{\rho_\infty w_\infty c_f/2}$.

De cette façon, l'expression (VI.291) devient

$$\frac{\rho_\infty}{\rho}=\frac{T}{T_\infty}\left[1+\frac{b_1}{1+b_1}\left(\frac{R'}{R_\infty}-1\right)(1-\omega)\right].$$

Dans le cas de l'insufflation subsonique du gaz hétérogène ($T = T_\infty$), la résolution commune des équations (VI.288), (VI.289) et (VI.290) pour ρ/ρ_∞ amène la relation

$$\rho/\rho_\infty = \psi_1 - (\psi_1 - 1)\,\omega, \qquad \text{(VI.296)}$$

où

$$\psi_1 = \rho_\infty/\rho_p.$$

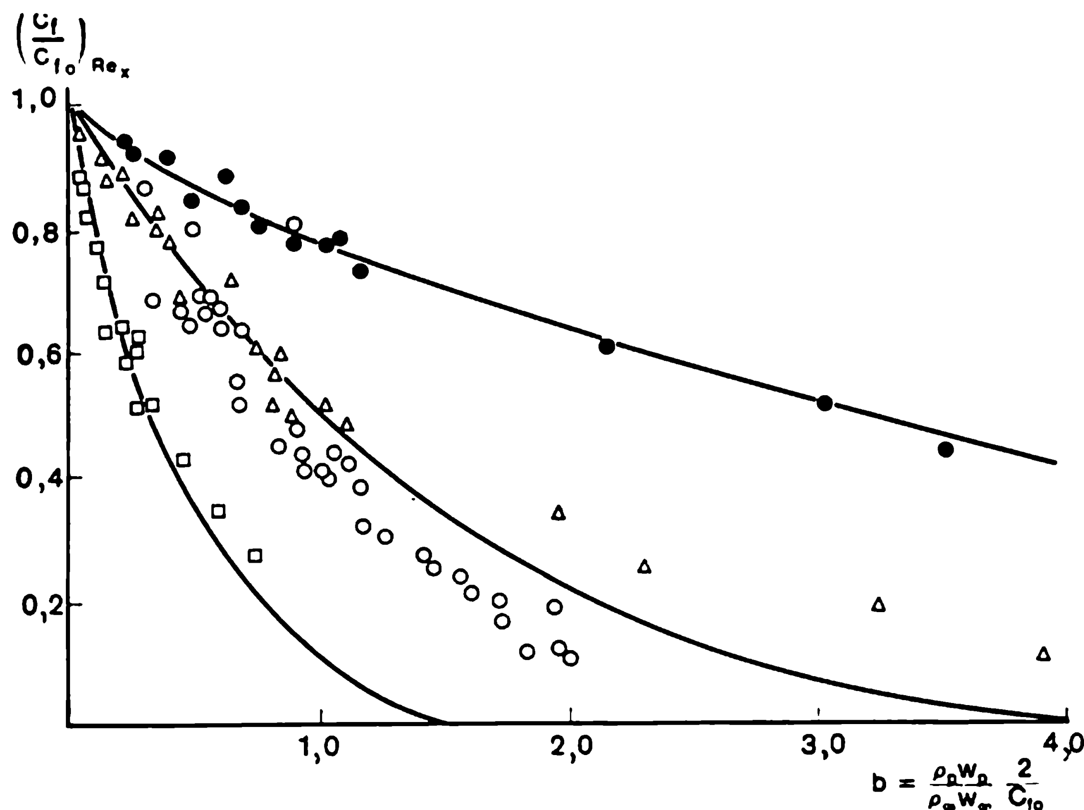


Fig. VI.36. Influence de l'insufflation du gaz étranger sur le coefficient de frottement de la plaque:

calcul d'après les équations: ○, △, ▲ — air-air (VI.285); □ — hélium-air (VI.280); ● — phréon-12-air (VI.282)

Lorsque l'insufflation du gaz de même atomicité est non isotherme, l'expression (VI.296) garde sa forme, si

$$\psi_1=\frac{T_p}{T_\infty}\left\{1+\frac{b_1}{1+b_1}\left(\frac{R'}{R_\infty}-1\right)\right\}. \qquad \text{(VI.297)}$$

La relation (VI.296) est analogue à (VI.279) obtenue précédemment; il s'ensuit que le paramètre critique d'insufflation b_{1cr}, aussi bien que les lois relatives de

frottement et d'échange de chaleur peuvent être mis sous la forme des relations (VI.280) et (VI.282), justifiées pour l'écoulement subsonique, si dans ces dernières ψ est remplacé par ψ_1.

La figure VI.36 compare les données expérimentales avec le calcul d'après les formules (VI.280) et (VI.282). On établit sans peine que dans les deux cas les courbes coïncident bien.

§ VI.4. Méthodes de calcul de l'échange de chaleur dans la couche limite turbulente

Ces méthodes sont au fond analogues à celles examinées dans ce qui précède et relatives à la couche limite laminaire, à cette différence près que dans l'intégration on applique les lois correspondantes d'échange de chaleur valides pour la couche limite turbulente.

1. Résolution de l'équation de l'énergie de la couche limite turbulente à une surface imperméable

Pour une couche limite plane et des vitesses subsoniques de l'écoulement du fluide, l'équation intégrale de l'énergie s'écrit

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{dX} - \frac{\mathrm{Re}_T^{**}}{\Delta T}\frac{d\,\Delta T}{dX} = \mathrm{St}_0\,\mathrm{Re}_L\,\Psi_S. \qquad \text{(VI.298)}$$

En utilisant la loi d'échange de chaleur sous la forme (VI.241) et en intégrant, on obtient

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T}\left[\frac{1+m}{2\,\mathrm{Pr}^{0,75}}\,B\,\mathrm{Re}_0\int_{X_1}^{X}\Psi_S\tilde{w}_0\Delta T^{m+1}\left(\frac{\mu_p}{\mu_\infty}\right)^m dX + (\mathrm{Re}_T^{**}\Delta T)_{X_1}^{1+m}\right]^{1/(m+1)}. \qquad \text{(VI.299)}$$

Ici $\mathrm{Re}_0 = w_{0\infty}L/\nu$ est le nombre calculé d'après la vitesse du courant incident et la longueur caractéristique L du corps; $\tilde{w}_0 = w_\infty/w_{0\infty}$, la vitesse relative à la frontière extérieure de la couche limite; $X_1 = x_1/L$, la dimension linéaire comptée à partir du point critique amont, où il existe une couche limite laminaire.

La valeur du produit $(\mathrm{Re}_T^{**}\,\Delta T)_{X_1}$ qui figure au deuxième membre de l'équation (VI.299) est fournie par le calcul de la couche limite laminaire. La valeur locale du nombre St est donnée par l'équation

$$\mathrm{St} = \frac{B}{(\mathrm{Re}_T^{**})^m\,\mathrm{Pr}^{0,75}}\,\Psi_S\left(\frac{\mu_p}{\mu_\infty}\right)^m; \qquad \text{(VI.300)}$$

$$q_p = \mathrm{St}\rho_\infty c_p w_\infty\,\Delta T.$$

Dans le cas où il faut trouver la distribution de la température de la paroi pour la loi donnée, d'amenée de la chaleur les méthodes

de calcul restent les mêmes que dans le cas de la couche limite laminaire. Compte tenu de la loi d'échange de chaleur dans la couche limite turbulente sous des conditions « standard » (VI.241), l'expression cherchée de ΔT devient

$$\Delta T = \left[\frac{2q_p L}{B\lambda_0 \Psi_S \, \mathrm{Pr}^{0,25+m} \, \mathrm{Re}_0 \, \widetilde{w}_0} \left\{ \int_0^X \frac{q_p}{\lambda_0} \, dx \right\}^m \right]^{1/(1+m)}. \qquad \text{(VI.301)}$$

En déduisant cette équation on a supposé que la couche limite turbulente débute à partir du bord d'attaque ($\mathrm{Re}_T^{**} = 0$ avec $X = 0$).

Pour le contournement supersonique de la surface d'échange de chaleur l'équation de l'énergie (VI.298) garde sa forme si on pose

$$\Delta T = T_p^* - T_p; \quad \mathrm{Re}_T^{**} = \rho_\infty w_\infty \delta_T^{**} / \mu_{0\infty}; \quad \mathrm{Re}_L = \rho_\infty w_\infty L / \mu_{0\infty}.$$

Le nombre Re_T^{**} s'obtient à partir de l'équation

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T} \left[\frac{1+m}{2\,\mathrm{Pr}^{0,75}} B \, \mathrm{Re}_{0\infty} \times \right.$$
$$\times \int_{X_1}^{X} \left\{ \Psi_S \left(\frac{\mu_p}{\mu_{0\infty}} \right)^m u \, (1-u^2)^{1/(k-1)} \, \Delta T^{1+m} \right\} dX +$$
$$\left. + \left(\mathrm{Re}_T^{**} \, \Delta T \right)^{1-m} \right]^{1/(1+m)} \qquad \text{(VI.302)}$$

Ici la fonction Ψ_S est définie d'après la formule (VI.253).

Pour une couche limite symétrique à l'axe

$$\mathrm{Re}_{T0\infty}^{**} = \frac{1}{\Delta T \bar{D}} \left\{ \frac{1+m}{2\,\mathrm{Pr}^{0,75}} B \, \mathrm{Re}_{0\infty} \times \right.$$
$$\times \int_{X_1}^{X} \left[\Psi_S \left(\frac{\mu_p}{\mu_{0\infty}} \right)^m u \, (1-u^2)^{1/(k-1)} \, \Delta T^{1+m} \bar{D}^{1+m} \right] dX +$$
$$\left. + \left(\mathrm{Re}_{T0\infty}^{**} \, \Delta T \bar{D} \right)_{X=X_1}^{1+m} \right\}^{1(m+1)}, \qquad \text{(VI.303)}$$

où $\bar{D} = D/L$ est le diamètre sans dimensions de la section transversale du corps, qui dépend de x.

Dans le cas de l'écoulement du gaz dans une tuyère supersonique l'équation de continuité donne

$$u \, (1-u^2)^{1/(k-1)} = \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{0,5} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} \frac{F_{cr}}{F}, \qquad \text{(VI.304)}$$

où F_{cr} est la section critique de la tuyère; F, la section de calcul de la tuyère.

Compte tenu de l'équation (VI.304) on tire de (VI.303)

$$\mathrm{Re}^{**}_{T0\infty}=\frac{1}{\Delta T\bar{D}}\left\{\frac{1+m}{2\,\mathrm{Pr}^{0,75}}B\,\mathrm{Re}_{0\infty}\times\right.$$

$$\times\int_{X_1}^{X}\Psi_S\left(\frac{\mu_p}{\mu_{0\infty}}\right)^m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{0,5}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{1/(k-1)}\bar{D}^{m-1}\,\Delta T^{1+m}\,dX+$$

$$\left.+\left(\mathrm{Re}^{**}_{0\infty}\,\Delta T\bar{D}\right)^{1+m}_{X=X_1}\right\}^{1/(m+1)},\qquad\text{(VI.305)}$$

où $L=D_{cr}$.

La valeur locale du nombre de Stanton et la valeur des flux thermiques spécifiques sont déterminées par les formules

$$\mathrm{St}=\Psi_S\frac{B}{2\,(\mathrm{Re}^{**}_{T0\infty})^m\,\mathrm{Pr}^{0,75}}\left(\frac{\mu_p}{\mu_{0\infty}}\right)^m;\qquad\text{(VI.306)}$$

$$q_p=\mathrm{St}\,c_{p\infty}\rho_\infty w_\infty.\qquad\text{(VI.307)}$$

Lorsque le contournement d'une plaque à température constante de la paroi fait apparaître sur le bord d'attaque une couche limite turbulente, on obtient à partir des équations (VI.298) et (VI.241)

$$\mathrm{Re}^{**}_{Tp}=\left[\frac{1+m}{2\,\mathrm{Pr}^n}B\Psi_S\,\mathrm{Re}_{xp}\right]^{1/(m+1)};\qquad\text{(VI.308)}$$

$$\mathrm{St}=\frac{B\Psi_S^{1/(m+1)}}{2\,\mathrm{Pr}^n\left(\frac{1+m}{2\,\mathrm{Pr}^n}B\right)^{m/(m+1)}}\mathrm{Re}_x^{-m/(m+1)}.\qquad\text{(VI.309)}$$

Avec $m=0{,}25$; $n=0{,}75$ et $B=0{,}0256$, on a

$$\mathrm{St}=0{,}0288\Psi^{0,8}\mathrm{Re}_{xp}^{-0,2}\mathrm{Pr}^{-0,6}.\qquad\text{(VI.310)}$$

Lors du contournement d'un corps à bout obtus à température constante de la paroi ($\tilde{w}_\infty=CX$), on obtient

$$\mathrm{Re}^{**}_{Tp}=\left[\frac{1+m}{2\,\mathrm{Pr}^n}B\,\mathrm{Re}_{01p}\Psi_S\frac{CX^2}{2}\right]^{1/(m+1)};\qquad\text{(VI.311)}$$

$$\mathrm{St}=\frac{B}{2\,\mathrm{Pr}^n}\,\frac{\Psi_S^{1/(m+1)}}{\left[\frac{1+m}{2\,\mathrm{Pr}^n}B\frac{C}{2}X^2\,\mathrm{Re}_{01p}\right]^{m/(m+1)}},\qquad\text{(VI.312)}$$

où $\mathrm{Re}_{01p}=\frac{\rho_{01}w_{01}L}{\mu_p}$; w_{01} est la vitesse du courant incident.

En particulier, pour le contournement transversal d'une plaque $C=1$ (si $m=0{,}25$; $B=0{,}0256$; $n=0{,}75$) et

$$\mathrm{St}=0{,}0375\Psi_S^{0,8}\mathrm{Re}_{01p}^{-0,2}X^{-0,4}\mathrm{Pr}^{-0,6}.\qquad\text{(VI.313)}$$

Dans le cas où à la surface d'échange de chaleur est donnée la distribution du flux thermique spécifique, la relation intégrale de l'énergie se ramène à la forme

$$\frac{d(\mathrm{Re}_T^{**}\,\Delta T)}{dX}=\frac{1}{\mathrm{Pr}_{0\infty}}\,\frac{q_{\mathrm{p}}L}{\lambda_{0\infty}}. \qquad \text{(VI.314)}$$

Pour les conditions aux limites $\mathrm{Re}_T^{**}=0$ avec $X=0$ et le cas de $q_{\mathrm{p}}=\mathrm{const}$, on a

$$\mathrm{Re}_T^{**}=\mathrm{St}\,\mathrm{Re}_x; \qquad \text{(VI.315)}$$

$$\mathrm{St}=0{,}0288\Psi_S^{0,8}\mathrm{Re}_{x\mathrm{p}}^{-0,2}\mathrm{Pr}^{-0,6}. \qquad \text{(VI.316)}$$

Il s'ensuit qu'à la frontière extérieure de la couche limite le long de la surface contournée, à charge thermique constante, toute loi donnée de la vitesse justifie pour le calcul du transfert de chaleur la formule du contournement d'une plaque; il faut porter seulement dans les nombres St et Re les paramètres enregistrés pour la section donnée à la frontière extérieure de la couche limite.

2. Résolution de l'équation de l'énergie de la couche limite turbulente à une surface perméable [19]

Cette équation s'écrit

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{dX}+\frac{\mathrm{Re}_T^{**}}{\Delta T}\,\frac{d\,\Delta T}{dX}=\mathrm{Re}_L\,\mathrm{St}_0\,(\Psi_S+b_T). \qquad \text{(VI.317)}$$

La fonction Ψ_S pour les vitesses d'écoulement subsoniques se calcule d'après la formule

$$\Psi_S=\Psi_T\,(1-b_T/b_{T\mathrm{cr}})^2, \qquad \text{(VI.318)}$$

où Ψ_T est donnée par l'expression (VI.271)

$$\Psi_T=\left[\frac{2}{\sqrt{\Psi}+1}\right]^2$$

et $b_{T\mathrm{cr}}$, par les équations (VI.281) et (VI.283).

Dans le cas général, l'intégrale de (VI.317) est de la forme

$$\mathrm{Re}_T^{**}=\frac{1}{\Delta T}\left\{\frac{1+m}{2\,\mathrm{Pr}^{0,75}}B\,\mathrm{Re}_0\times\right.$$
$$\times\int_{X_1}^{X}\tilde{w}_0\left[\Psi_T\left(1-\frac{b_T}{b_{T\mathrm{cr}}}\right)^2+b_T\right]\Delta T^{1+m}\,dX+$$
$$\left.+\left(\mathrm{Re}_T^{**}\,\Delta T\right)_{X=X_1}^{1+m}\right\}^{1/(1+m)}. \qquad \text{(VI.319)}$$

Les fonctions $\tilde{w}_0(x)$, $\Delta T(x)$ et $b_T(\dot{x})$ étant données, calculons d'après l'équation (VI.319) la distribution de la grandeur Re_T^{**} par rapport à x.

La distribution du nombre St local est donnée par l'expression

$$\mathrm{St} = \Psi_T (1 - b_T/b_{T\mathrm{cr}})^2 \,\mathrm{St}_0; \qquad \text{(VI.320)}$$

la distribution du débit du gaz de refroidissement suivant la longueur du contour, par

$$\frac{j_1}{\rho_\infty w_\infty} = \frac{c_{p\infty}}{c_{p1}} \mathrm{St}_0 b_T. \qquad \text{(VI.321)}$$

Le paramètre de perméabilité $b_T = \frac{\rho_\mathrm{p} w_\mathrm{p}}{\rho_\infty w_\infty} \frac{1}{\mathrm{St}_0}$ qui figure dans les équations (VI.318), (VI.319) et (VI.321) est déterminé par la condition du bilan de chaleur à la surface d'échange. Les méthodes de définition du paramètre de perméabilité pour les différents cas (refroidissement poreux, condensation, évaporation, combustion du revêtement calorifuge, etc.) seront examinées aux §§ VI.7 et VIII.1.

Le refroidissement poreux est largement appliqué dans le domaine d'écoulement des gaz à des vitesses supersoniques. Comme l'a montré N. Yaryguina dans son ouvrage [19], dans ce domaine les lois limites de frottement et d'échange de chaleur peuvent être approximées par la formule

$$\Psi = \overline{\Psi}_T \Psi_\mathrm{M} \Psi_b, \qquad \text{(VI.322)}$$

où

$$\overline{\Psi}_T = \left(\frac{2}{\sqrt{\Psi} + 1}\right)^2; \quad \Psi_M = \frac{\mathrm{arctg}\, \mathrm{M}_\infty \sqrt{r(k-1)/2}}{\mathrm{M}_\infty \sqrt{r(k-1)/2}};$$
$$\Psi_b = (1 - b/b_\mathrm{cr})^2; \quad b_\mathrm{cr} = b_{\mathrm{cr}\,0} \Psi_\mathrm{M}$$

Le paramètre $b_{\mathrm{cr}0}$ est déterminé par les formules (VI.281) et (VI.283). La valeur des flux thermiques spécifiques se calcule dans ce cas d'après la formule

$$q_\mathrm{p} = \mathrm{St} \rho_\infty w_\infty c_{p\infty} (T_\mathrm{p}^* - T_\mathrm{p}), \qquad \text{(VI.323)}$$

où $T_\mathrm{p}^* = T_\infty + r \frac{k-1}{2} \mathrm{M}_\infty^2$.

Les expériences établissent qu'à mesure que l'intensité d'insufflation augmente, le facteur de récupération r diminue sensiblement. Pour évaluer cette action on peut utiliser la formule de Y. Barychev [19]

$$r = 1 - 2 \frac{1 + b_1}{b_1} \frac{2(1 + b_1^2)}{b_1^2 (2 - \mathrm{Pr}_T)} \left[1 - \frac{(1 + b_1)^{\mathrm{Pr}_T - 2}}{(2 + \mathrm{Pr}_T)^2}\right]. \qquad \text{(VI.324)}$$

§ VI.5. Echange de chaleur sous l'écoulement forcé du fluide dans des tubes

Dans toute sorte d'installations techniques le mouvement forcé dans les tubes est le mouvement principal.

Dans la plupart des échangeurs de chaleur (chaudières, surchauffeurs (de vapeur), condensateurs, éléments combustibles des piles atomiques, etc.) l'un des caloporteurs se déplace dans des canaux

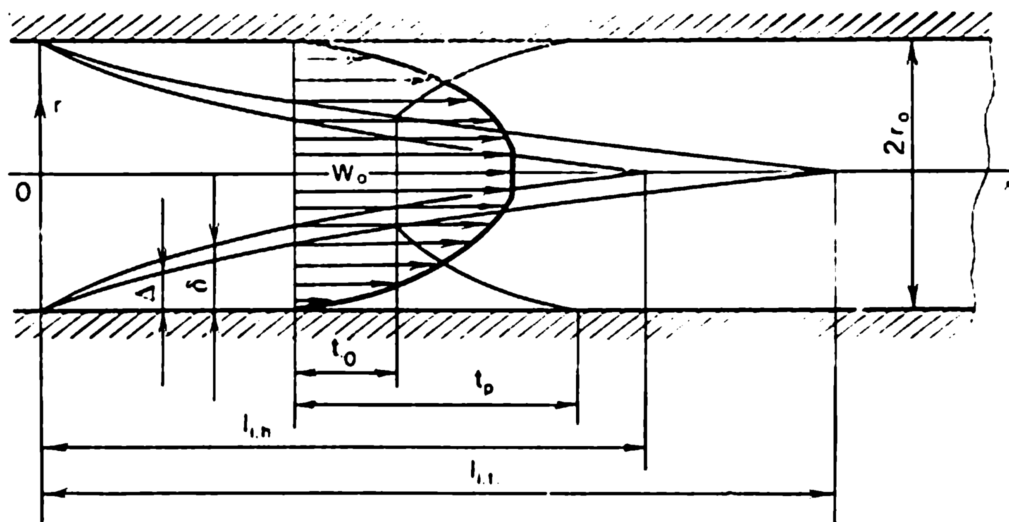


Fig. VI.37. Développement des couches limites dynamique et thermique dans le tronçon initial du tube

cylindriques. Aussi, la connaissance des lois principales d'échange de chaleur dans le cas de tels écoulements est-elle impérative pour le calcul et l'étude de divers appareils d'échange de chaleur.

Si les distributions de la vitesse et des températures du fluide à l'entrée sont uniformes, le long de la paroi du tube commencent à se développer des couches limites dynamique δ et thermique Δ (fig. VI.37). L'épaisseur de la couche limite suivant la longueur du tube augmente pour couvrir finalement toute la section de passage.

Suivant les conditions d'écoulement et d'entrée du fluide dans le tube, la couche limite peut être laminaire, turbulente ou mixte, étant composée des zones d'écoulement laminaire, transitoire et turbulente.

Une fois que le fluide passe par la section où les couches limites se joignent, il s'établit dans le tube une distribution constante des vitesses, qui pour l'écoulement laminaire a la forme d'une parabole, et pour l'écoulement turbulent, d'une courbe convexe (fig. VI.38). La distance entre l'entrée et cette section s'appelle *longueur d'éta-*

blissement ou *longueur du tronçon initial*, ou encore *longueur du tronçon de stabilisation hydrodynamique* $l_{\text{i.h}}$.

En présence de l'échange de chaleur, à mesure que le fluide se déplace le long du tube, les couches voisines de la paroi s'échauffent ou se refroidissent. A l'extrémité amont du tube le noyau central du fluide garde la température qu'il avait à l'entrée et ne participe pas à l'échange de chaleur ; la température change dans les couches d'une épaisseur Δ voisines de la paroi. Il se forme ainsi près de la surface du tube dans sa partie amont une couche limite thermique dont l'épaisseur croît à mesure qu'on s'éloigne de l'entrée. A une distance définie de celle-ci, appelée *tronçon thermique initial* $l_{\text{i.h}}$, les couches limites thermiques se joignent, plus loin le fluide tout entier participe à l'échange de chaleur, et pour un fluide incompressible, avec $t_p = \text{const}$, le profil sans dimensions des températures $\Theta = (t - t_p)/(t_0 - t_p)$ reste invariable suivant la longueur du tube.

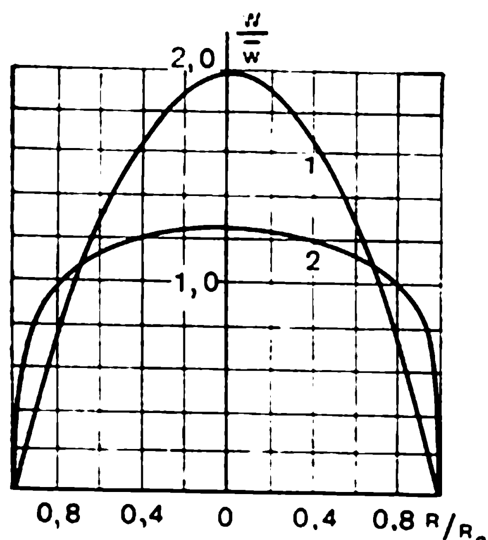


Fig. VI.38. Profils des vitesses dans le tube :
1 — écoulement laminaire ; *2* — écoulement turbulent

Dans le tronçon de l'écoulement stabilisé le coefficient de transmission de chaleur est défini ordinairement d'après la différence entre la température moyenne du fluide $\bar{t}_0$ et la température de la paroi, c'est-à-dire

$$\alpha_p = \frac{q_p}{\bar{t}_0 - t_p},$$

où $\bar{t}_0 = \dfrac{2\int\limits_0^{r_0} c_p t w_x r\, dr}{c_p r_0^2 \bar{w}}$.

Le fait que le gradient de température diminue plus vite dans le tronçon de stabilisation thermique que la pression thermique, entraîne que le coefficient de transmission de chaleur $\alpha = -\lambda\,(dt/dy)_p/(\bar{t}_0 - t_p)$ diminue en tendant vers une constante caractéristique de l'écoulement établi (fig. VI.39).

L'écoulement du fluide dans les tubes peut être laminaire ou turbulent. Le régime est défini par la valeur du nombre $\text{Re} = wd/\nu$.

Si $\text{Re} < \text{Re}_{\text{cr1}}$, l'écoulement est *laminaire*. Des explorations expérimentales multiples ont montré que pour un écoulement isother-

me dans des tubes circulaires, $Re_{cr1} \cong 2300$. Un écoulement *turbulent* évolué dans des tubes techniques s'établit avec $Re > Re_{cr2} \cong \cong 10^4$. Pour $Re_{cr1} < Re < Re_{cr2}$, le régime est instable, on dit qu'il est mixte ou *transitoire*. En régime transitoire la turbulence apparaît sur une certaine longueur du tube, puis le fluide, se déplaçant suivant une allure turbulente, est emporté par le courant. La

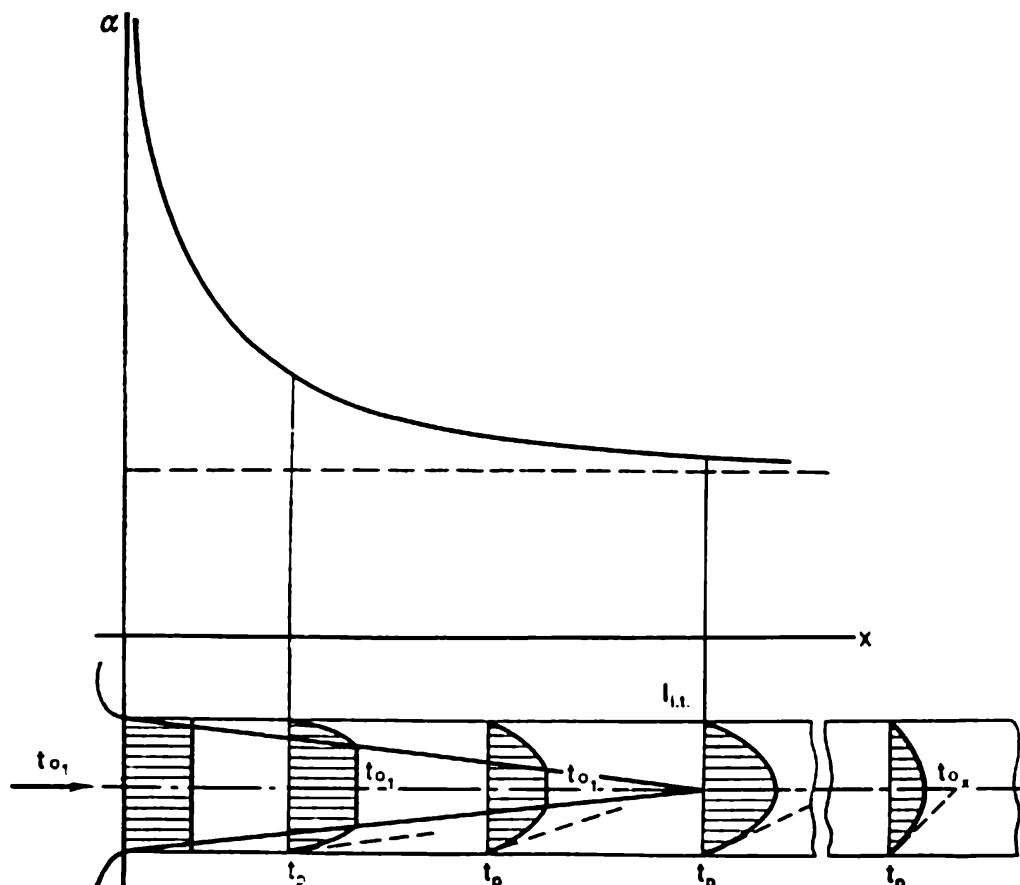


Fig. VI.39. Variation du coefficient de transmission de chaleur suivant la longueur du tube

succession des régimes laminaire et turbulent se produit en intervalles de temps irréguliers, sa caractéristique est donnée par le *coefficient d'alternance* γ, qui indique la part d'un certain intervalle de temps pendant lequel en un point défini existe un écoulement turbulent. Pour un écoulement laminaire, $\gamma = 0$; pour un écoulement turbulent, $\gamma = 1$ (fig. VI.40).

La grandeur Re_{cr} subit une forte influence de la forme du courant définie par la forme du tube. Ainsi, pour les convergents progressifs Re_{cr} est plus grand que pour des tubes, et dans les divergents (diffuseurs) il est plus petit. Pour des tubes droits à section carrée et rectangulaire les valeurs expérimentales de Re_{cr}, déterminées d'après

le diamètre équivalent, sont proches des valeurs propres aux tubes de section circulaire. Les tubes dont les sections comportent des zones angulaires étroites rendent possible la présence simultanée des régimes laminaire et turbulent. Le nombre critique de Reynolds pour lequel l'écoulement reste laminaire suivant toute la section du courant est alors sensiblement inférieur à 2300. Pour des tubes circulaires incurvés la valeur de $\mathrm{Re_{cr}}$ croît avec la diminution du rayon de courbure. Lorsque le fluide se déplace dans un tube incurvé,

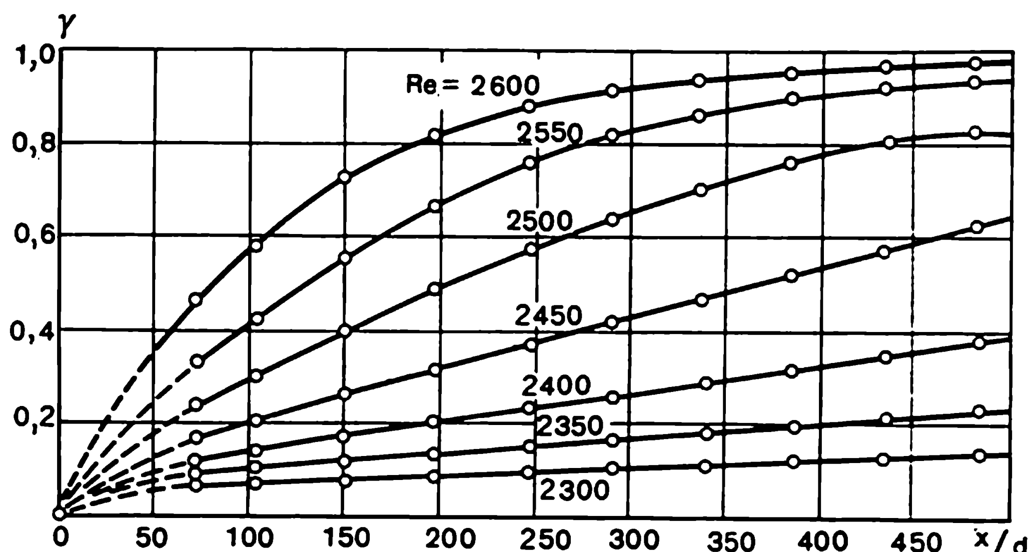


Fig. VI.40. Relation entre le coefficient d'alternance γ dans un tube et la longueur courante x pour de différents nombres de Reynolds

chaque particule subit l'action de la force centrifuge qui dépend de la vitesse du fluide et du rayon de courbure du tube. Il en résulte une circulation transversale supplémentaire. Les expériences montrent que dans des tubes incurvés pour des D/d peu grands la quantité $\mathrm{Re_{cr}}$ est sensiblement supérieure au cas des tubes droits, ce qui s'explique par l'action stabilisante de la force centrifuge. Pour le domaine $3 \leqslant R/d \leqslant 200$, on recommande de calculer $\mathrm{Re_{cr}}$ d'après la formule empirique

$$\mathrm{Re_{cr}} = 1500\,(R/d)^{-0,3},$$

où R est le rayon de courbure du tube.

Dans le cas général, la rugosité de la paroi contribue au passage du régime laminaire au régime turbulent, en provoquant dans la couche laminaire des perturbations complémentaires. L'intensité de ces perturbations dépend des aspérités du profil. Comme le montrent les expériences, l'action des rugosités sur $\mathrm{Re_{cr}}$ commence depuis la valeur $\mathrm{Re}_S = w_0 k/\nu$, où k est la hauteur des aspérités du profil.

Dans les conditions de l'échange de chaleur l'écoulement d'un fluide peut différer sensiblement de l'écoulement isotherme, la valeur des propriétés physiques étant fonction de la température. Dans ce cas les nombres de Reynolds critiques se distinguent également des valeurs indiquées pour les écoulements isothermes. En particulier, lorsqu'un fluide se déplace dans un tube vertical à une allure non isotherme importante la distribution des vitesses et la stabilité de l'écoulement laminaire sont sensiblement influencées par les forces ascentionnelles. La figure VI.41 visualise la relation entre le nombre

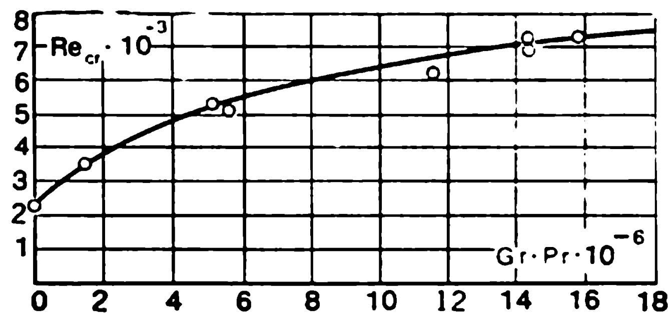


Fig. VI.41. Nombre de Reynolds critique en fonction du nombre de Rayleigh pour la coïncidence des convections libre et forcée

de Reynolds critique et le nombre Gr·Pr dans un tube vertical lorsque les directions des convections libre et forcée coïncident. La courbe montre qu'avec la croissance de Gr·Pr la valeur du nombre critique de Reynolds croît elle aussi, ce qui s'explique par le fait qu'avec l'augmentation de Gr·Pr le profil des vitesses dans la couche au voisinage de la paroi se trouve rempli.

La valeur de Re_{cr} est fortement influencée par la forme de l'entrée. Lorsque celle-ci est bien arrondie et les perturbations sont absentes, Re_{cr} peut aller jusqu'à $4 \cdot 10^4$. La longueur du tronçon d'entrée, où la perturbation initiale peut s'amortir ou croître, s'échelonne d'après différentes données de 50 à 130 *d* du tube.

En étudiant l'échange de chaleur dans les tubes, on recourt surtout à deux méthodes d'exploration permettant d'obtenir les lois quantitatives.

La *première* consiste à résoudre analytiquement le système d'équations différentielles sous des hypothèses et des conditions aux limites définies. La *deuxième* fait appel à la théorie de similitude et des dimensions, les relations de calcul concrètes s'obtenant par traitement critériel des données d'expérience.

1. Echange de chaleur lors de l'écoulement laminaire forcé d'un fluide dans des tubes

Ecoulement isotherme. Examinons l'écoulement laminaire d'un fluide à propriétés physiques constantes dans les conditions de la stabilisation hydrodynamique.

Pour le cas d'un tube circulaire et d'un écoulement établi l'équation du mouvement est de la forme

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_x}{dr}\right)=-\frac{dp}{\mu\,dx}. \qquad \text{(VI.325)}$$

Après une intégration double, on a

$$w_x=-\frac{dp}{4\mu\,dx}r^2+C_1\ln r+C_2. \qquad \text{(VI.326)}$$

En utilisant les conditions aux limites sous la forme: pour $r=0$, $dw_x/dr=0$; pour $r=r_0$ $w_x=0$, on trouve $C_1=0$ et $C_2=\frac{r_0^2}{4\mu}\frac{dp}{dx}$ et la distribution des vitesses suivant la section en forme de parabole

$$w_x=\frac{\Delta p}{4\mu l}(r_0^2-r^2). \qquad \text{(VI.327)}$$

La vitesse moyenne du débit

$$\bar{w}=\frac{1}{\pi r_0^2}\int_0^{r_0}2\pi wr\,dr=-\frac{r_0^2}{8\mu}\frac{dp}{dx}. \qquad \text{(VI.328)}$$

En portant les valeurs de dp/dx de (VI.328) dans (VI.327) on obtient

$$w=2\bar{w}\,[1-(r/r_0)^2]. \qquad \text{(VI.329)}$$

Ainsi, dans l'écoulement laminaire, la vitesse suivant l'axe du tube est deux fois supérieure à celle de sa valeur moyenne.

L'équation (VI.325) peut s'écrire

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau)=-\frac{dp}{dx}. \qquad \text{(VI.330)}$$

Si par τ on entend la contrainte tangentielle globale ($\tau=\tau_l+\tau_T$), l'équation (VI.330) est justifiée aussi bien pour l'écoulement laminaire que pour l'écoulement turbulent.

Puisque pour l'écoulement établi d'un fluide à propriétés physi-

ques constantes $dp/dx = \text{const}$, l'équation (VI.330) implique

$$\tau/\tau_p = r/r_0. \qquad \text{(VI.331)}$$

Dans les calculs hydrauliques, la chute de pression par unité de longueur du tube s'exprime par la formule

$$-dp/dx = \xi\rho\bar{w}^2/(2d), \qquad \text{(VI.332)}$$

où ξ est ce qu'on appelle *coefficient de résistance hydraulique.*

En portant dans (VI.332) la valeur de $(-dp/dx)$ de (VI.328) on trouve que pour l'écoulement laminaire dans un tube circulaire

$$\xi = 64/\text{Re}, \qquad \text{(VI.333)}$$

où $\text{Re} = \bar{w}d/\nu$.

Actuellement on a établi les profils des vitesses de l'écoulement laminaire stabilisé du fluide dans les canaux à forme la plus variée de la section droite (tableau VI.9).

L'équation différentielle de départ pour l'analyse de ce problème s'obtient à partir de l'équation de Navier-Stokes. Pour l'écoulement laminaire établi (dans la direction x) d'un fluide à propriétés physiques constantes et en absence des forces de masse, cette équation devient

$$\mu\nabla^2 w = dp/dx.$$

Si on admet que la dérivée dp/dx est constante suivant la section droite du tube, cette équation peut être résolue pour des tubes de diverses formes par des méthodes différentes, par exemple, numériques.

Dans la plupart des cas, la contrainte tangentielle varie suivant le paramètre du tube. Pourtant, si on calcule sa moyenne suivant le périmètre et si on l'utilise pour le calcul de la chute de la pression, alors le coefficient de frottement est donné par l'équation

$$\tau_0 = C_f\rho\bar{w}^2/2.$$

Les tubes à section en forme de triangle équilatéral vérifient la relation $C_f\,\text{Re} = 13{,}33$.

Le nombre Re est déterminé d'après le rayon hydraulique du tube r_0. Le déplacement du fluide dans des tubes incurvés donne ordinairement lieu à la formation d'un courant secondaire qui complique sensiblement le processus de transfert de l'impulsion. Pour un écoulement laminaire établi dans un tube circulaire dont l'axe forme un arc de cercle de rayon R, on propose pour le coefficient de frottement l'équation suivante

$$\frac{C_f}{C_{f\,\text{dr}}} = \left\{1 - \left[1 - \left(\frac{11{,}6}{\text{Re}\sqrt{r_0/R}}\right)^{0{,}45}\right]^{2{,}22}\right\}^{-1}, \qquad \text{(VI.334)}$$

Tableau VI.9

Equations des profils des vitesses dans les tubes à section droite différente sous le régime laminaire de l'écoulement

Forme de la section	Equation de w_x
	$w_x=\frac{3}{2}\bar{w}\left(1-\frac{y^2}{r_0^2}\right)$
	$w_x=\frac{\Delta p}{4\mu l}\left[(r_2^2-r_1^2)\ln\frac{r}{r_1}/\ln\frac{r_2}{r_1}-(r^2-r_1^2)\right]$
	$w_x=2\bar{w}(1-y^2/b_1^2-z^2/b_2^2)$
	$w_x=\frac{16\Delta p}{\pi^4\mu l}\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{h}}{mn\left(\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{h^2}\right)}$
	$w_x=3\bar{w}\frac{(B+2)(z^2-y^2)\,\mathrm{tg}^2\beta}{h^2(B-2)\,\mathrm{tg}^2\beta}\left[\left(\frac{y}{h}\right)^{B-2}-1\right]$, où $B=\sqrt{4+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}^2\beta}-1\right)}$
	$w_x=45\bar{w}\left\{\left(\frac{y}{h}-1\right)\left[\left(\frac{z}{h}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]\right\}$

Tableau VI.9 (suite)

Forme de la section	Equation de w_x
O, r_0, φ, r, y, $2\varphi_0$	$w_x=-\frac{\Delta p}{4l\mu}\left\{r^2\left(1-\frac{\cos 2\varphi}{\cos 2\varphi_0}\right)-\frac{16r_0^2(2\varphi_0)^2}{\pi^3}\times\right.$ $\left.\times\sum_{n=1,3,5}^{\infty}(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{n\pi}{2\varphi_0}}\frac{\cos\frac{n\pi}{2\varphi_0}\varphi}{n\left[n^2-\left(\frac{4\varphi_0}{\pi}\right)^2\right]}\right\}$
z, b, O, b, y	$w_x=\frac{16\Delta p b^2}{\pi^4 l\mu}\left[\sum_{m=1,3,5}^{\infty}\sum_{n=2,4,6}^{\infty}\frac{n\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{b}}{m(n^2-m^2)(m^2+n^2)}+\right.$ $\left.+\sum_{m=2,4,6}^{\infty}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{m\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{n\pi z}{b}}{n(m^2-n^2)(m^2+n^2)}\right]$

justifiée pour $11{,}6<\mathrm{Re}\sqrt{r_0/R}<2000$; C_f est le coefficient de frottement dans un tube incurvé; $C_{f\mathrm{dr}}$, le coefficient de frottement dans un tube droit.

Echange de chaleur dans un tube circulaire pour un écoulement hydrauliquement établi. Examinons l'écoulement laminaire établi d'un fluide dans un tube circulaire à température constante de la paroi suivant la longueur du tube. Le débit du fluide, la température de la paroi (t_p) et la température du fluide à l'entrée du tube sont donnés. Le problème ainsi posé a été résolu par Nüsselt, guidé dans sa résolution par les considérations suivantes:

1) on admet que l'échange de chaleur est stationnaire $\left(\frac{\partial t}{\partial \tau}=0\right)$;

2) on admet que le fluide est incompressible et que ses propriétés physiques sont constantes (c'est-à-dire ne dépendent pas de la température);

3) on considère que dans le courant il n'existe pas de sources de chaleur interne et que la chaleur de frottement est négligeable;

4) que le flux thermique le long du tube dû à la conductivité thermique du fluide est négligeable par rapport au flux de chaleur convectif.

L'équation de l'énergie d'un fluide incompressible à propriétés physiques constantes en absence dans le courant de sources de cha-

leur et de dissipation de l'énergie s'écrit en coordonnées cylindriques

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_r \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{w_\varphi}{r} \frac{\partial t}{\partial \varphi} =$$

$$= a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right). \quad \text{(VI.335)}$$

Pour un écoulement laminaire établi

$$w_x' = 2\bar{w}\,(1 - r^2/r_0^2), \text{ et } w_r = w_\varphi = 0.$$

En vertu de la symétrie axiale ($\partial t/\partial \varphi = \partial^2 t/\partial \varphi^2 = 0$) et de la dernière condition (pour Pe > 10 $\partial^2 t/\partial \varphi^2 \ll \partial t/\partial r$), ainsi qu'en introduisant la nouvelle variable $\vartheta = t - t_p$, écrivons l'équation de l'énergie sous la forme

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = \frac{2\bar{w}}{a} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \frac{\partial \vartheta}{\partial x},$$

ou sous une forme sans dimensions

$$\left(\Theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{t - t_p}{t_0 - t_p}; \quad R = \frac{r}{r_0}; \quad X = \frac{a}{2\bar{w} r_0} \frac{x}{r_0} = \frac{2}{\mathrm{Pe}} \frac{x}{d} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial R} = (1 - R^2) \frac{\partial \Theta}{\partial X}. \quad \text{(VI.336)}$$

Le problème se résout sous les conditions aux limites

$$\text{pour } X = 0 \text{ et } 0 \leqslant R < 1;\ \Theta = 1; \quad \text{(VI.337)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{pour } X \geqslant 0 \text{ et } R = 0 \ \partial\Theta/\partial R = 0; \\ \text{pour } X \geqslant 0 \text{ et } R = 1 \ \Theta = 0. \end{array}\right\} \quad \text{(VI.338)}$$

Cherchons la solution de l'équation différentielle sous la forme du produit de deux fonctions :

$$\Theta\,(X, R) = \varphi\,(X)\,\psi\,(R). \quad \text{(VI.339)}$$

En portant (VI.339) dans l'équation (VI.336), on obtient

$$\varphi\psi'' + \frac{1}{R} \varphi\psi' = (1 - R^2)\,\psi\varphi'.$$

En séparant les variables, on obtient deux équations différentielles ordinaires : la première

$$d\varphi/dX = -\varepsilon^2 \varphi \quad \text{(VI.340)}$$

avec la solution sous la forme

$$\varphi = A e^{-\varepsilon^2 X}; \quad \text{(VI.341)}$$

et la deuxième

$$\frac{d^2\psi}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi}{dR} + \varepsilon^2 (1 - R^2)\,\psi = 0 \quad \text{(VI.342)}$$

dont la solution a été proposée par Nüsselt sous la forme de la série

$$\psi=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\xi^n, \quad \text{où} \quad \xi=\varepsilon R,$$

qui, portée dans (VI.342), donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, b_n\xi^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} nb_n\xi^{n-2}+\left(1-\frac{\xi^2}{\varepsilon^2}\right)\sum_{n=0}^{\infty} b_n\xi^n=0.$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2b_n\xi^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty} b_n\xi^n-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\varepsilon^2}\xi^{n+2}=0.$$

Transformons l'expression de façon que les exposants affectés à ξ de tous ses termes aient la même valeur k:

$$\sum_{k=-2}^{\infty} (k+2)^2\, b_{k+2}\xi^k+\sum_{k=0}^{\infty} b_k\xi^k-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_{k-2}}{\varepsilon^2}\xi^k=0.$$

Ecrivons l'équation sous la forme

$$b_1\xi^{-1}+(4b_2+b_0)+(9b_3+b_1)\,\xi+ \\ +\sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+2)^2\, b_{k+2}+b_k-\frac{b_{k-2}}{\varepsilon^2}\right]\xi^k=0.$$

Cette équation devant être observée quelle que soit ξ, les coefficients affectés aux termes comportant ξ de degrés différents doivent être nuls, c'est-à-dire

$$b_1=0; \quad b_2=-\frac{b_0}{4}; \quad b_3=-\frac{b_1}{9}=0;$$

$$b_{k+2}=\frac{1}{(k+2)^2}\left(\frac{b_{k-2}}{\varepsilon^2}-b_k\right)$$

pour $k\geqslant 2$, les coefficients affectés aux termes pairs s'exprimant à l'aide de deux coefficients pairs précédents, et aux termes impairs, respectivement, par deux coefficients impairs. La solution $\psi(R)$ peut être mise sous la forme de la série où figure seulement εR à degrés pairs

$$\psi(\varepsilon R)=\sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}\,(\varepsilon R)^{2n}, \qquad \text{(VI.343)}$$

où l'on convient que $b_0 = 1$ $(n = 0)$;

$$b_2 = b_0/4 = -1/4 \quad (n = 1);$$

$$b_{2n} = \frac{1}{(2n)^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} b_{2n-4} - b_{2n-2}\right) \quad (n \geqslant 2).$$

Sous une forme développée on peut écrire

$$\psi(R) = 1 - \frac{1}{4}(\varepsilon R)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4}\right)(\varepsilon R)^4 + \ldots \quad \text{(VI.344)}$$

La série converge quels que soient εR et ε. La constante ε se calcule d'après la condition aux limites (VI.338) (pour $R = 1$ $\psi = 0$):

$$1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{4}\right)\varepsilon^4 + \ldots = 0. \quad \text{(VI.345)}$$

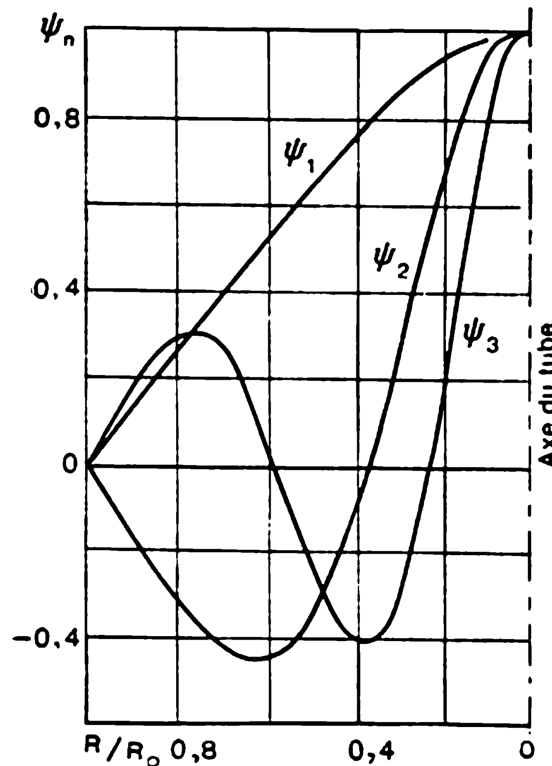


Fig. VI.42. Courbes des fonctions ψ_n

Cette équation possède un nombre infini de racines ε_n appelées *valeurs propres*. Nüsselt a calculé les trois premières racines

$$\varepsilon_0 = 2{,}705; \ \varepsilon_1 = 6{,}66; \ \varepsilon_2 = 10{,}3.$$

A chaque valeur de ε_n correspond sa fonction propre $\psi(\varepsilon_n, R\varepsilon_n) = \psi_n(R)$. Les trois premières fonctions des valeurs mentionnées ε_n sont visualisées sur la figure VI.42.

La solution partielle de l'équation différentielle (VI.342) peut s'écrire

$$\Theta_n = A_n e^{-\varepsilon_n^2 x} \psi_n(R).$$

La solution générale est la somme de toutes les solutions partielles

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\varepsilon_n^2 x} \psi_n(R). \quad \text{(VI.346)}$$

Dans cette équation les grandeurs inconnues sont A_n qu'on peut calculer à partir de la distribution de la température à l'entrée. Ainsi, pour $x = 0$ $\Theta_0(R) = 1$ et

$$\Theta_0(R) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n(R). \tag{VI.347}$$

Compte tenu de (VI.347) la solution de (VI.346) devient

$$1 = A_0\psi_0(R) + A_1\psi_1(R) + \ldots + A_n\psi_n(R) + \ldots$$
$$\ldots + A_m\psi_m(R) + \ldots$$

Puisque ψ_n et ψ_m sont les solutions de l'équation, on peut écrire

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dR}\left(R\frac{d\psi_n}{dR}\right) + \varepsilon_n^2 R(1-R^2)\psi_n = 0; \\ \frac{d}{dR}\left(R\frac{d\psi_m}{dR}\right) + \varepsilon_m^2 R(1-R^2)\psi_m = 0. \end{aligned}\right\} \tag{VI.348}$$

Multiplions la première équation par ψ_m et la deuxième, par ψ_n, et retranchons de la deuxième la première; il vient

$$\psi_n\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\psi_m}{dR}\right) - \psi_m\frac{d}{dR}\left(R\frac{d\psi_n}{dR}\right) = (\varepsilon_n^2 - \varepsilon_m^2) R(1-R^2)\psi_n\psi_m.$$

Mettons le premier membre de cette équation sous la forme

$$\frac{d}{dR}\left[R\left(\psi_n\frac{d\psi_m}{dR} - \psi_m\frac{d\psi_n}{dR}\right)\right]$$

et intégrons-la par rapport à R de 0 à 1:

$$(\varepsilon_n^2 - \varepsilon_m^2)\int_0^1 \psi_n\psi_m R(1-R^2)\,dR = R\left(\psi_n\frac{d\psi_m}{dR} - \psi_m\frac{d\psi_n}{dR}\right)\Big|_0^1. \tag{VI.349}$$

Le deuxième membre de l'équation s'annule avec $R = 0$ et $R = 1$ du fait que

$$\psi_n(1) = \psi_m(1) = 0.$$

On en tire la propriété d'orthogonalité

$$\int_0^1 \psi_n\psi_m R(1-R^2)\,dR = 0$$

pour $m \neq n$, dont la prise en compte permet d'écrire

$$A_n = \frac{\int_0^1 \Theta_0(R)\,\psi_n(R)\,R(1-R^2)\,dR}{\int_0^1 \psi_n(R)\,R(1-R^2)\,dR}. \tag{VI.350}$$

Avec $\Theta = 1$ l'intégrale du numérateur est

$$\int_0^1 \psi_n(R)\, R(1-R^2)\, dR = -\frac{1}{\varepsilon_n^2}\left(\frac{d\psi_n}{dR}\right)_{R=1}; \qquad \text{(VI.351)}$$

et l'intégrale du dénominateur,

$$N_n = \int_0^1 \psi_n^2(R)\, R(1-R^2)\, dR,$$

qui peut se calculer en partant de l'équation (VI.349).

Admettons que ε est une grandeur continue qui tend vers ε_n; alors,

$$N_n = \lim_{\varepsilon\to\varepsilon_n} \int_0^1 \psi_n \psi R(1-R^2)\, dR = \lim_{\varepsilon\to\varepsilon_n} \frac{R\left(\psi_n \frac{d\psi}{dR} - \psi \frac{d\psi_n}{dR}\right)\Big|_0^1}{\varepsilon_n^2 - \varepsilon^2}$$

et après avoir calculé la limite de la forme indéterminée, on obtient

$$N_n = \int_0^1 \psi_n^2 R(1-R^2)\, dR = \frac{1}{2\varepsilon_n}\left[\frac{d\psi_n}{dR}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_n}\right]_{R=1}. \qquad \text{(VI.352)}$$

Donc

$$A_n = -2/\varepsilon_n \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_n;\, R=1}, \qquad \text{(VI.353)}$$

où la dérivée $\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}\right)_{\varepsilon=\varepsilon_n;\, R=1}$ est déterminée d'après l'équation (VI.344).

Le calcul fournit les valeurs suivantes:

$$A_0 = 1{,}477;\ A_1 = -0{,}810;\ A_2 = 0{,}385.$$

La distribution définitive de la température du fluide est donnée par la formule

$$\frac{t-t_p}{t_0-t_p} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \psi_n\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{x}{\mathrm{Pe}\, d}\right). \qquad \text{(VI.354)}$$

Les valeurs de $\psi_n(R)$, ε_n et A_n sont consignées sur les tableaux VI.10 et VI.11. La figure VI.43 reproduit la distribution de la température suivant le rayon et la longueur du tube [les calculs sont faits d'après l'équation (VI.354)].

Tableau VI.10

Valeurs des fonctions propres

R	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5
0	1	1	1	1	1	1
0,1	0,981845	0,891809	0,735450	0,531081	0,302289	0,074881
0,2	0,928893	0,604700	0,152473	−0,233032	−0,402601	−0,321220
0,3	0,845468	0,233857	−0,315213	−0,359141	0,000543	0,289820
0,4	0,738094	−0,109593	−0,392085	0,067932	0,299074	−0,047658
0,5	0,614599	−0,342141	−0,142342	0,315072	−0,079733	−0,205318
0,6	0,483097	−0,432182	0,169685	0,114169	−0,255230	0,197497
0,7	0,351010	−0,397629	0,331488	−0,196043	−0,036100	0,103721
0,8	0,224264	−0,284494	0,302723	−0,292241	0,259184	−0,208931
0,9	0,106741	−0,141133	0,162625	−0,177621	0,188173	−0,195217
1	0	0	0	0	0	0

Tableau VI.11

Valeurs propres

n	ε_n	ε_n^2	A_n	B_n
0	2,704364	7,313586	+1,4764354	0,74877450
1	6,679031	44,609460	−0,8061239	0,54382795
2	10,673380	113,92104	+0,5887621	0,4628610
3	14,671078	215,24053	−0,4758504	0,4154184
4	18,669872	348,56412	+0,4050218	0,38291915
5	22,669143	513,89004	−0,3557565	0,35868555
6	26,668662	711,21753	+0,3191690	0,33962210
7	30,668323	940,54604	−0,2907358	0,32406215
8	34,668074	1201,8754	+0,2678911	0,31101395
9	38,667883	1495,2052	−0,2490625	0,29984400
10	42,667734	1820,5355	+0,2332277	0,29012455

Le calcul de grands n est difficile et à cet effet on utilise la solution asymptotique qui permet de simplifier sensiblement la procédure

$$\varepsilon_n = 4n + 8/3, \tag{VI.355}$$

$$A_n = (-1)^n \cdot 2{,}84606 \varepsilon_n^{-2/3}. \tag{VI.356}$$

Pour de petits R (près de l'axe du tube)

$$\psi_n(R) = J_0(\varepsilon_n R). \tag{VI.357}$$

Pour des R moyens

$$\psi_n(R)=\sqrt{\frac{2}{\pi\varepsilon_n R}}\,\frac{\cos\left[\frac{\varepsilon_n}{2}R\sqrt{1-R^2}+\frac{\varepsilon_n}{2}\arcsin R-\frac{\pi}{4}\right]}{(1-R^2)^{1/4}}. \tag{VI.358}$$

Pour des R proches de l'unité (près de la paroi)

$$\psi_n(R)=\sqrt{\frac{2}{3}(1-R)}\,(-1)^n J_{1/3}\left[\frac{\varepsilon_n\sqrt{8}}{3}(1-R)^{3/2}\right]. \tag{VI.359}$$

Introduisons le paramètre B_n pour $R=1$:

$$B_n=-\frac{1}{2}A_n\left(\frac{d\psi_n}{dR}\right)_{R=1}=1{,}01276\varepsilon_n^{-1/3}. \tag{VI.360}$$

La bonne correspondance des solutions exacte et asymptotique s'observe pour $n\geqslant 3$.

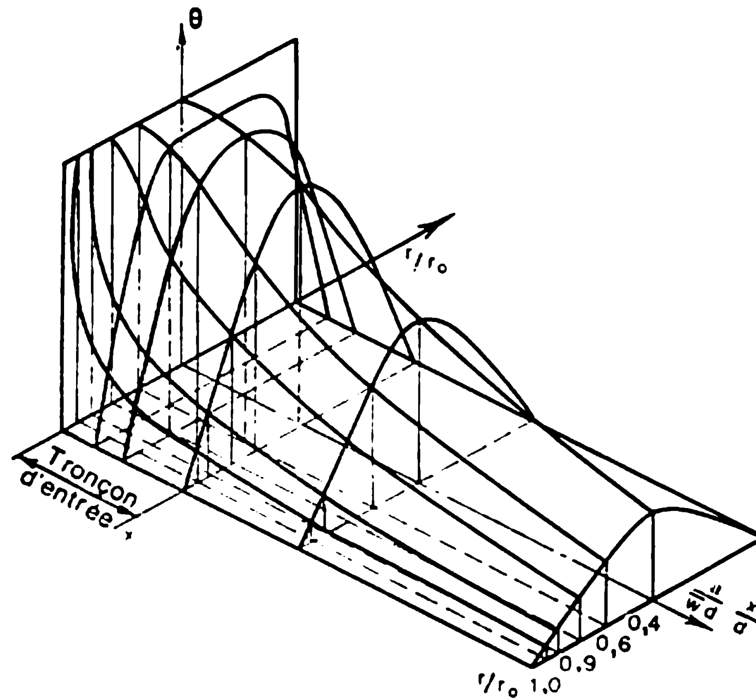


Fig. VI.43. Distribution de la température dans un tube d'après Nüsselt

Pour une grande longueur réduite on peut garder seulement le premier terme de la série

$$\Theta=\frac{t-t_p}{t_0-t_p}=A_0\psi_0\left(\frac{r}{r_0}\right)\exp\left(-2\varepsilon_0^2\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{1}{x}\right). \tag{VI.361}$$

La température de masse moyenne du fluide

$$\bar{t} = \frac{1}{\pi r_0^2 \bar{w}_0} \int_0^{r_0} t w_x 2\pi r \, dr,$$

ou, sous une forme sans dimensions,

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{t} - t_p}{t_0 - t_p} = 2 \int_0^1 \Theta w_x R \, dR = 4 \int_0^1 \Theta (1 - R^2) R \, dR.$$

Portons l'expression (VI.361) de Θ dans la dernière formule pour obtenir

$$\bar{\Theta} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{x}{d}\right) \int_0^1 \psi_n(R) R (1 - R^2) \, dR,$$

et sous la forme définitive,

$$\frac{\bar{t} - t_p}{t_0 - t_p} = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\varepsilon_n^2} \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{x}{d}\right), \qquad \text{(VI.362)}$$

où

$$B_n = -\frac{1}{2} A_n \left(\frac{d\psi_n}{dR}\right)_{R=1}.$$

Le coefficient de transmission de chaleur local est déterminé par la formule

$$\alpha = \frac{q_p}{t_p - \bar{t}} = -\frac{\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)_{r=r_0}}{\bar{t} - t_p}.$$

En introduisant le nombre de Nüsselt, on a

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha d}{\lambda} = -\frac{2}{\bar{\Theta}} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial R}\right)_{R=1} = 2 \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{t - t_p}{\bar{t} - t_p}\right)\right]_{R=1} =$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{x}{d}\right)}{2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\varepsilon_n^2} \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{x}{d}\right)}. \qquad \text{(VI.363)}$$

L'analyse de la formule (VI.363) entraîne que

$$\text{pour } x \to 0, \ \mathrm{Nu} \to \infty;$$

$$\text{pour } x \to \infty, \ \mathrm{Nu}_\infty = \varepsilon_0^2/2 = 3{,}657 \qquad \text{(VI.364)}$$

et α dépend seulement de la conductivité du fluide et du diamètre du tube. La figure VI.44 montre que toute la longueur du tube chauffé peut être divisée en deux tronçons. Le premier est le siège où se forme le profil de la température (le nombre Nu décroît suivant la longueur); le deuxième est celui où la loi de la distribution de la température suivant le rayon ne change pas en fonction de la longueur (le nombre Nu garde une valeur constante). Le premier

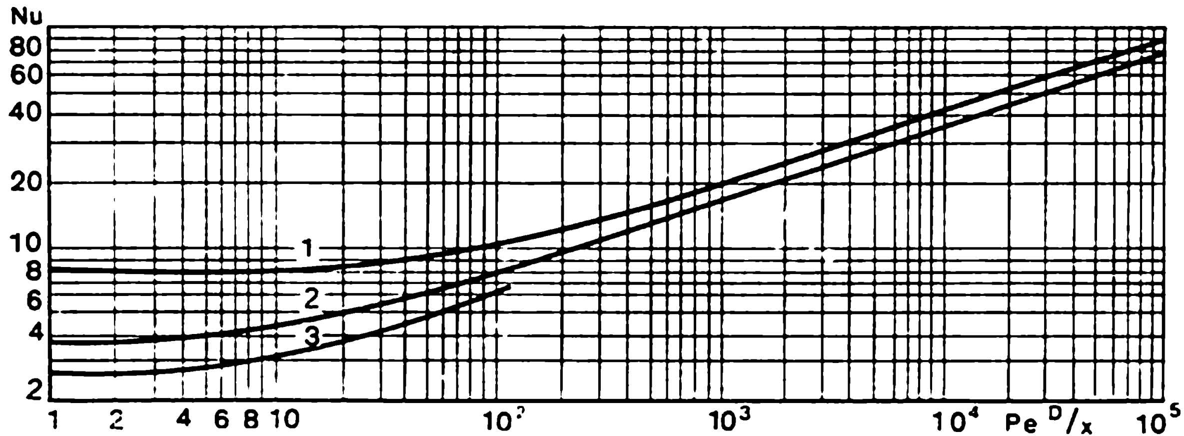


Fig. VI.44. Relation entre le nombre Nu et le groupement Pe $\frac{D}{x}$ dans l'écoulement laminaire:
1 — fente plane; *2* — tube rond; *3* — triangle équilatéral

s'appelle *tronçon thermique initial*, le deuxième, *tronçon d'échange de chaleur stabilisé*. La longueur du tronçon thermique initial peut se calculer comme la distance de la section d'entrée à laquelle le nombre Nu prend à 1 % près la valeur constante. En vertu de l'équation (VI.363)

$$l_{\text{i.th}}/d = 0{,}055 \text{ Pe}. \qquad \text{(VI.365)}$$

Pour le nombre Re donné, la longueur du tronçon thermique initial est définie par le nombre Pr. Pour les caloporteurs à métaux liquides $l_{\text{i.th}}$ ne dépasse pas quelques diamètres; pour les gaz, quelques dizaines de diamètres; pour les fluides aqueux, $l_{\text{i.th}}$ peut varier de plusieurs centaines à quelques dizaines de milliers de diamètres de la conduite. Il s'ensuit que dans les tubes des appareils d'échange de chaleur, pour les fluides à nombre Pr > 1, dans le cas de l'écoulement laminaire suivant toute la longueur du tube, l'échange de chaleur se poursuit dans le domaine du tronçon thermique initial. Pour le calcul pratique du transfert de chaleur l'utilisation de l'équation (VI.363) est incommode. La solution (VI.363) peut être sim-

plifiée en y portant les valeurs asymptotiques de ε_n, B_n et en remplaçant la somme par l'intégrale.

Pour $\frac{1}{\mathrm{Pe}} \cdot \frac{x}{d} < 10^{-4}$,

$$\mathrm{Nu} = 1{,}077 \left(\frac{1}{\mathrm{Pe}} \cdot \frac{x}{d} \right)^{-1/3} - 1{,}7, \qquad \text{(VI.366)}$$

et pour $\frac{1}{\mathrm{Pe}} \cdot \frac{x}{d} \geqslant 10^{-3}$, à $\pm 0{,}5$ % près,

$$\mathrm{Nu} = 3{,}655 + 0{,}2355 \Big/ \left[\left(\frac{x}{\mathrm{Pe}\, d} \right)^{0{,}488} \exp \left(57{,}2 \frac{x}{\mathrm{Pe}\, d} \right) \right]. \qquad \text{(VI.367)}$$

Le *coefficient de transmission de chaleur intégral* moyen s'écrit

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha \, dx.$$

L'équation du bilan thermique fournit pour un élément de tube d'une longueur dx

$$\alpha \, dx = -\frac{\bar{w} d \rho c_p}{4} \frac{d\bar{\vartheta}}{\bar{\vartheta}} \quad \text{et}$$

$$\bar{\alpha} = -\frac{\bar{w} \, d\rho c_p}{4l} \int_{\vartheta_0}^{\bar{\vartheta}_{x=l}} \frac{d\bar{\vartheta}}{\bar{\vartheta}} = -\frac{\bar{w} \, d\rho c_p}{4l} \ln \frac{\bar{\vartheta}_{x=l}}{\vartheta_0},$$

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{\bar{\alpha} d}{\lambda} = -\frac{1}{4} \mathrm{Pe} \frac{d}{l} \ln \bar{\Theta}_{x=l}.$$

En y portant $\bar{\Theta}$ de l'équation (VI.362), on obtient

$$\mathrm{Nu} = -\frac{1}{4} \mathrm{Pe} \frac{d}{l} \ln \left[8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{\varepsilon_n^2} \exp \left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\mathrm{Pe}} \frac{l}{d} \right) \right]. \qquad \text{(VI.368)}$$

Pour Pe $l/d < 250$ on peut à 4 % près utiliser l'équation d'interpolation

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 3{,}66 + \frac{0{,}0668 \mathrm{Pe}\, d/l}{1 + 0{,}04 (\mathrm{Pe}\, d/l)^{2/3}}. \qquad \text{(VI.369)}$$

En technique on a souvent à résoudre des problèmes d'échange de chaleur *dans les conditions d'une densité constante du flux thermique sur la paroi*; on y rapporte les échauffements électrique, radiatif, dans des piles nucléaires et des échangeurs à contre-courant, les

équivalents d'eau des caloporteurs étant égaux. Ce sont les cas pour lesquels on tire de l'équation du bilan thermique

$$t_m = t_0 + \frac{2q_p x}{\rho c_p \bar{w} r_0}, \tag{VI.370}$$

ou, sous une forme sans dimensions,

$$\bar{\Theta} = \frac{t_m - t_0}{q_p d/\lambda} = \frac{4}{\mathrm{Pe}} \frac{x}{d}, \tag{VI.371}$$

où $\mathrm{Pe} = \bar{w}d/a$; t_0, la température constante du fluide à l'entrée du tube.

Pour la charge thermique donnée on cherche la température de la paroi et le coefficient de transmission de chaleur.

Dans les conditions envisagées l'équation de l'énergie est de la forme

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\Theta}{\partial R} = (1 - R^2)\frac{\partial\Theta}{\partial X}; \tag{VI.372}$$

les conditions aux limites

$$\left.\begin{array}{lll} \text{pour } X = 0, & 0 < R < 1 & \Theta = 0; \\ \text{pour } X \geqslant 0, & R = 0 & \partial\Theta/\partial R = 0; \\ \text{pour } X \geqslant 0, & R = 1 & \partial\Theta/\partial R = 1/2, \end{array}\right\} \tag{VI.373}$$

où $\Theta = \frac{t - t_0}{q_p\, d/\lambda}$ et $R = r/r_0$; $X = \frac{2}{\mathrm{Pe}} \frac{x}{d}$.

Considérons la solution de ce problème pour un domaine éloigné de l'entrée du tube, où s'est établi le profil similaire de la température à coefficient de transmission de chaleur constant suivant la longueur. Dans ce cas on peut supposer que la température Θ, quelle que soit la valeur de R, varie linéairement suivant la longueur du tube de même que $\bar{\Theta}$; il vient

$$\Theta = Ax + f(R), \tag{VI.374}$$

où A est une constante, et $f(R)$, une fonction inconnue. Pour confirmer l'hypothèse, calculons A et la forme de la fonction $f(R)$, et à cet effet portons (VI.374) dans (VI.372)

$$\frac{d}{dR}\left(R\frac{df}{dR}\right) = A(1 - R^2)R.$$

En intégrant cette équation de 0 à R et en retenant que pour $R = 0$, $df/dR = 0$, on a

$$df/dR = A(R/2 - R^3/4).$$

La troisième condition aux limites de (VI.373) permet de déterminer $A = 2$. La deuxième intégration donne

$$f(R) = R^2/2 - R^4/4 + C.$$

Par conséquent,

$$\Theta = 2X + R^2/2 - R^4/8 + C. \qquad \text{(VI.375)}$$

La constante d'intégration C s'obtient à partir de l'équation (VI.371) en calculant au préalable la température de masse moyenne d'après la formule

$$\bar{\Theta} = 4 \int_0^1 \Theta (1 - R^2)\, R\, dR.$$

Après l'intégration et après avoir porté $\bar{\Theta}$ dans l'équation (VI.373) on trouve que $C = -7/48$.

L'expression définitive du profil de température est de la forme

$$\Theta = \frac{4}{\mathrm{Pe}} \frac{x}{d} + \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{8} R^4 - \frac{7}{48}, \qquad \text{(VI.376)}$$

et, comme cas particulier, la température de la paroi

$$\Theta_{\mathrm{p}} = \Theta_{R=1} = \frac{4}{\mathrm{Pe}} \frac{x}{d} + \frac{11}{48}. \qquad \text{(VI.377)}$$

Calculons pour le cas envisagé le nombre de Nüsselt

$$\mathrm{Nu}_d = \frac{q_{\mathrm{p}} d}{(t_{\mathrm{p}} - \bar{t})\, \lambda} = (\Theta_{\mathrm{p}} - \bar{\Theta})^{-1} = \frac{48}{11} \cong 4{,}36. \qquad \text{(VI.378)}$$

Ainsi, sous une charge thermique spécifique constante, dans une région éloignée de l'entrée du tube, la variation de la température de la paroi suivant la longueur est régie par une loi linéaire, et le Nüsselt garde sa valeur constante. La comparaison des formules (VI.378) et (VI.364) implique que dans le domaine de l'écoulement établi, sous charge thermique constante, le Nüsselt est de 19 % supérieur à sa valeur qui correspond à la température constante de la paroi.

Examinons le *problème d'échange de chaleur dans le tronçon thermique initial pour* q_{p} = const *suivant la longueur.*

Introduisons une nouvelle variable

$$\Theta_1 = \Theta - \Theta_*, \qquad \text{(VI.379)}$$

où Θ_* est une solution partielle pour le domaine d'échange de chaleur stabilisé défini par l'équation (VI.376).

Le problème se ramène à l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Theta_1}{\partial R} = (1 - R^2) \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} \qquad \text{(VI.380)}$$

sous les conditions aux limites

$$X = 0 \text{ et } 0 < R < 1;\ \Theta_1 = -(R^2/2 - R^4/8 - 7/48);$$

$$\left.\begin{array}{l} X \geqslant 0 \text{ et } R = 0;\ \partial\Theta_1/\partial R = 0; \\ X \geqslant 0 \text{ et } R = 1;\ \partial\Theta_1/\partial R = 0. \end{array}\right\} \qquad \text{(VI.381)}$$

La solution peut s'obtenir par la même méthode que celle utilisée sous les conditions aux limites t_p = const. Par conséquent, la solution générale de Θ_1 est d'une forme analogue

$$\Theta_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(R) \exp(-\varepsilon_n^2 X), \qquad \text{(VI.382)}$$

où ε_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) sont les valeurs propres; $\psi_n(R)$, les fonctions propres; A_n, les coefficients constants.

L'expression définitive de la distribution de la température s'écrit

$$\Theta = \Theta_* + \Theta_1 = \frac{4}{\mathrm{Pe}}\,\frac{x}{d} + \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{8}R^4 - \frac{7}{48} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(R) \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\mathrm{Pe}}\,\frac{x}{d}\right). \qquad \text{(VI.383)}$$

Pour la température de la paroi

$$\Theta_p = \frac{4}{\mathrm{Pe}}\,\frac{x}{d} + \frac{11}{48} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(1) \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\mathrm{Pe}}\,\frac{x}{d}\right). \qquad \text{(VI.384)}$$

Les valeurs de ε_n^2, $\psi_n(1)$ et A_n sont consignées sur le tableau VI.3. La figure VI.45 visualise la distribution de la température du fluide suivant le rayon et la longueur du tube.

Les valeurs locales du nombre de Nüsselt se calculent d'après l'équation (VI.384)

$$\mathrm{Nu} = \frac{q_p d}{(t_p - \bar{t})\,\lambda} = (\Theta_p - \overline{\Theta})^{-1}.$$

En tenant compte de (VI.384), on a

$$\mathrm{Nu} = 1\Big/\frac{11}{48} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(1) \exp\left(-2\varepsilon_n^2 \frac{1}{\mathrm{Pe}}\,\frac{x}{d}\right). \qquad \text{(VI.385)}$$

Pour des valeurs assez grandes du rapport x/d, la somme des termes de la série tend vers zéro et l'équation (VI.385) se transforme en (VI.378) obtenue précédemment pour le domaine d'échange de chaleur stabilisé.

Après avoir calculé la longueur du tronçon thermique initial à partir de la condition $Nu_{x=l_{t.th}} = 1{,}01\ Nu_\infty$ on obtient

$$l_{t.t}/d = 0{,}07\ \mathrm{Pe}. \qquad \text{(VI.386)}$$

De la sorte, sous la condition $q_p = \text{const}$, la longueur du tronçon de stabilisation thermique est de 27 % plus grande que la longueur analogue pour le cas de $t_p = \text{const}$.

Pour la longueur réduite $\frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{x}{d} < 0{,}04$, on peut déterminer à ± 4 % près le nombre de Nüsselt d'après l'équation d'interpolation

$$\mathrm{Nu} = 1{,}31\left(\frac{1}{\mathrm{Pe}}\ \frac{x}{d}\right)^{-1/3}\left(1 + 2\frac{1}{\mathrm{Pe}}\ \frac{x}{d}\right). \qquad \text{(VI.387)}$$

Si l'échauffement du tube commence depuis l'entrée du fluide où la distribution des vitesses est uniforme, le transfert de chaleur

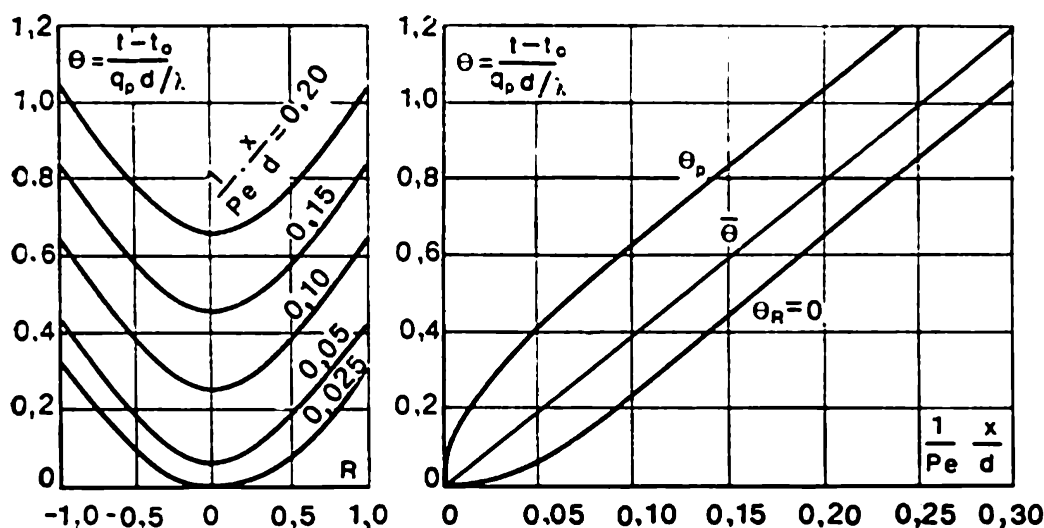


Fig. VI.45. Distribution de la température suivant le rayon et la longueur d'un tube pour $q_p = \text{const}$

peut se calculer d'après la formule

$$\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Nu}_{p\delta}} = 0{,}35\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\ \frac{x}{d}\right)^{-1/6}\left[1 + 2{,}85\left(\frac{1}{\mathrm{Re}}\ \frac{x}{d}\right)^{0{,}42}\right], \qquad \text{(VI.388)}$$

où $\mathrm{Nu}_{p\delta}$ est le nombre local de Nüsselt calculé d'après les formules (VI.385) ou (VI.387).

L'équation (VI.388) est vraie pour la variation des paramètres dans les limites

$$10^{-4} \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}}\ \frac{x}{d} \leqslant 0{,}064 \quad \text{et} \quad 0{,}7 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 10^3.$$

Pour $\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{x}{d} > 0{,}064$ le profil des vitesses devient parabolique, et $\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_{p\delta}$.

On tombe souvent sur des cas où la densité du flux thermique suivant la circonférence du tube est différente, ce qui conduit à la surchauffe des secteurs isolés de la surface. Lorsque la densité du flux thermique sur la paroi suivant la longueur du tube est constante, l'équation de départ est la suivante

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial\varphi^2}=\frac{w}{a}\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{w}{a}\frac{dt_m}{dx}. \qquad \text{(VI.389)}$$

Elle est résolue par la méthode de la source thermique ou de la superposition.

Lors de la variation en cosinus du flux thermique (de nombreuses distributions hétérogènes de la densité du flux thermique peuvent être approximées par les développements par rapport aux cosinus) $q = q_a\,(1 + b\cos\varphi)$, et le nombre de Nüsselt local

$$\mathrm{Nu}(\varphi)=(1+\cos\varphi)\Big/\left(\frac{11}{48}+\frac{b}{2}\cos\varphi\right). \qquad \text{(VI.390)}$$

Si $b = 0$, $\mathrm{Nu} = 4{,}364$. Suivant la valeur de b, le nombre de Nüsselt peut prendre des valeurs quelconques, y compris $\mathrm{Nu} = \infty$. Le coefficient de transmission de chaleur infini signifie que la température de la paroi est égale à la température de masse moyenne du fluide.

Un grand intérêt pratique présente l'*échange de chaleur dans un tube circulaire, la densité du flux thermique sur la paroi étant variable suivant la longueur*. L'équation de l'énergie (VI.372) étant linéaire, sa solution pour le cas $q_p = \mathrm{const}$ peut être extrapolée à une loi arbitraire de la variation de q_p suivant la longueur, en appliquant la méthode des superpositions.

La relation donnée $q_p = f(x)$ peut être approximée par une ligne brisée; de plus, on admet que le flux thermique dans chaque tronçon $\Delta\xi$ est constant (fig. VI.46). Chaque palier du flux thermique constitue le siège à partir duquel se développe le champ thermique décrit par l'équation (VI.383).

L'équation de l'énergie (VI.372) étant linéaire par rapport à la température, le champ à distribution échelonnée du flux thermique sur la paroi peut être mis sous la forme de la somme des champs thermiques des paliers isolés:

$$\vartheta=\frac{q_{p0}d}{\lambda}\Theta^+(R,\ x)+\sum_{i=1}^{x/\Delta\xi}\frac{\Delta q_{pi}d}{\lambda}\Theta^+(R,\ x-\xi_i),$$

où Θ^+ est la solution du problème d'échange de chaleur pour $q_p = \mathrm{const}$ (VI.383). En remplaçant les accroissements finis Δq_{pi} par

dq_p et en passant de la somme à l'intégrale, on obtient

$$\vartheta = \frac{q_{p0} d}{\lambda} \Theta^+ (R, x) + \frac{d}{\lambda} \int_0^x \frac{dq_p(\xi)}{d\xi} \Theta^+ (R, x-\xi)\, d\xi.$$

Divisons cette équation par la densité du flux thermique moyenne suivant la longueur

$$\Theta = \bar{q}_{p0} \Theta^+ (R, x) + \int_0^x \frac{dq_p(\xi)}{d\xi} \Theta^+ (R, x-\xi)\, d\xi, \qquad \text{(VI.391)}$$

où

$$\Theta = \frac{t-t_0}{\bar{q}_p d/\lambda}; \quad \bar{q}_{p0} = \frac{q_{p0}}{q_p}; \quad q_p = \frac{q_p}{\bar{q}_p}; \quad \bar{q}_p = \int_0^L q_p(x)\, dx; \quad L = \frac{2}{\mathrm{Pe}} \frac{l}{d}.$$

Pour $R = 1$ on obtient l'équation de la température de la paroi

$$\Theta_p = \bar{q}_{p0} \Theta^+ (x) + \int_0^x \frac{dq_p(\xi)}{d\xi} \Theta_p^+ (x-\xi)\, d\xi. \qquad \text{(VI.392)}$$

Ecrivons l'expression de la température de masse moyenne du fluide

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{t}-t_0}{\bar{q}_p d/\lambda} = 2 \int_0^x q_p(\xi)\, d\xi. \qquad \text{(VI.393)}$$

La valeur locale du nombre de Nüsselt est définie par la formule

$$\mathrm{Nu} = \alpha d/\lambda = \bar{q}_p/(\bar{\Theta}_p - \bar{\Theta}). \qquad \text{(VI.394)}$$

Les calculs montrent que les valeurs locales de Nüsselt dépendent sensiblement de la loi de variation de q_p suivant la longueur du tube. Dans le cas où q_p croît, le nombre Nu est plus grand, et lorsque q_p diminue, il est plus petit qu'avec q_p = const. V. Vilenski montre dans son ouvrage qu'avec $x \to \infty$ le comportement de Nu est déterminé par le paramètre

$$K = \lim \left[\frac{1}{q_p(x)} \frac{dq_p(x)}{dx} \right].$$

Si K a une valeur finie différente de zéro, le nombre de Nüsselt tend vers une certaine valeur différente de Nu_∞ pour q_p = const. Mais si $K = \pm \infty$ (c'est-à-dire la limite n'existe pas), suivant la longueur du tube le Nu croît ou diminue indéfiniment.

Un grand intérêt pratique présente le calcul d'*échange de chaleur dans un canal annulaire.* L'équation différentielle de l'énergie pour un tel canal est la même que pour un tube circulaire (pour le cas q_p = const)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right)=\frac{w}{a}\left(\frac{dt_m}{dx}\right). \quad \text{(VI.395)}$$

Intégrons l'équation du mouvement

$$\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\frac{dp}{dx}$$

pour calculer le profil de la vitesse dans un canal annulaire

$$\frac{w}{\overline{w}}=\frac{2}{M}\left[1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^2+B\ln\frac{r}{r_1}\right], \quad \text{(VI.396)}$$

où $B=\frac{(r^*)^2-1}{\ln r^*}$; $M=1+(r^*)^2-B$; $r^*=\frac{r_2}{r_1}$. L'équation de l'énergie se met alors sous la forme

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right)=\frac{2\overline{w}}{aM}\left[1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^2+B\ln\frac{r}{r_1}\right]\frac{dt_m}{dx}. \quad \text{(VI.397)}$$

Cette équation se prête aisément à l'intégration, et les conditions aux limites se calculent d'après les densités données du flux thermi-

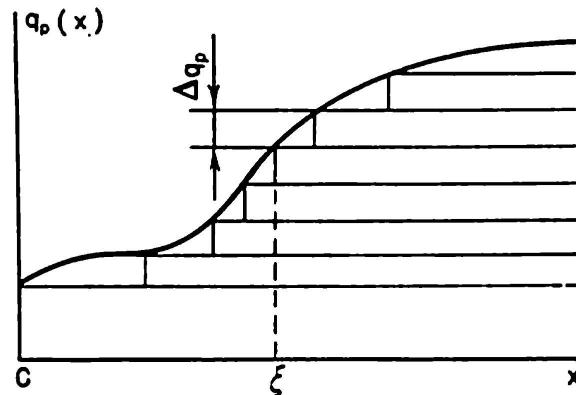


Fig. VI.46. Illustration du problème de l'échange de chaleur pour une variation arbitraire de q_p

que sur les parois du canal. Pourtant, il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation de l'énergie pour chaque cas particulier. Sa linéarité permet dans le cas de l'échauffement asymétrique du canal d'appliquer la méthode de superposition pour trouver des solutions par

sommation d'autres solutions en conservant les conditions aux limites. A titre de cas limite on peut envisager l'échange de chaleur sous l'écoulement laminaire entre des plaques parallèles; dans ce cas

$$\mathrm{Nu} = \frac{5{,}385}{1-0{,}346\,(q_1/q_2)}\,. \qquad \text{(VI.398)}$$

Pour l'échauffement d'une seule paroi $q_2 = 0$ et $\mathrm{Nu} = 5{,}385$. Lorsque les densités du flux thermique sont égales sur les deux plaques, $q_2/q_1 = 1$ et $\mathrm{Nu}_1 = \mathrm{Nu}_2 = 8{,}23$.

Les solutions de l'équation de l'énergie *pour les tubes de section rectangulaire et triangulaire* s'obtiennent par les mêmes méthodes que pour les tubes circulaires. L'équation différentielle de l'énergie de départ est alors un cas particulier de l'équation

$$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{w}{a}\,\frac{\partial t}{\partial x}\,.$$

La distribution de la vitesse se calcule en résolvant l'équation du mouvement

$$\mu\nabla^2 w = dp/dx.$$

Les formules de calcul définitives du nombre de Nüsselt pour des canaux de différente forme sont consignées sur les tableaux VI.12 et VI.13.

Tableau VI.12

Influence de la forme du canal sur la transmission de chaleur

Profil du canal	Diamètre équivalent	Domaine des nombres Pe $D_é/L$	Nombre Nu
Tube circulaire de diamètre D	$D_é = D$	> 12 < 12	$1{,}61\ (\mathrm{Pe}D_é/L)^{1/3}$ 3,66
Fente plane de largeur S	$D_é = 2S$	> 70 < 70	$1{,}85\ (\mathrm{Pe}D_é/L)^{1/3}$ 7,50
Triangle équilatéral de côté h	$D_é = 0{,}58h$	> 7 < 7	$1.5\ (\mathrm{Pe}D_é/h)^{1/3}$ 2,70

Echange de chaleur dans le tronçon de stabilisation compte tenu de la chaleur de frottement. Considérons l'écoulement laminaire établi dans une fente plane. Admettons que le milieu en mouvement est incompressible, et les constantes physiques sont indépendantes de la température.

Tableau VI.13

Influence de la forme du canal sur la transmission de chaleur dans le domaine de l'écoulement établi

Section du canal	Variation de la température de la paroi	Nombre Nu	Auteur du calcul
Tube circulaire de diamètre D	Permanente Varie linéairement	3,66 4,36	Gretz, Nüsselt, Ygl et Vergosson
Fente plane chauffée des deux côtés ($D_é = 2S$)	Permanente Varie linéairement	7,5 8,24	Haneman, Eret, Yansen
Fente plane chauffée d'un côté ($D_é = 2S$)	Permanente Varie linéairement	4,86 5,40	Elser, Yansen
Triangle équilatéral ($D_é = 0,58\ h$)	Permanente	3,1	Migaï
Triangle isocèle $\left(D_é = \dfrac{2h}{1+\sqrt{(2h/L)^2-1}}\right)$ à angle β au sommet, degrés	Permanente		
20		2,7	Migaï
40		3,0	
80		3,5	
90		3,7	
100		3,8	

Dans ces conditions l'équation totale de l'énergie pour l'écoulement plan établi est de la forme

$$\rho c_p \left(w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}\right) + \mu \,\mathrm{Diss}\, Fkt\,(w_y,\ w_x),$$

la direction de l'axe des x coïncidant avec la direction du courant, et de l'axe des y, normale aux parois de la fente.

Pour un écoulement établi on adopte $\partial\vartheta/\partial x = 0$ et $\partial^2\vartheta/\partial x^2 = 0$ dans tout le champ $w_y = 0$, ce qui fait disparaître également les dérivées $\partial w_x/\partial x$, $\partial w_y/\partial y$ et $\partial w_y/\partial x$, et simplifie la fonction dissipative jusqu'à l'expression $\mu\ (\partial w_x/\partial y)^2$. D'autre part, ici $w_x = w$; par conséquent, pour les conditions envisagées, l'équation de l'énergie se ramène à la forme

$$\lambda \partial^2\vartheta/\partial y^2 = -\mu\ (\partial w/\partial y)^2. \qquad \text{(VI.399)}$$

Pour la vitesse on adopte la distribution

$$w(y)=\frac{3}{2}\,\bar{w}\left(1-\frac{y^2}{S^2}\right), \qquad \text{(VI.400)}$$

où $2S$ est la largeur de la fente.

L'examen en commun des équations (VI.399) et (VI.400) amène

$$\lambda\,\frac{d^2\vartheta}{dy^2}=-9\,\frac{\mu\bar{w}^2}{S^4}\,y^2. \qquad \text{(VI.401)}$$

Si la température des parois de la fente est différente, les conditions aux limites de (VI.401) deviennent $\vartheta=\vartheta_1$ pour $y=-S$ et $\vartheta=\vartheta_2$ pour $y=S$.

La distribution de la température vérifie alors la loi

$$\vartheta(y)=\frac{1}{2}\,(\vartheta_1+\vartheta_2)-\frac{1}{2}\,(\vartheta_1-\vartheta_2)\,\frac{y}{S}+\frac{3}{4}\,\frac{\mu}{\lambda}\,\bar{w}\left(1-\frac{y^4}{S^4}\right). \qquad \text{(VI.402)}$$

Ici le dernier terme détermine la variation de la température conditionnée par la chaleur de frottement qui se superpose sur le phénomène propre de la conductivité thermique.

Le flux thermique sur les parois est $q=-\lambda\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\right)$, où n est la normale à la paroi, la direction positive étant considérée celle de la paroi vers le fluide.

Pour la paroi inférieure $\vartheta=\vartheta_1$ et

$$q_1=\lambda\,\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2S}+3\,\frac{\mu\bar{w}^2}{S}; \qquad \text{(VI.403)}$$

pour la paroi supérieure $\vartheta=\vartheta_2$ et

$$q_2=-\lambda\,\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2S}+3\,\frac{\mu\bar{w}^2}{S}. \qquad \text{(VI.404)}$$

Le flux thermique global à travers les deux parois

$$q=q_1+q_2=6\,\frac{\mu w^2}{S}. \qquad \text{(VI.405)}$$

Le flux de chaleur de la paroi chaude ϑ_2 à la paroi froide (ϑ_1) peut, sous l'action de la chaleur de frottement, être inversé près de la paroi chaude ($q_2 \geqslant 0$) de façon que celle-ci absorbe également la chaleur. Cet effet apparaît sous la condition

$$6\mu\bar{w}^2/\lambda \geqslant (\vartheta_2-\vartheta_1). \qquad \text{(VI.406)}$$

Dans le cas $q_2=0$ l'apport de la chaleur à la paroi inférieure q_1 devient double. Si la température des deux parois est la même ($\vartheta_1=\vartheta_2$), d'après la relation (VI.402) la distribution de la tempé-

rature s'établit suivant une parabole du quatrième degré. La température maximale sur l'axe du canal est définie par l'équation

$$\vartheta_{max} - \vartheta_2 = \frac{3}{4} \frac{\mu \overline{w}^2}{\lambda} \qquad \text{(VI.407)}$$

indépendamment de sa largeur. Si la paroi inférieure est calorifuge, les conditions aux limites de (VI.401) s'écrivent $\vartheta = \vartheta_2$ pour $y = + S$ et $d\vartheta/dy = 0$ pour $y = -S$. La solution devient alors

$$\vartheta(y) - \vartheta_2 = \frac{3}{4} \frac{\mu \overline{w}^2}{\lambda} \left(5 - 4 \frac{y}{S} - \frac{y^4}{S^4}\right). \qquad \text{(VI.408)}$$

Pour les conditions envisagées la figure VI.47 montre la distribution de la température suivant la hauteur de la fente.

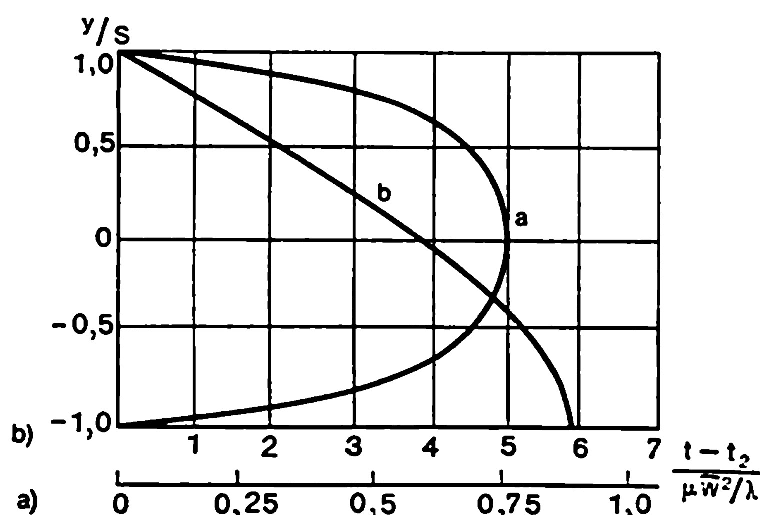


Fig. VI.47. Distribution de la température dans une fente plane compte tenu de la chaleur de frottement:
a — parois conductrices de chaleur; *b* — paroi inférieure calorifuge

La température de la paroi calorifuge (ce qu'on appelle température adiabatique de la paroi) se calcule d'après la formule

$$t_{ad} = t_{p2} + 6\mu \overline{w}^2/\lambda. \qquad \text{(VI.409)}$$

Echange de chaleur dans un tube circulaire sous l'action cumulée de la convection forcée et naturelle. Considérons l'écoulement établi du fluide dans un tube circulaire vertical sous une charge thermique constante suivant la longueur du tube (fig. VI.48). Admettons que les propriétés du fluide sont constantes. Admettons également que la variation de sa densité en fonction de la température est

linéaire et n'est prise en ligne de compte que dans l'équation du mouvement lors du calcul de la force ascensionnelle. Le mouvement du fluide dans le tube est assuré par la convection forcée et naturelle. Dans le système des coordonnées de la figure VI.48, le système d'équations initial est de la forme

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right); \quad \text{(VI.410)}$$

$$-\rho g - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_x}{\partial r} \right) = 0; \quad \text{(VI.411)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad \text{(VI.412)}$$

$$\rho = \rho_p [1 - \beta (t - t_p)]. \quad \text{(VI.413)}$$

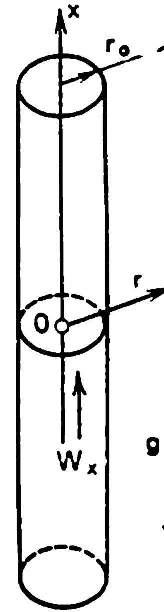


Fig. VI.48. Illustration du problème de l'échange de chaleur dans l'action commune des convections forcée et libre

Pour la région de la stabilisation thermique et hydrodynamique, on a

$$\partial t/\partial x = 2q_p/(\rho c_p \bar{w} r_0) = \text{const} = A. \quad \text{(VI.414)}$$

Transformons les équations de départ en tenant compte de (VI.413) et (VI.414)

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\vartheta}{dr} = \frac{A}{a} w_x; \quad \text{(VI.415)}$$

$$\beta g \vartheta - \frac{1}{\rho_p} \left(\frac{dp}{dx} + \rho_p g \right) + \nu \left(\frac{d^2 w_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_x}{dr} \right) = 0, \quad \text{(VI.416)}$$

où $\vartheta = t - t_p$; $\nu = \mu/\rho_p$.

Le problème se ramène à résoudre ces équations sous les conditions aux limites

$$\left.\begin{array}{llll} \text{pour } r = r_0 & \vartheta = 0 & w_x = 0; \\ \text{pour } r = 0 & \frac{d\vartheta}{dr} = 0 & \frac{dw_x}{dr} = 0. \end{array}\right\} \quad \text{(VI.417)}$$

La solution exacte du problème a été obtenue par G. Ostrooumov. La figure VI.49 représente la distribution des vitesses et des températures dans les conditions d'un écoulement ascensionnel dans un tube chauffé. Lorsque le nombre de Rayleigh est nul (Ra = Gr·Pr), le profil de la vitesse est parabolique. L'augmentation du nombre Ra

traduit la croissance de la vitesse près de la paroi et sa diminution au noyau du courant. Lorsque le nombre Ra = 630, la vitesse sur l'axe devient nulle et l'augmentation ultérieure de Ra témoigne de l'apparition d'un courant dirigé dans le sens opposé.

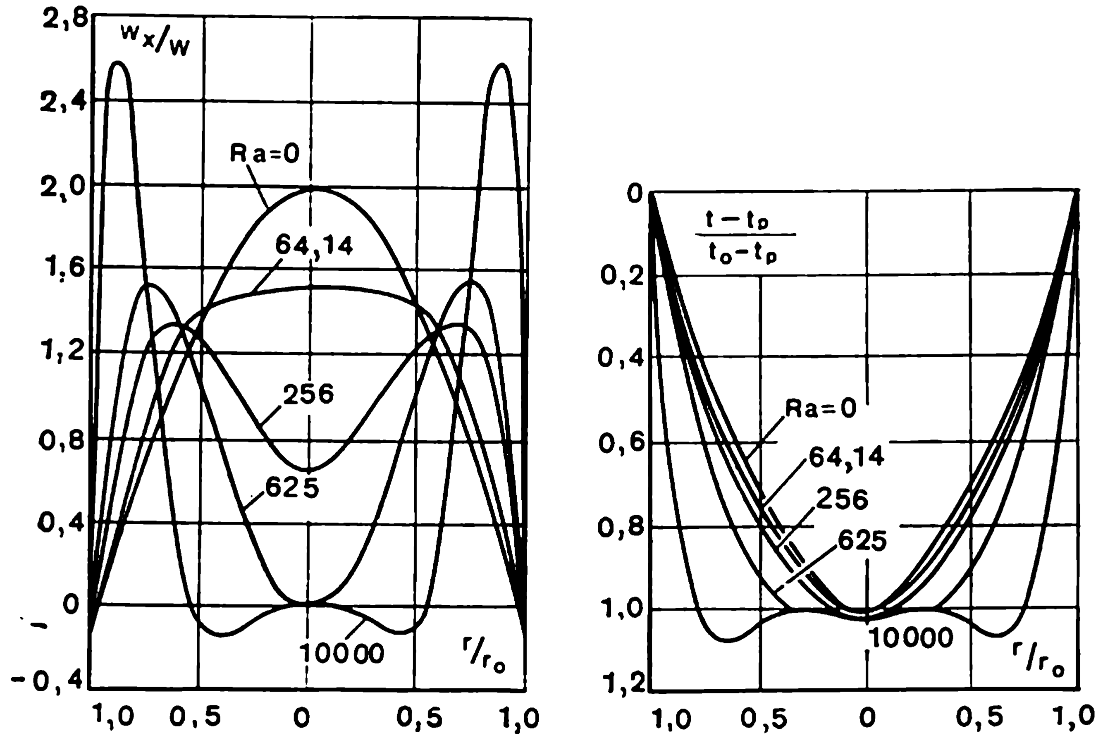


Fig. VI.49. Distribution de la vitesse et de la température suivant le rayon d'un tube pour de différents nombres de Rayleigh ($\partial t/\partial x > 0$)

La figure VI.50 visualise la variation du nombre de Nüsselt en fonction du nombre Ra. Avec Ra → 0, Nu → 4,36. Comme le montre la figure, les résultats du calcul théorique s'accordent bien avec les données expérimentales.

B. Pétoukhov et autres dans leur ouvrage [27] proposent l'équation suivante suggérée par le traitement des données expérimentales

$$\frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Nu}_0} = \left(1 + \frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{B}}\right)^{0,27}, \qquad \text{(VI.418)}$$

où Nu_0 est le Nüsselt pour le cas de l'écoulement visqueux à propriétés constantes

$$\mathrm{Ra} = \frac{g\beta d^4 A}{16 \nu a}; \quad A = \frac{d\bar{t}}{dX} = \frac{4q_p}{\rho c_p \bar{w} d};$$

$$B = \frac{1,35}{X} + 78X^{1/4}; \quad X < 0,07,$$

$$B = 60; \quad X \geqslant 0,07,$$

où $X = \frac{1}{\mathrm{Pe}}\frac{x}{d}$; $\mathrm{Pe} = \frac{\bar{w}d}{a}$.

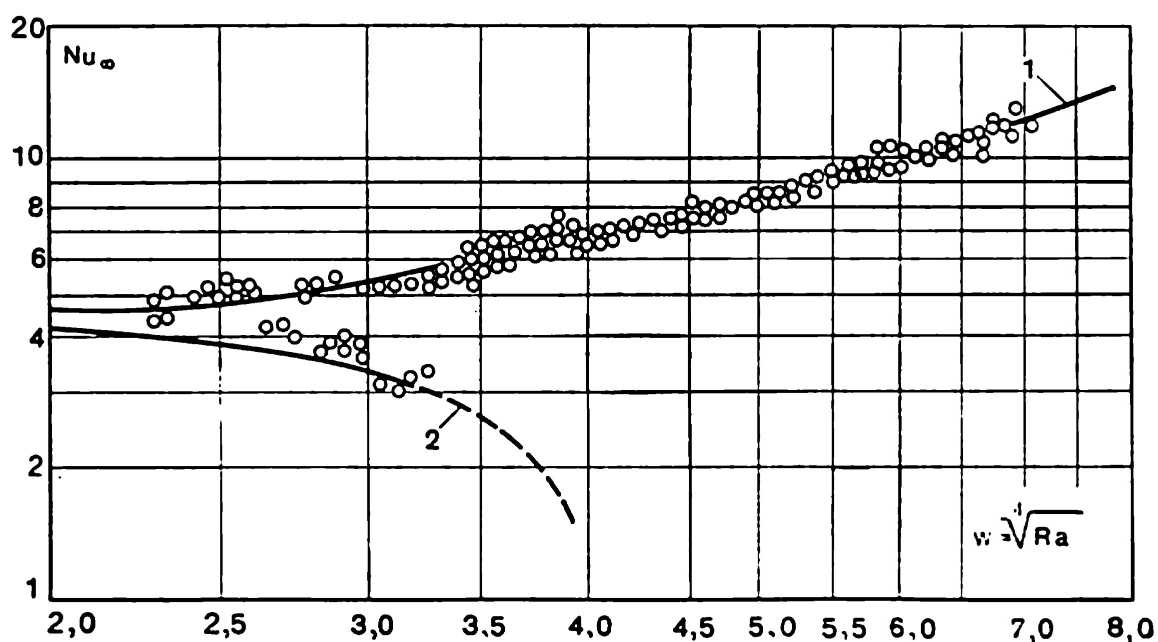


Fig. VI.50. Relation entre le nombre Nu et le nombre Ra dans l'action commune des convections libre et forcée [○ — expérience; ——— — calcul d'après la formule (VI.418)]:
1 — $\partial t/\partial x > 0$; *2* — $\partial t/\partial x < 0$

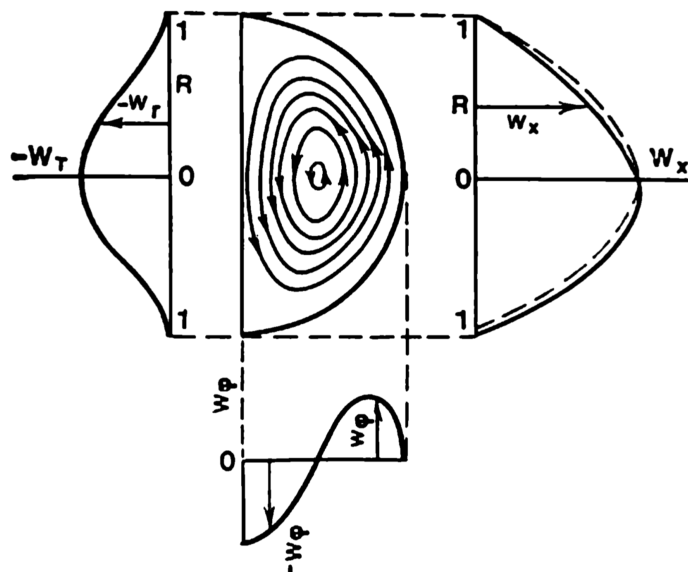


Fig. VI.51. Lignes de courant dans la section d'un tube horizontal dans l'action commune des convections libre et forcée

Tous les paramètres physiques du fluide sont choisis suivant la température de masse moyenne $\bar{t}$ dans la section du tube donnée. L'équation (VI.418) est vraie dans la région

$$250 < \mathrm{Ra} < 8\cdot 10^5;\ \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr};\ 3\cdot 10^4 < x < x_{dr},$$
$$4 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 6$$

lorsque pour q_p = const les convections forcée et libre coïncident. L'interaction des convections forcée et libre dans un fluide se déplaçant dans un tube horizontal produit un courant hélicoïdal complexe

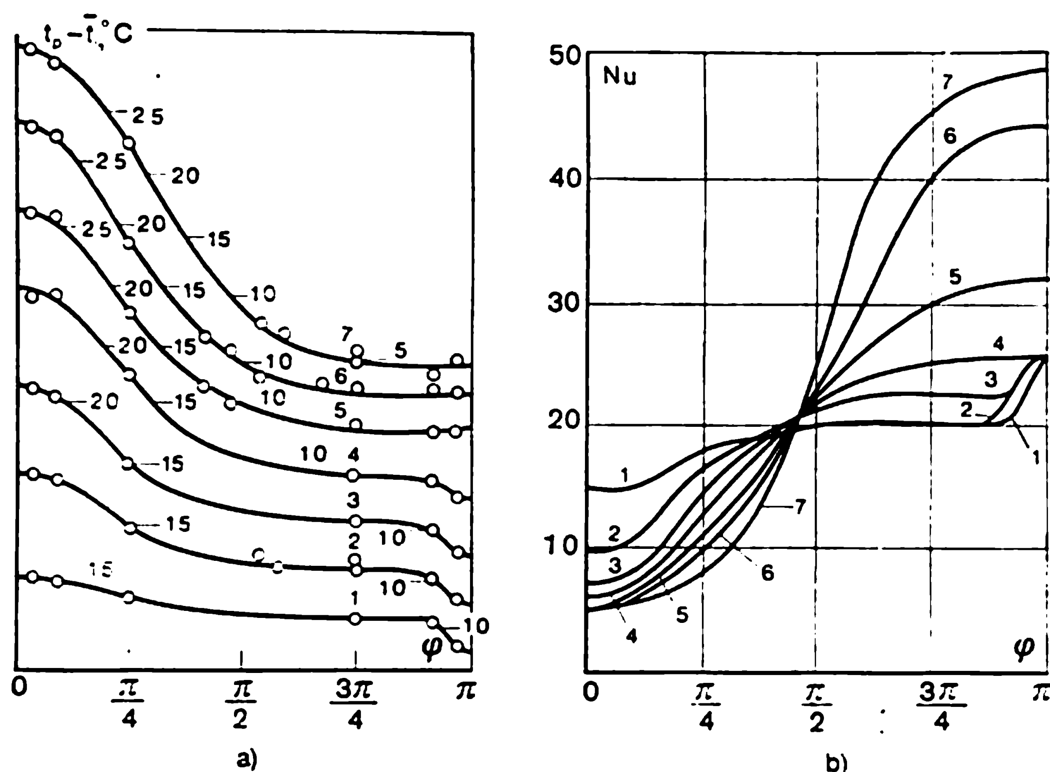


Fig. VI.52. Distribution de la température (a) et du nombre Nu local (b) suivant le périmètre du tube:

valeurs: $\frac{1}{\mathrm{Pe}}\cdot\frac{x}{d}\cdot 10^3$; 1 — 0,43; 2 — 0,75; 3 — 1,2; 4 — 2,3; 5 — 4; 6 — 6; 7 — 9,5

(fig. VI.51). La symétrie de la distribution des vitesses et des températures est alors compromise. Il s'ensuit que le Nüsselt varie non seulement suivant la longueur, mais aussi suivant la circonférence. La figure VI.52 fournit les données sur la distribution de la température de la paroi et du nombre de Nüsselt publiées par B. Pétoukhov et A. Poliakov [27]. Pour la région de l'écoulement établi (avec

$X > 1{,}7\cdot10^{-3}$) et des valeurs de Nüsselt moyennes suivant le périmètre, ces auteurs proposent la formule

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 4{,}36\left[1+\left(\frac{\mathrm{Ra}}{1{,}8\cdot10^{4}}\right)^{4}\right]^{0{,}045}, \qquad \text{(VI.419)}$$

où $\mathrm{Ra} = \frac{g\beta q_p d^4}{\nu a\lambda}$.

2. Echange de chaleur dans la condensation en film d'une vapeur fixe lors de l'écoulement laminaire du film sur une plaque verticale

Avec $\mathrm{Re} > 2000$ l'écoulement laminaire d'un fluide dans un tube devient instable et turbulent. L'intensité des transferts de l'impulsion, de la chaleur et de la masse suivant le rayon du tube croît sensiblement. C'est pourquoi dans les calculs d'échange de chaleur et de masse, lorsqu'il s'agit de l'écoulement d'un fluide dans des tubes, il faut en premier lieu déterminer le régime.

En considérant les forces appliquées à un cylindre élémentaire de rayon R sous l'action de l'écoulement stabilisé du fluide dans la région du courant établi, on obtient à partir de la condition de leur équilibre

$$-\pi R^2\, dp/dx = 2\pi R\tau. \qquad \text{(VI.420)}$$

On en tire que la contrainte tangentielle appliquée à la paroi du tube vaut

$$\tau_p = -\frac{R_0}{2}\frac{dp}{dx} = \xi\rho\frac{\overline{w}^2}{8}, \qquad \text{(VI.421)}$$

où ξ est le coefficient de résistance sans dimensions défini par la relation

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{\xi}{D}\rho\frac{\overline{w}^2}{2}. \qquad \text{(VI.422)}$$

Les premières données expérimentales sur les coefficients de résistance, pour l'écoulement d'un fluide dans des tubes lisses ont été obtenues par Blasius et généralisées par la formule empirique

$$\xi = 0{,}3164\,(\mathrm{Re}_D)^{-1/4}. \qquad \text{(VI.423)}$$

La figure VI.53 montre que cette formule est valide jusqu'à $\mathrm{Re}_D < 10^5$, alors que pour des valeurs plus grandes de Re_D les données d'expérience s'écartent sensiblement de la formule de Blasius. D'après les expériences, pour un écoulement turbulent, la distribution des vitesses suivant le rayon du tube est assez bien décrite par la relation exponentielle

$$\frac{w}{w_0} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/n}, \qquad \text{(VI.424)}$$

où y est la distance de la paroi; $y = r_0 - r$. L'exposant n dépend du nombre Re_D et augmente avec l'augmentation de Reynolds. Pour $\mathrm{Re}_D = 10^5$, $n = 1/7$. Lorsque la distribution des vitesses est exponentielle (VI.425), la formule de la vitesse du débit s'écrit

$$\frac{\overline{w}}{w_0} = 2\int_0^1 \frac{w}{w_0} R\,dR = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}.$$

La figure VI.54 montre la relation entre $\overline{w}/w_0$ et le nombre de Reynolds. Comme le montre la courbe, avec la croissance de Re_D, le

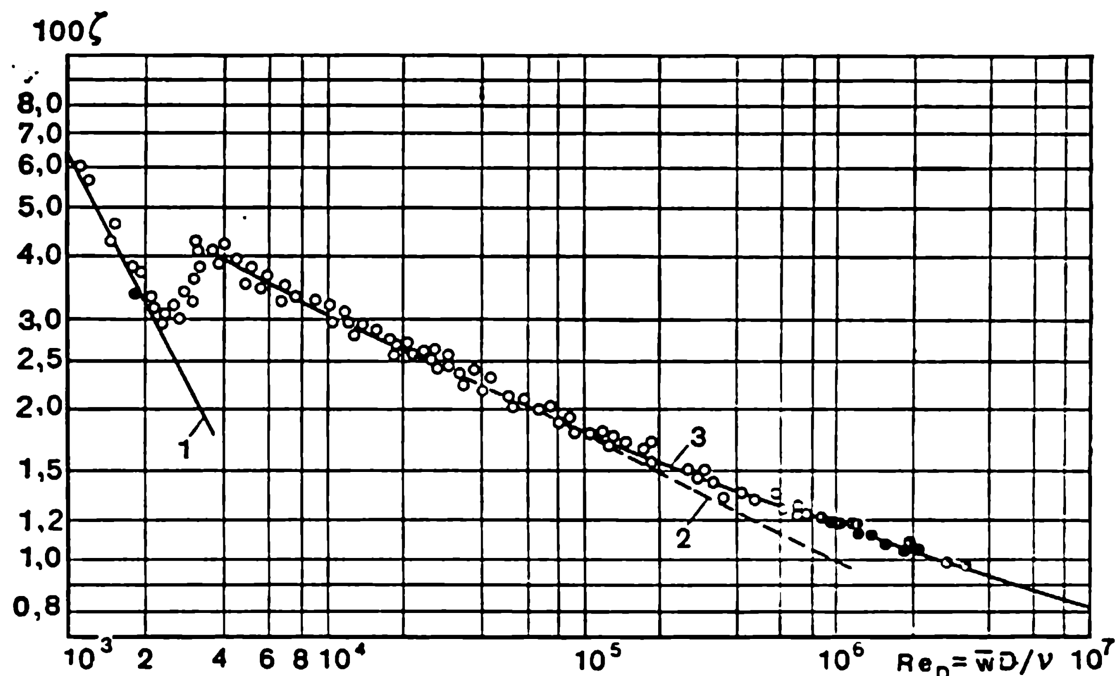


Fig. VI.53. Loi de la résistance pour l'écoulement dans un tube lisse: 1 — écoulement laminaire (VI.333); 2 — écoulement turbulent (VI.423); 3 — écoulement turbulent (VI.433)

profil des vitesses devient de plus en plus compact et avec $\mathrm{Re}_D = 10^8$, $\overline{w}/w_0 = 0{,}9$.

On peut montrer que la loi de résistance de Blasius (VI.423) correspond à la distribution exponentielle des vitesses avec $n = 1/7$. En portant dans la formule (VI.421) la valeur de ξ tirée de la formule (VI.423), on obtient

$$\tau_p = 0{,}03325\rho\overline{w}^{7/4}x^{1/4}r^{-1/4}. \qquad \text{(VI.425)}$$

En introduisant la vitesse de frottement $v_* = \sqrt{\tau_p/\rho}$ et en adoptant $\overline{w}/w_0 = 0{,}8$, ce qui correspond à $\mathrm{Re}_D = 10^5$ et $n = 7$, on obtient

$$w_0/v_* = 8{,}74\,(yv_*/\nu)^{1/7}. \qquad \text{(VI.426)}$$

La relation (VI.426) doit être justifiée pour une distance quelconque de la paroi. Il vient, alors, que

$$w/v_* = 8{,}74\ (yv_*/\nu)^{1/7} \qquad \text{(VI.427)}$$

est précisément la loi exponentielle de la distribution des vitesses.

Avec les variables φ et η cette loi devient

$$\varphi = 8{,}74\eta^{1/7}. \qquad \text{(VI.428)}$$

Un résultat analogue a été obtenu par l'analyse de la couche turbulente sur une plaque plane.

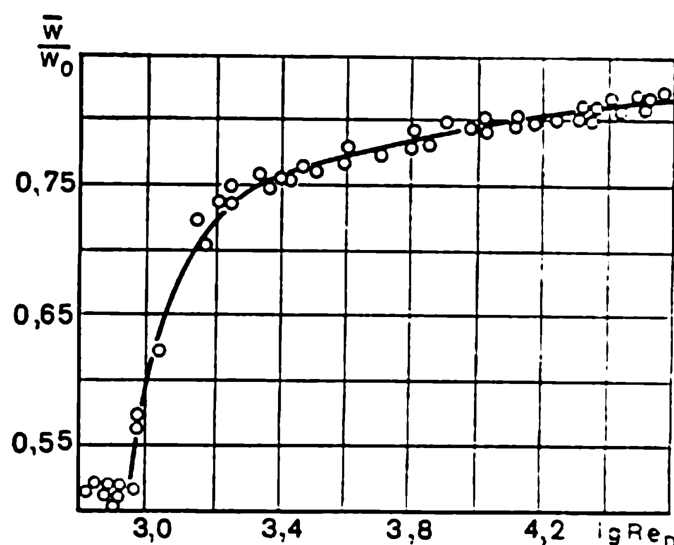


Fig. VI.54. Rapport entre w/w_0 et Re_D:
O — expérience; ———— — calcul d'après la formule (VI.424)

La formule (VI.428) généralisée aux nombres de Reynolds quelconques est de la forme

$$\varphi = C(n)\left(\frac{yv_*}{\nu}\right)^{1/n}, \qquad \text{(VI.429)}$$

où le coefficient C dépend de n:

n	7	8	9	10
C	8,74	9,71	10,6	11,5

La loi universelle de la distribution des vitesses lors de l'écoulement turbulent du fluide dans un tube peut s'obtenir en appliquant la théorie semi-empirique de Prandtl. Comme on l'a montré au § VI.3, cette loi est de la forme

$$\varphi = 2{,}5 \ln y + 5{,}5. \qquad \text{(VI.430)}$$

La vitesse moyenne de l'écoulement turbulent d'un fluide est déterminée par la formule

$$\bar{w} = \frac{v_*}{\pi R_0^2} \int_0^{R_0 - y} 2\pi R \left[5,5 + 2,5 \ln \frac{v_*}{\gamma} (R_0 - R) \right] dR =$$

$$= v^* \left(1,74 + 2,5 \ln \frac{v_*^2 R_0}{\nu} \right). \quad \text{(VI.431)}$$

En tenant compte que

$$v_* = \sqrt{\tau_p/\rho} = \bar{w}\sqrt{\xi/8}, \quad \text{(VI.432)}$$

on obtient pour ce cas la loi de résistance logarithmique

$$1/\sqrt{\xi} = 2 \lg (\mathrm{Re}\sqrt{\xi}) - 0,8. \quad \text{(VI.433)}$$

La figure VI.53 rend évident que cette loi correspond assez bien aux données expérimentales dans toute la marge des variations du nombre de Reynolds.

Tant que l'épaisseur de la sous-couche visqueuse reste plus grande que les aspérités de la surface, la résistance hydraulique des tubes rugueux s'avère pratiquement la même que celle des tubes lisses ; mais lorsqu'elles sont commensurables, dans la sous-couche apparaissent des perturbations susceptibles de la détruire. Dans ce cas les contraintes tangentielles turbulentes sont transmises à la paroi du tube à l'aide des contraintes de pression sur les aspérités, et le coefficient de résistance cesse de dépendre du nombre de Reynolds.

La figure VI.55 fournit les données sur les coefficients de résistance hydraulique lors de l'écoulement du fluide dans des tubes d'acier industriels.

Pour le calcul de l'échange de chaleur par convection lors de l'écoulement d'un fluide dans des tubes, il faut connaître la distribution des vitesses suivant le rayon du tube.

La figure VI.56 compare les profils des vitesses logarithmiques (VI.430) avec les données expérimentales.

Les courbes montrent que près de la paroi le profil linéaire est valide; avec les variables universelles ce profil est de la forme

$$\varphi = \eta. \quad \text{(VI.434)}$$

Pour des $\eta > 30$ le profil logarithmique (VI.430) est assez bien justifié. Dans le domaine intermédiaire ($5 < \eta < 30$), les points expérimentaux sont assez bien généralisés par la relation

$$\varphi = 5 \ln \eta - 3,05. \quad \text{(VI.435)}$$

Le calcul de l'échange de chaleur en recourant aux relations (VI.434), (VI.435) et (VI.430) donne des résultats satisfaisants pour le domaine $\mathrm{Pr} < 20$. Pour les valeurs du nombre de Prandtl plus gran-

des, le schéma du courant à trois couches ne satisfait déjà plus et il faut appliquer des profils des vitesses plus compliquées, par exemple

$$\varphi = 2{,}5 \ln \left[(1 + 0{,}4\eta) \frac{1{,}5\,(1+R)}{1+2R^2} \right] + \\ + 7{,}8 \left[1 - \exp\left(-\frac{\eta}{11} \right) - \frac{\eta}{11} \exp(-0{,}33\eta) \right], \quad \text{(VI.436)}$$

où $R = r/r_0$.

La formule de Reichardt (VI.436) décrit par une relation unique tout le profil de la vitesse depuis la paroi jusqu'à l'axe du courant.

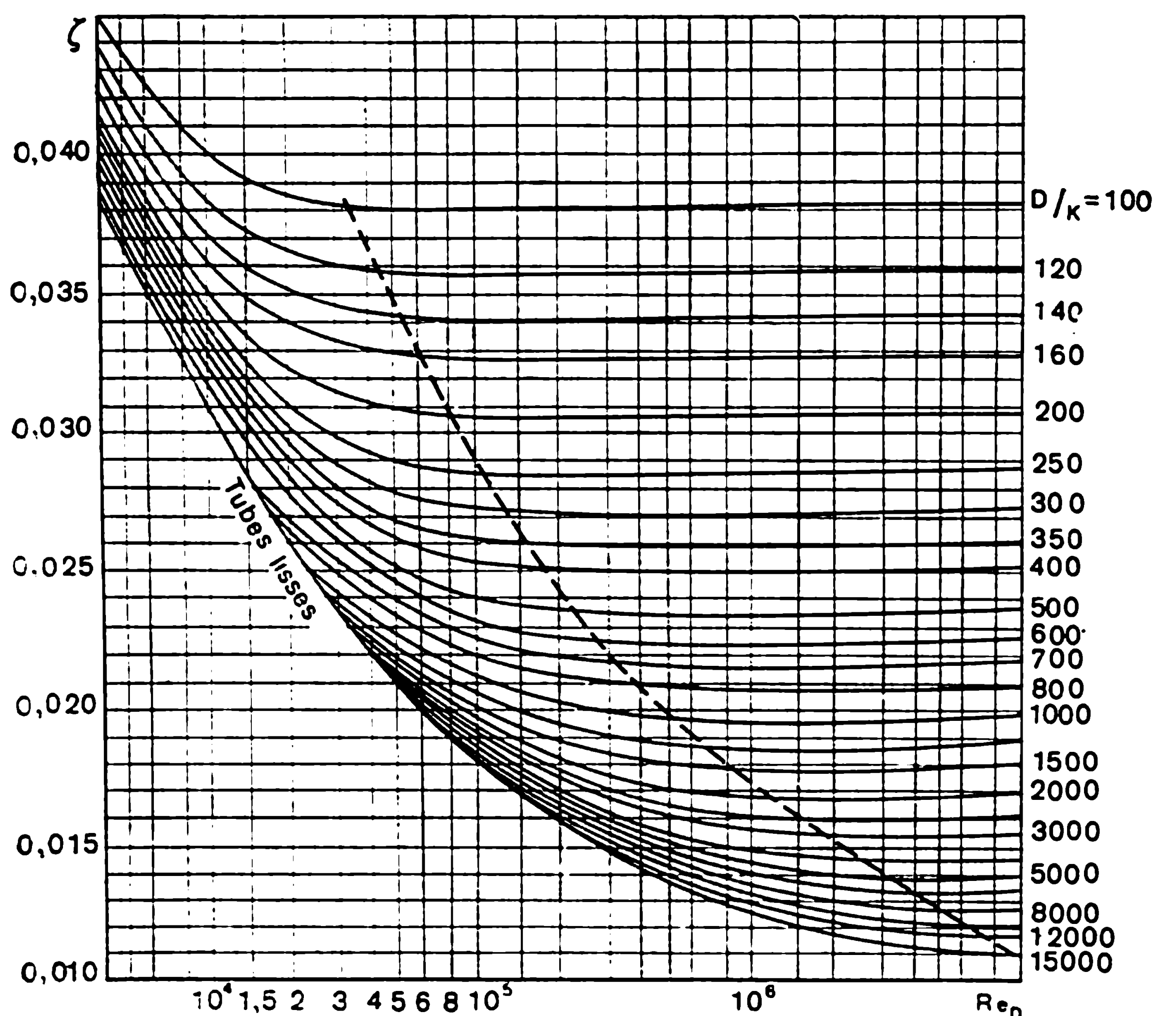


Fig. VI.55. Coefficient de la résistance des tubes d'acier techniques

Echange de chaleur par convection dans un fluide se déplaçant par écoulement turbulent établi dans un tube circulaire. Envisageons le problème sous les conditions suivantes: 1) la densité du flux thermique est constante suivant la longueur du tube (q_p = const);

2) l'écoulement et l'échange de chaleur sont quasi-stationnaires, c'est-à-dire les paramètres moyennés ne changent pas dans le temps; 3) le liquide est incompressible et ses propriétés physiques sont constantes; 4) le courant est stabilisé hydrauliquement, c'est-à-dire $w_x = f(R)$; $w_r = 0$ et les couches limites thermiques se rejoignent; 5) la variation de la densité du flux thermique le long de l'axe est

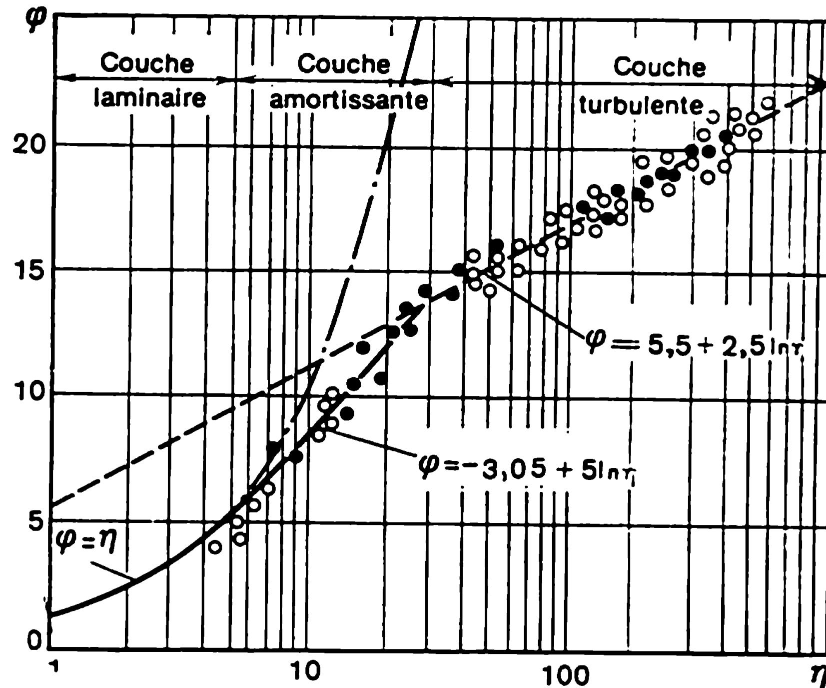


Fig. VI.56. Distribution de la vitesse dans l'écoulement turbulent d'un liquide dans un tube

négligeable par rapport à sa variation suivant le rayon; 6) les sources de chaleur internes sont absentes ($q_V = 0$), et l'émission de chaleur provoquée par la dissipation de l'énergie cinématique est négligeable.

Pour les conditions données, l'équation de l'énergie est de la forme

$$\rho c_p w_x \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rq), \qquad \text{(VI.437)}$$

où

$$q = \rho c_p (a + \varepsilon_q) \partial T/\partial r. \qquad \text{(VI.438)}$$

La variation de la température de masse moyenne du fluide suivant la longueur du tube se calcule à partir de l'équation du bilan thermique

$$\bar{T} = T_0 + \frac{2q_p}{\rho c_p r_0 \bar{w}} x,$$

d'où

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = \frac{2q_p}{\rho c_p r_0 \bar{w}}. \qquad \text{(VI.439)}$$

Cherchons la solution de l'équation (VI.437) sous la forme

$$T(x_1 R) = T_1(x) + T_2(R). \qquad \text{(VI.440)}$$

En portant (VI.440) dans l'équation (VI.437), on obtient

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{1}{w_x}\left\{\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left[R(a+\varepsilon_q)\frac{\partial T_2}{\partial R}\right]\right\},$$

le premier membre de cette équation dépend seulement de x, et le deuxième membre, seulement de R, ce qui n'est possible que dans le cas où

$$\partial T_1/\partial x = \partial T/\partial x = \text{const.}$$

Conformément à (VI.439), on a

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial T_p}{\partial x} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{2q_p}{\rho c_p \rho \bar{w} r_0}. \qquad \text{(VI.441)}$$

De la sorte, lorsque l'échange de chaleur est stabilisé et q_p = const, à toute distance de la paroi, y compris sur la paroi, la température change linéairement. En portant $\partial T/\partial x$ de (VI.441) dans (VI.437), on obtient une équation différentielle ordinaire

$$2\frac{w_x}{\bar{w}} R = \frac{d}{dR}\left(R\frac{q}{q_p}\right). \qquad \text{(VI.442)}$$

L'intégration de cette équation sous la condition $q = 0$, lorsque $R = 0$, permet d'établir

$$\frac{q}{q_p} = \frac{2}{R}\int_0^R \frac{w_x}{\bar{w}} R\,dR. \qquad \text{(VI.443)}$$

Compte tenu de l'équation (VI.438), on a

$$\frac{\partial T}{\partial R} = \frac{q_p D}{\lambda}\,\frac{\int_0^R (w_x/\bar{w}) R\,dR}{(1+\varepsilon_q/a) R}. \qquad \text{(VI.444)}$$

En intégrant cette expression de 1 à R, on obtient

$$T_p - T = \frac{q_p D}{\lambda} \int_R^1 \frac{\int_0^R (w_x/\bar{w})\, R\, dR}{\left(1+\frac{\Pr}{\Pr_t}\frac{\varepsilon}{\nu}\right) R}\, dR, \qquad \text{(VI.445)}$$

où $\frac{\varepsilon_q}{a} \frac{\Pr}{\Pr_t} \frac{\varepsilon}{\nu}$ et $\Pr_t = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_q}$ est le nombre de turbulence de Prandtl.

Calculons le coefficient de transmission de chaleur d'après la formule

$$\alpha = q_p/(T_p - \bar{T}).$$

Par définition,

$$T_p - \bar{T} = 2 \int_0^1 (T_p - T) \frac{w_x}{\bar{w}} R\, dR\,; \qquad \text{(VI.446)}$$

en portant dans cette équation $T_p - T$ de (VI.445), on obtient

$$T_p - \bar{T} = \frac{2 q_p D}{\lambda} \int_0^1 u\, d\Omega, \qquad \text{(VI.447)}$$

où

$$u = \int_R^1 \frac{\int_0^R (w_x/\bar{w})\, R\, dR}{\left(1+\frac{\Pr}{\Pr_t}\frac{\varepsilon}{\nu}\right) R}\,; \quad d\Omega = \left(\frac{w_x}{\bar{w}}\right) R\, dR\,; \quad \Omega = \int_0^R \frac{w_x}{\bar{w}} R\, dR.$$

Intégrons par parties l'équation (VI.447) pour obtenir

$$T_p - \bar{T} = \frac{2 q_p D}{\lambda} \left\{ [u\Omega]_0^1 - \int_0^1 \Omega\, du \right\},$$

ou

$$T_p - \bar{T} = \frac{2 q_p D}{\lambda} \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R (w_x/\bar{w})\, R\, dR\right)^2}{\left(1+\frac{\Pr}{\Pr_t}\frac{\varepsilon}{\nu}\right) R}\, dR, \qquad \text{(VI.448)}$$

d'où

$$\frac{1}{\mathrm{Nu}} = 2 \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R (w_x/\bar{w})\, R\, dR\right)^2}{\left(1+\frac{\Pr}{\Pr_t}\frac{\varepsilon}{\nu}\right) R}\, dR. \qquad \text{(VI.449)}$$

L'équation (VI.449) porte le nom d'*intégrale de Lyon.*

Dans la partie principale du courant turbulent le profil des vitesses est sensiblement rempli, et en première approximation on peut adopter $w_x/\bar{w} = 1$. Alors,

$$\mathrm{Nu} \cong 2 \Big/ \int_0^1 \frac{R^3\, dR}{\left(1+\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_t}\frac{\varepsilon}{\nu}\right)}. \qquad (\mathrm{VI}.450)$$

Utilisons cette formule pour le calcul du transfert de chaleur lors de l'écoulement du fluide à grands nombres Pr. Comme le montrent les expériences, pour les milieux à $\mathrm{Pr} \gg 1$, près de la paroi, où la variation de la température est la plus brutale, le nombre de turbulence $\mathrm{Pr}_t \cong 1$. Dans ce cas le courant de fluide dans le tube peut être divisé par convention en trois régions: *noyau turbulent*, où le frottement est défini seulement par le brassage turbulent; la *couche intermédiaire*, où les frottements moléculaire et turbulent sont commensurables; la *couche visqueuse*, où le frottement moléculaire est dominant. Les données expérimentales montrent que l'épaisseur de la couche visqueuse est faible et on peut admettre dans ses limites que $\xi^3 = 1$. La couche intermédiaire n'est que de peu plus épaisse que la couche visqueuse.

Ainsi, pour $\mathrm{Pr} \gg 1$, la formule (VI.450) entraîne

$$\mathrm{Nu} \cong 2\left[\int_0^{\xi_2} \frac{\xi^3\, d\xi}{\mathrm{Pr}\,\mu_t/\mu} + \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3\, d\xi}{1+\mathrm{Pr}\,\mu_t/\mu} + \int_{\xi_1}^{1} \frac{d\xi}{1+\mathrm{Pr}\,\mu_t/\mu}\right]^{-1}. \qquad (\mathrm{VI}.451)$$

Voici les relations de calcul pour chacune des trois régions envisagées:

1) pour le noyau turbulent:

$$0 \leqslant \xi \leqslant \xi_2; \quad \mu_t \gg \mu; \quad w = v_*\left(C_* + \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v_* y}{\nu}\right);$$

$$\tau = \tau_t = \tau_p\left(1 - \frac{y}{R_0}\right) = \tau_p \xi; \quad \mu_t = \frac{\tau_t}{dw/dy} = \rho\varkappa v_* y \xi$$

et compte tenu de (VI.432)

$$\frac{\mu_t}{\mu} = \varkappa\, \mathrm{Re}\sqrt{\frac{\zeta}{32}}(1-\xi)\,\xi;$$

2) pour la couche intermédiaire

$$\xi_2 \leqslant \xi \leqslant \xi_1; \quad w = v_*\left(C'_* + \frac{1}{\varkappa'}\ln\frac{\vartheta^* y}{\nu}\right);$$

$$\tau = \tau_t + \mu\frac{dw}{dy} = \tau_p \xi \approx \tau_p; \quad \mu_t = \frac{\tau}{dw/dy} - \mu \approx \rho\varkappa v_* y - \mu:$$

$$\frac{\mu_t}{\mu} \cong \varkappa'\, Re\sqrt{\frac{\zeta}{32}};$$

3) pour la couche visqueuse

$$\xi_1 \leqslant \xi \leqslant 1; \quad \mu_t \leqslant \mu; \quad w = \frac{v_*^2}{\nu} y.$$

Calculons chaque intégrale de l'équation (VI.451) en retenant que $\eta = \mathrm{Re}\sqrt{\zeta/32}\,(1-\xi)$:

$$\int_0^{\xi_2} \frac{\xi^3\,d\xi}{\mathrm{Pr}\,\mu_t/\mu} = \int_0^{\xi_2} \frac{\xi^3\,d\xi}{\mathrm{Pr}\,\varkappa\,\mathrm{Re}\sqrt{\zeta/32}\,(1-\xi)} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\varkappa\,\mathrm{Re}\sqrt{\zeta/32}} \times$$

$$\times \left[\ln\frac{\mathrm{Re}}{\eta^2}\sqrt{\frac{\zeta}{32}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\eta}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\zeta}}\right)^2 - 1 + \frac{\eta_2}{\mathrm{Re}}\sqrt{\frac{32}{\zeta}}\right].$$

Avec $\mathrm{Re} > 10^4$ à 2 % près

$$\int_0^{\xi_2} \frac{\xi^3\,d\xi}{\mathrm{Pr}\,\mu_t/\mu} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\varkappa\,\mathrm{Re}\sqrt{\zeta/32}}\left(\ln\frac{\mathrm{Re}}{\eta_2}\sqrt{\frac{\zeta}{32}} - \frac{3}{2}\right). \qquad \text{(VI.452)}$$

Ensuite,

$$\int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3\,d\xi}{1+\mathrm{Pr}\,\mu_t/\mu} = \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3\,d\xi}{\mathrm{Pr}\,\varkappa'\,\mathrm{Re}\sqrt{\zeta/32}\,(1-\xi)-(\mathrm{Pr}-1)} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\varkappa'\sqrt{\zeta/32}}\left[z^3\ln\frac{1+\mathrm{Pr}\,(\varkappa'\eta_2-1)}{1+\mathrm{Pr}\,(\varkappa'\eta_1-1)} + \frac{\eta_2-\eta_1}{\mathrm{Re}\sqrt{\zeta/32}}\,(1-z+z^2)\right],$$

où $z = 1 - \dfrac{\mathrm{Pr}-1}{\mathrm{Pr}\,\varkappa'\,\mathrm{Re}\sqrt{\zeta/32}}$.

Pour $\mathrm{Re} > 10^4$ à 1 % près

$$\int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{\xi^3\,d\xi}{1+\mathrm{Pr}\,\mu_t/\mu} = \frac{1}{\mathrm{Pr}\,\varkappa'\,\mathrm{Re}\sqrt{\zeta/32}}\ln\frac{1+\mathrm{Pr}\,(\varkappa'\eta_2-1)}{1+\mathrm{Pr}\,(\varkappa'\eta_1-1)}. \qquad \text{(VI.453)}$$

En adoptant $\eta_2 = 30$ et $\eta_1 = 6$, on trouve que $\varkappa' = 0{,}20$.

En portant les valeurs des intégrales dans (VI.451), on obtient

$$\mathrm{Nu} = \frac{\zeta}{8}\,\mathrm{Re}\,f(\mathrm{Pr},\ \mathrm{Re}), \qquad \text{(VI.454)}$$

où

$f(\mathrm{Pr\,Re}) =$

$$= \frac{\varkappa\sqrt{8/\zeta}\,\mathrm{Pr}}{\ln\dfrac{\mathrm{Re}}{4{,}5\eta_2}\sqrt{\dfrac{\zeta}{32}} + \dfrac{\varkappa}{\varkappa'}\ln\dfrac{1+\mathrm{Pr}\,(\varkappa'\eta_2-1)}{1+\mathrm{Pr}\,(\varkappa'\eta_1-1)} - \varkappa\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}\sqrt{\dfrac{\zeta}{32}}\displaystyle\int_{\xi_1}^{1}\dfrac{d\xi}{1+\mathrm{Pr}\,\mu_t/\mu}}.$$

Avec $\Pr \cong 1$,

$$\int_{\xi_1}^{1} \frac{d\xi}{1+\Pr \mu_t/\mu} \cong 1-\xi_1 = \frac{\eta_1}{\mathrm{Re}} \sqrt{\frac{32}{\zeta}} \qquad \text{(VI.455)}$$

et après le remplacement des $\varkappa$, $\varkappa'$, η_1 et η_2 par leurs valeurs numériques, il vient

$$f(\Pr, \mathrm{Re}) = \frac{0{,}4 \Pr \sqrt{8/\zeta}}{\ln \frac{\mathrm{Re}}{270} \sqrt{\frac{\zeta}{8}} + 2 \ln \frac{1+5\Pr}{1+0{,}2\Pr} + 2{,}4\Pr}. \qquad \text{(VI.456)}$$

Pour les milieux à $\Pr = 1$, $f(\Pr, \mathrm{Re}) = 1$. Les valeurs de $f(\Pr, \mathrm{Re})$ de certains cas sont consignées sur le tableau VI.14. En admettant

Tableau VI.14

Influence des nombres de Prandtl et de Reynolds sur l'échange de chaleur

Pr	f (Pr, Re)	
	Re = 10^4	Re = 10^5
1	0,99	0,995
2	1,33	1,63
5	1,78	1,78
10	2,10	3,10

que dans la sous-couche visqueuse $\mu_t \cong \beta v_* \rho y^4/y_0^3$, on obtient

$$\int_{\xi_1}^{1} \frac{d\xi}{1+\Pr \mu_t/\mu} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \sqrt{\frac{32}{\zeta}} \int_0^{\eta_1} d\eta/(1+\Pr \beta/\eta_1^3\eta^4) =$$

$$= \frac{\alpha}{\mathrm{Re}\sqrt{\zeta}} \left(\ln \frac{\eta_1^2+\alpha\eta_1\sqrt{2}+\alpha^2}{\eta_1^2-\alpha\eta_1\sqrt{2}+\alpha^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha\eta_1\sqrt{2}}{\alpha^2-\eta_1^2} \right), \qquad \text{(VI.457)}$$

où $\alpha = \sqrt[4]{\eta_1^3/(\beta \Pr)}$.

Portons cette expression dans (VI.456) pour obtenir

$$f(\Pr \mathrm{Re}) = \frac{\varkappa \Pr \sqrt{8/\zeta}}{\ln \frac{\mathrm{Re}}{4{,}5\eta_2} \sqrt{\frac{\zeta}{32}} + \frac{\varkappa}{\varkappa'} \ln \frac{1+\Pr(\varkappa'\eta_2-1)}{1+\Pr(\varkappa'\eta_1-1)} + \varkappa\eta_1 \Pr \varphi(\Pr)},$$

puis introduisons les valeurs numériques de $\varkappa$, $\varkappa'$, η_1 et η_2:

$$Nu = \frac{0{,}14 \sqrt{\zeta}\, Pr Re}{\ln \frac{Re \sqrt{\zeta}}{760} + 2 \ln \frac{1+5\, Pr}{1+0{,}2\, Pr} + 2{,}4\, Pr\, \varphi(Pr)}, \qquad (VI.458)$$

où

$$\varphi(Pr) = 4 \frac{1}{\sqrt{1024 \beta \eta_1 Pr}} \left(\ln \frac{\eta_1^2 + \alpha \eta_1 \sqrt{2} + \alpha^2}{\eta_1^2 - \alpha \eta_1 \sqrt{2} + \alpha^2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha \eta_1 \sqrt{2}}{\alpha^2 - \eta_1^2} \right). \qquad (VI.459)$$

Lorsque les valeurs de Pr sont modérées, la conductivité thermique turbulente dans la couche intermédiaire est relativement peu grande, et on peut utiliser le schéma du courant turbulent à deux couches. Pour ce cas, avec $\eta_1 = 11{,}6 = \eta_2$ et $\varphi(Pr) = 1$,

$$Nu = \frac{0{,}14 \sqrt{\zeta}\, Pr\, Re}{\ln Re \sqrt{\zeta}/290 + 4{,}6\, Pr}. \qquad (VI.460)$$

Cette formule peut être utilisée pour les gaz et les liquides non métalliques avec $Pr < 5$.

Pour $Pr \to \infty$

$$Nu \to \frac{Re}{\eta_1 \varphi(Pr)} \sqrt{\frac{\zeta}{8}}; \quad \alpha \to 0;$$

$$\varphi(Pr) \to 2\pi (1024 \beta \eta_1 Pr)^{-1/4}, \qquad (VI.461)$$

c'est-à-dire

$$\beta = 0{,}03 \text{ et } \eta = 6, \; Nu = 0{,}035\, Pr^{1/4}\, Re \sqrt{\zeta}. \qquad (VI.462)$$

La formule (VI.462) peut être utilisée pratiquement avec $Pr > 100$. En tenant compte de la relation (VI.433)

$$\ln (Re \sqrt{\zeta}) = 1{,}13/\sqrt{\zeta} + 1$$

la formule (VI.458) peut être mise sous la forme

$$Nu = \frac{\zeta\, Pr\, Re}{40 \sqrt{\zeta} [f(Pr) - 1] + 8}, \qquad (VI.463)$$

où

$$f(Pr) = 0{,}356 \ln \frac{1+5\, Pr}{1+0{,}2\, Pr} + 0{,}426\, Pr\, \varphi(Pr), \qquad (VI.464)$$

de plus, $f(1) = 1$.

Si dans la formule (VI.449) on utilise le profil des vitesses dans le sens de Reichardt (VI.335), comme l'ont fait B. Pétoukhov et

V. Kirillov [27], les résultats des calculs se prêtent assez bien à la génération par les formules

pour $0,7 < \mathrm{Pr} < 200$

$$\mathrm{Nu} = \frac{\zeta\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}}{36\sqrt{\xi}\,(\mathrm{Pr}^{2/3}-1)+8,5}\,; \qquad \text{(VI.465)}$$

pour $0,5 < \mathrm{Pr} < 200$

$$\mathrm{Nu} = \frac{0,023\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^{0,8}}{1+2,14\,\mathrm{Re}^{-0,1}\,(\mathrm{Pr}^{2/3}-1)}\,. \qquad \text{(VI.466)}$$

Dans le domaine $0,5 < \mathrm{Pr} < 2,5$ la formule

$$\mathrm{Nu} = 0,023\,\mathrm{Pr}^{0,4}\,\mathrm{Re}^{0,8} \qquad \text{(VI.467)}$$

donne des résultats satisfaisants.

La figure VI.57 compare les données expérimentales avec les relations obtenues. On en tire que, pour des calculs techniques d'échange de chaleur par convection, lorsqu'il s'agit des liquides non métalliques, on peut recommander la formule (VI.466) pour $\mathrm{Pr} < 200$ et la formule (VI.461) pour $\mathrm{Pr} > 200$. Pour les gaz et autres milieux à $\mathrm{Pr} \approx 1$, on peut profiter de la formule (VI.460).

Pour les caloporteurs à $\mathrm{Pr} \ll 1$, les processus moléculaires de conductivité thermique prennent de l'importance également dans la partie turbulente de la couche limite. Les nombres Pr des métaux fondus sont de l'ordre de 10^{-2} et moins.

Les gaz fortement ionisés ont un $\mathrm{Pr} \ll 1$. Pour ces milieux, même à la frontière extérieure de la couche intermédiaire l'intensité de transfert turbulent de la chaleur est sensiblement inférieure à la conductivité thermique moléculaire. Pour ce cas on peut se borner au schéma du courant turbulent à deux couches et écrire la formule (VI.450) sous la forme

$$\mathrm{Nu} \cong 2\left(\int\limits_0^{\xi_1} \frac{\xi^3\,d\xi}{1+P\,(1-\xi)\,\xi} + \int\limits_{\xi_1}^{1} \xi^3\,d\xi\right)^{-1}, \qquad \text{(VI.468)}$$

où $P = \varepsilon\varkappa\,\mathrm{Pe}\sqrt{\zeta/32}$.

Dans le cas limite, avec $\mathrm{Pr} = 0$ et $q_p = \mathrm{const}$,

$$\mathrm{Nu} = 2\left(\int\limits_0^1 \xi^3\,d\xi\right)^{-1} = 8. \qquad \text{(VI.469)}$$

Si on utilise la formule plus exacte (VI.449), en y portant la loi exponentielle de la distribution des vitesses à $n = 1/7$, on obtient

$$\mathrm{Nu} = \left[2\int\limits_0^1 \frac{1}{\overline{R}}\left(1,22\int\limits_0^{\overline{R}} \overline{R}^{8/7}\,d\overline{R}\right)d\overline{R}\right]^{-1} = 6,8. \qquad \text{(VI.470)}$$

Les calculs pour le cas T_p = const donnent Nu = 5,2 à 5,5. De cette façon dans un courant turbulent établi, pour Pr → 0, le nombre de Nüsselt tend vers une valeur constante.

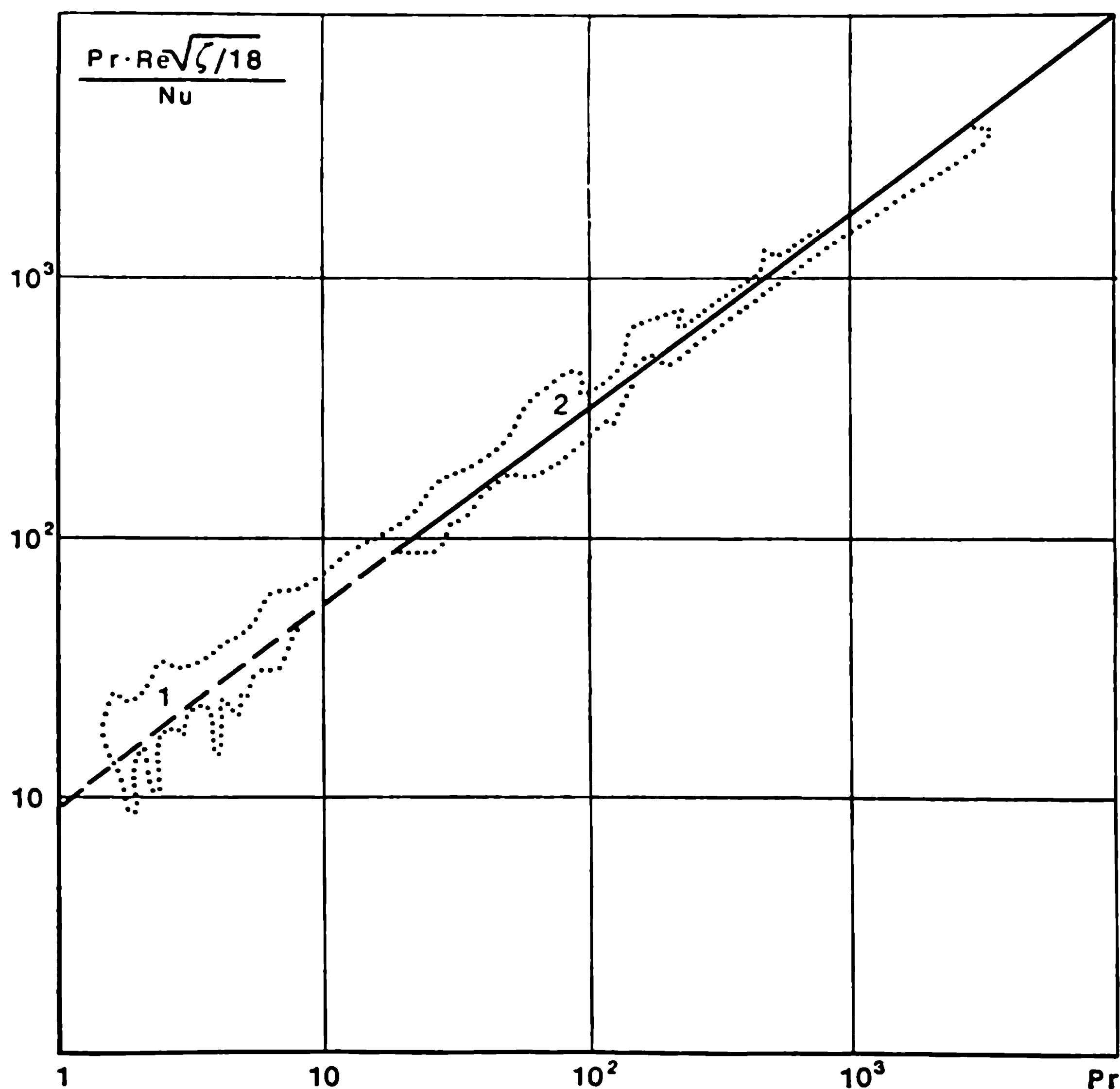


Fig. VI.57. Influence du nombre de Prandtl sur l'échange de chaleur turbulent convectif:

calcul: ——— *1* — d'après la formule (VI.466); - - - - *2* — après la formule (VI.461); ... — domaine des données expérimentales

Pour les calculs techniques de transfert de chaleur aux métaux liquides on peut recommander la formule obtenue par V. Soubbotine et ses collaborateurs:

$$\mathrm{Nu} = 5{,}0 + 0{,}025\ \mathrm{Pe}^{0{,}8}, \qquad \text{(VI.471)}$$

qui généralise bien les données expérimentales dans la marge

$$10^2 < \mathrm{Pe} < 10^4 \text{ et } 10^4 < \mathrm{Re} < 5 \cdot 10^4.$$

Echange de chaleur et résistance du fluide à propriétés physiques variables lors de son écoulement turbulent dans des tubes. Examinons l'échange de chaleur par convection dans le courant turbulent d'un fluide incompressible se déplaçant dans un tube circulaire sous les mêmes conditions, à l'exception de l'hypothèse sur la permanence des propriétés physiques.

Dans ce cas le système d'équations différentielles initial est de la forme

$$\rho w_x \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} [Rq]; \qquad \text{(VI.472)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho w_x^2) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} [R\tau], \qquad \text{(VI.473)}$$

où $q = (\lambda + \rho c_p \varepsilon_q) \frac{\partial T}{\partial R}$; $\tau = -(\mu + \rho\varepsilon) \frac{\partial w_x}{\partial R}$; h est l'enthalpie et ρ, c_p, μ et λ, les fonctions données de la température.

B. Pétoukhov et V. Popov ont obtenu dans leur ouvrage [29] les formules analytiques du problème envisagé, qui s'écrivent

$$T_\mathrm{p} - T = \frac{q_\mathrm{p} D}{\lambda_\mathrm{p}} \int_R^1 \frac{\int_0^R \frac{\rho w_x}{\overline{\rho w_x}} R\, dR}{\frac{\lambda}{\lambda_\mathrm{p}} \left(1 + \frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr_t}} \frac{\varepsilon}{\nu}\right) R} dR, \qquad \text{(VI.474)}$$

$$w_x = \frac{\tau_\mathrm{p} R_0}{\mu_\mathrm{p}} \int_R^1 \frac{R}{(\mu/\mu_\mathrm{p})(1 + \varepsilon/\nu)} dR, \qquad \text{(VI.475)}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Nu_p}} = 2 \frac{c_{p\mathrm{p}}}{\overline{c}_p} \int_0^1 \frac{\left(\int_0^R \frac{\rho w_x}{\overline{\rho w_x}} R\, dR\right)^2}{\frac{\lambda}{\lambda_\mathrm{p}} \frac{c_{p\mathrm{p}}}{c_p} \left(1 + \frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr_t}} \frac{\varepsilon}{\nu}\right) R} dR; \qquad \text{(VI.476)}$$

$$\frac{1}{\zeta_\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{Re_p}}{8} \int_0^1 \frac{\rho}{\rho_\mathrm{p}} \left(\int_R^1 \frac{R}{(\mu/\mu_\mathrm{p})(1 + \varepsilon/\nu)} dR\right) R\, dR, \qquad \text{(VI.477)}$$

où

$$\mathrm{Nu_p} = \frac{\alpha d}{\lambda_\mathrm{p}} = \frac{q_\mathrm{p} D}{(T_\mathrm{p} - \overline{T}) \lambda_\mathrm{p}} = \frac{q_\mathrm{p} \overline{c}_p D}{(h_\mathrm{p} - \overline{h}) \lambda_\mathrm{p}};$$

$$\zeta_\mathrm{p} = \frac{8 \tau_\mathrm{p} \rho_\mathrm{p}}{(\overline{\rho w_x})^2}; \quad \overline{c}_p = \frac{h_\mathrm{p} - \overline{h}}{T_\mathrm{p} - \overline{T}} = \frac{1}{T_\mathrm{p} - \overline{T}} \int_{\overline{T}}^{T_\mathrm{p}} c_p\, dT.$$

Lorsque les propriétés physiques sont constantes, le système d'équations (VI.474)-(VI.477) se ramène aux équations correspondantes à ces cas obtenues précédemment.

Ce système se résout par des méthodes numériques en recourant aux calculateurs électroniques, et les résultats terminaux dépendent essentiellement des formules retenues pour les coefficients du transfert turbulent (ε/ν). Ces formules étant semi-empiriques et la question de l'influence des propriétés variables sur les lois du transfert turbulent n'étant pas assez explorée, les résultats des calculs doivent être comparés aux données expérimentales.

Pour le cas d'écoulement des fluides aqueux, le nombre de Nüsselt est influencé surtout par la viscosité variable du fluide. La for-

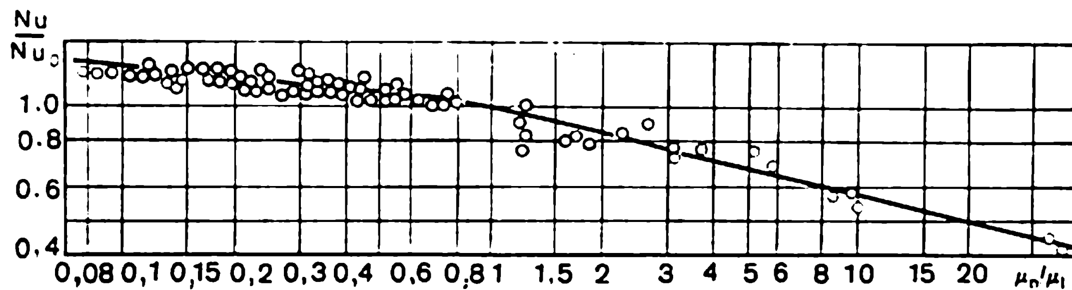


Fig. VI.58. Influence de la viscosité variable sur le transfert de chaleur dans l'écoulement turbulent d'un fluide:
———— — calcul d'après la formule (VI.478); ○ — expérience

mule de B. Pétoukhov s'accorde bien avec les données expérimentales [27]

$$Nu/Nu_0 = (\mu_p/\mu_f)^n. \qquad \text{(VI.478)}$$

Lorsque le fluide est chauffé, $(\mu_p/\mu_f) < 1$, $n = -0{,}11$; lorsqu'il est refroidi, $(\mu_p/\mu_f) > 1$, $n = 0{,}25$. Le nombre Nu_0 se calcule d'après la formule de la température de masse moyenne (VI.465), les propriétés physiques du fluide étant choisies d'après cette température dans la section donnée du tube. L'équation (VI.478) est vérifiée dans la marge de variation du rapport μ_p/μ_f de 0,08 à 40; du Re, de 10^4 à $1{,}25 \cdot 10^5$ et du Pr, de 2 à 140.

La figure VI. 58 compare les données expérimentales avec celles de calcul d'après la formule (VI.478). Lors de l'écoulement des gaz dans le domaine des paramètres d'état distant de la courbe de saturation, le gaz peut être considéré comme parfait. Dans ce cas sa densité est liée à la pression et à la température par l'équation de Clapeyron-Mendéléev $\rho = p/RT$. Nous avons montré au chapitre IV que les autres paramètres physiques du gaz dépendent surtout de la température, et ces relations peuvent être traduites par les expressions

$$\lambda/\lambda_0 = (T/T_0)^{n_\lambda}; \qquad \mu/\mu_0 = (T/T_0)^{n_\mu}; \qquad c_p/c_{p0} = (T/T_0)^{n_c},$$

où λ_0, μ_0, c_{p0} sont les valeurs des paramètres physiques à une certaine température T_0; n_λ, n_μ, n_c, les constantes qui dépendent de la nature du gaz et de l'intervalle des températures.

De la sorte, l'influence sur l'échange de chaleur de la variabilité des paramètres physiques du gaz se manifeste par la variation de la température suivant la section de la couche limite.

Si on utilise l'analogie entre le problème externe et interne, en identifiant l'épaisseur de la couche limite lors du contournement d'une plaque au rayon du tube lors de l'écoulement d'un gaz dans un tube, l'action exercée par l'allure non isotherme sur l'échange de chaleur par convection peut être assez bien évaluée par la formule limite de S. Koutatéladzé et A. Léontiev [19].

Pour l'écoulement établi du gaz dans un tube, le nombre de Stanton est défini par la formule

$$\overline{\mathrm{St}} = \frac{q_\mathrm{p}}{c_\mathrm{p}\overline{\rho w}\,(T - T_\mathrm{p})}.$$

Dans le cas du problème externe, le nombre de Stanton se calcule d'après les paramètres de la frontière extérieure de la couche limite. Respectivement, le nombre de Stanton St_0 relatif au tube, et établi d'après les paramètres sur l'axe de ce dernier, est associé au nombre $\overline{\mathrm{St}}$ par la relation évidente

$$\overline{\mathrm{St}} = \mathrm{St}_0 \frac{\rho_0 w_0}{\overline{\rho w}} \frac{T_0 - T_\mathrm{p}}{\overline{T} - T_\mathrm{p}}. \qquad \text{(VI.479)}$$

En adoptant l'hypothèse de la similitude dans la distribution des vitesses et des températures excédentaires suivant le rayon du tube, c'est-à-dire

$$(T - T_\mathrm{p})/(T_0 - T_\mathrm{p}) = w/w_0,$$

on obtient que

$$\frac{\overline{T} - T_\mathrm{p}}{T_0 - T_\mathrm{p}} \frac{\overline{\rho w}}{\rho_0 w_0} = 2 \int_0^1 \frac{\rho w^2}{\rho_0 w_0^2} \overline{R}\, d\overline{R}, \qquad \text{(VI.480)}$$

où $\overline{R} = R/R_0$.

Lorsque la loi de la distribution des vitesses est exponentielle et compte tenu de l'équation de Clapeyron-Mendéléev, on a

$$\int_0^1 \frac{\rho w^2}{\rho_0 w_0^2} \overline{R}\, d\overline{R} = \varphi(\psi), \qquad \text{(VI.481)}$$

où $\psi = T_\mathrm{p}/T_0$ est le facteur de température.

Introduisons les paramètres sans dimensions

$$f_1 = \int_0^1 \frac{\rho w}{\rho_0 w_0} R\,dR; \qquad \text{(VI.482)}$$

$$f_2 = \int_0^1 \frac{\rho w_0}{\rho_0 w_0}\left(1 - \frac{w}{w_0}\right) R\,dR. \qquad \text{(VI.483)}$$

Alors, on tire des équations (VI.482) et (VI.483)

$$(\overline{T} - T_p)/(T_0 - T_p) = \varphi/f_1, \qquad \text{(VI.484)}$$

d'où l'on obtient le rapport entre $\psi = T_p/T_0$ et $\overline{\psi} = T_p/\overline{T}_0$. D'autre part, compte tenu de (VI.241), pour le nombre St_0 on peut écrire

$$\mathrm{St}_0 = \frac{A}{(Re_p^{**})^m}\psi_\infty, \qquad \text{(VI.485)}$$

où $\mathrm{Re}_p^{**} = \rho_0 w_0 \delta_t^{**}/\mu_p$ et $\psi_\infty = [2/(\sqrt{\overline{\psi}} + 1)]^2$.

Etant donné que

$$\mathrm{Re}_p^{**} = \overline{\mathrm{Re}}_D \frac{\delta_t^{**}}{2R_0}\frac{\rho_0 w_0}{\overline{\rho_0 w}}\left(\frac{\overline{\mu}}{\mu_p}\right), \qquad \text{(VI.486)}$$

où $\overline{\mathrm{Re}}_D = \overline{\rho w}D/\overline{\mu}$, compte tenu de (VI.482), (VI.483) et (VI.467), on obtient

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}023\overline{\mathrm{Re}}_D^{0,8}\overline{\mathrm{Pr}}^{0,4}\overline{\psi}^{-0,37}. \qquad \text{(VI.487)}$$

La figure VI.59 compare les données expérimentales avec les calculs suivant la formule (VI.487).

Dans la théorie d'échange de chaleur par convection une place particulière revient aux processus qui marchent sous des pressions supérieures à la valeur critique, et aux températures voisines de la valeur critique ou pseudo-critique (c'est-à-dire à la température qui correspond au point de la capacité calorifique maximale sous une pression constante). L'intérêt de ce problème, surtout dans l'énergétique, est dû à la conception des piles nucléaires et la construction des groupes de chaudières, dans lesquelles le caloporteur est l'eau portée à des paramètres supercritiques.

Les propriétés physiques de la matière dans la région voisine des valeurs critiques dépendent sensiblement de la température et de la pression; or, lorsqu'il faut généraliser les données d'expérience sur l'échange de chaleur, ceci conduit à des complications importantes. Il existe actuellement un assez grand nombre d'ouvrages rédigés à partir de la pratique expérimentale sur le transfert de chaleur

dans la région envisagée, mais les complications mentionnées font qu'il n'existe pas de méthodes sûres et générales pour calculer les échanges de chaleur dans ces conditions. Pour la région « des gaz », lorsque la température maximale de la couche limite est supérieure

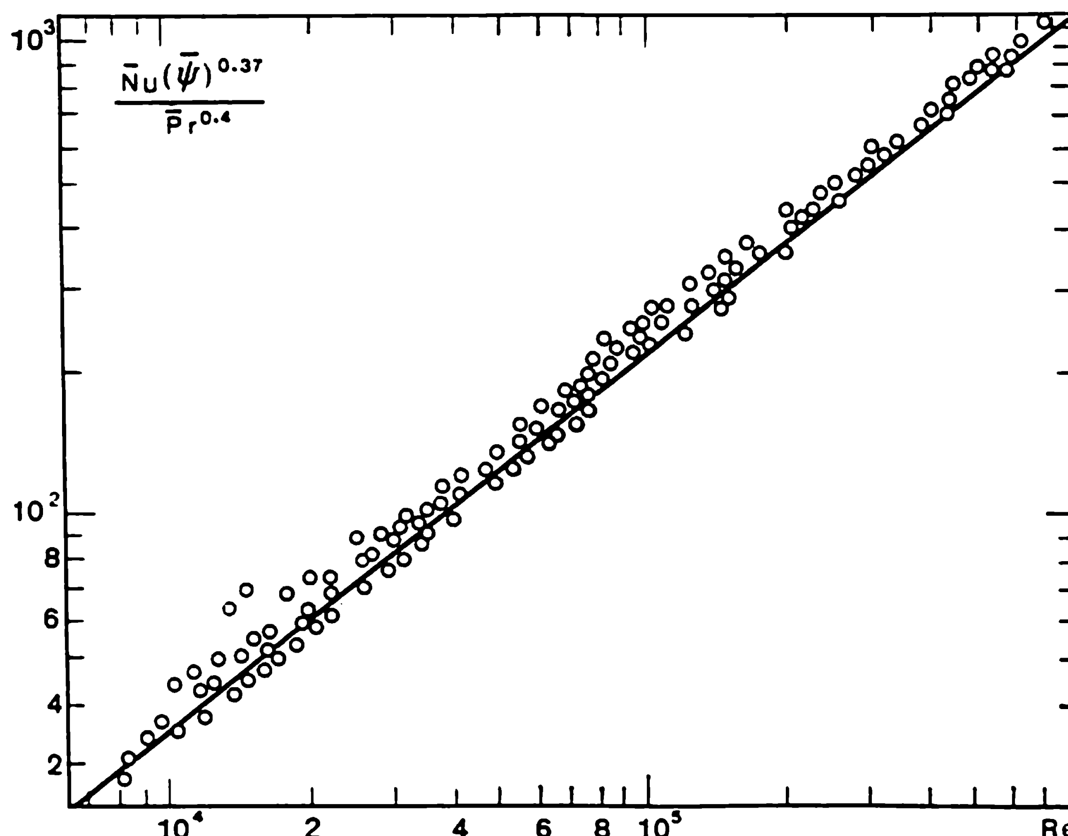


Fig. VI.59. Influence de l'allure non isotherme sur le coefficient de transmission de chaleur dans l'écoulement stabilisé du gaz dans un tube cylindrique: ——— — calcul d'après la formule (VI.487); O — expérience

à la température pseudo-critique, des résultats satisfaisants sont fournis par la formule limite de S. Koutateladzé et A. Léontiev [19]

$$\overline{\mathrm{Nu}}_D = 0{,}023\overline{\mathrm{Re}}_D^{0,8}\overline{\mathrm{Pr}}^{0,4}\left(\frac{2}{\sqrt{\bar{\rho}/\rho_p}+1}\right)^2. \qquad \text{(VI.488)}$$

La formule empirique de E. Krasnochtchékov et V. Protopopov [29] résume les données expérimentales sur l'eau et le gaz carbonique à 20 % près

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \mathrm{Nu}_0\,(\bar{\mu}/\mu_p)^{0,11}\,(\bar{\lambda}/\lambda_p)^{-0,33}\,(c_p/\bar{c}_p)^{0,35}\,(\rho_p/\bar{\rho})^m(\bar{c}_p/c_p)^n, \qquad \text{(VI.489)}$$

où Nu_0 se calcule d'après la formule (VI.465) ; $\bar{c}_p = (h_p - h_f)/(T_p - \bar{T})$ est la capacité calorifique intégrale moyenne du fluide dans l'intervalle des températures de $\bar{T}$ à T_p.

Pour l'eau à $1{,}02 \leqslant p/p_{dr} \leqslant 1{,}45$ $m = 0{,}3$; pour le gaz carbonique avec $1{,}02 \leqslant p/p_{dr} \leqslant 5{,}3$ $m = 0{,}35 - 0{,}05\, p/p_{dr}$. L'exposant n dépend de T_p/T_m et $\bar{T}/T_m$ (fig. VI.60). La formule est justifiée

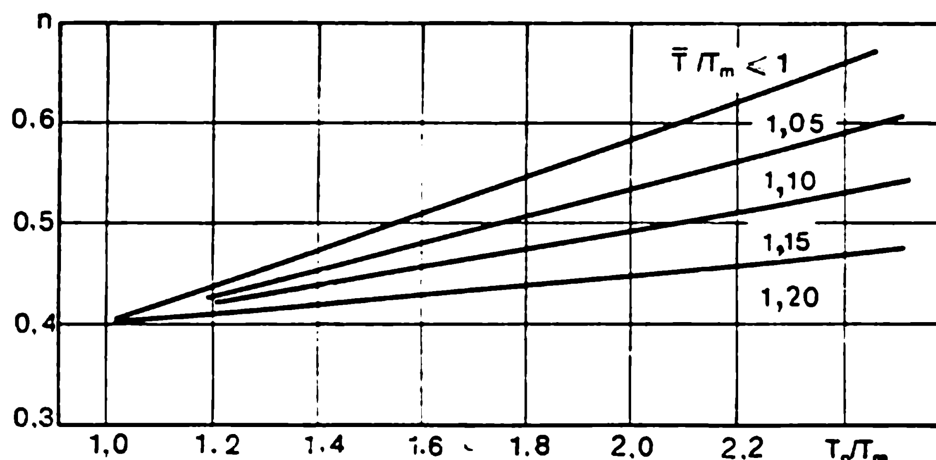


Fig. VI.60. Relation entre l'exposant n dans l'équation (VI.489) et la température

pour l'échauffement du fluide à q_p = const dans la marge $2\cdot10^4 \leqslant \leqslant \overline{\mathrm{Re}}_D \leqslant 8\cdot10^5$; $0{,}85 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 5{,}5$; $0{,}09 \leqslant \rho_p/\rho \leqslant 1$; $0{,}02 \leqslant \leqslant \bar{c}_p/c_p \leqslant 4$.

L'écoulement d'un fluide dans des tubes se poursuivant à des allures proches des valeurs critiques peut donner lieu à des régimes d'échange de chaleur dits « altérés » qui s'accompagnent de sursauts assez brusques de la température de la paroi chauffée. Le mécanisme des régimes « altérés » n'est pas très clair; il est associé à l'influence des forces d'Archimède et des accélérations du courant sur l'intensité du transfert turbulent de la chaleur.

Influence de la rugosité sur l'échange de chaleur lors de l'écoulement turbulent d'un fluide dans des tubes droits, incurvés et à section droite non circulaire. Par *surface rugueuse* on entend une surface dont les aspérités sont sensiblement inférieures à l'épaisseur de la couche limite ou du rayon du tube (pour l'écoulement établi). L'aspérité exerce alors une action directe sur l'écoulement du fluide seulement dans la couche visqueuse ou intermédiaire. Divers « turbulisateurs » (ailettes spéciales, pièces incorporées, transporteurs à vis, générateurs de tourbillons, etc.) déclenchent des perturbations du courant tout entier.

On distingue la rugosité *naturelle*, conditionnée par le processus de fabrication des tubes et les conditions de leur exploitation, et *artificielle*, établie spécialement à la surface du tube (filetage, saillies et rainures transversales, bosses, etc.). Dans le cas général, la rugosité est caractérisée par la profondeur et le pas des aspérités du pro-

fil. Dans les calculs techniques, pour l'évaluer, on emploie la notion de *profondeur équivalente de rugosité* $K_é$. C'est la profondeur des aspérités de sable à laquelle le tube possède la même valeur du coefficient de résistance hydraulique. Pour la rugosité artificielle réalisée à l'aide de grains de sable de même dimension adhérant l'un à l'autre, fixés à la surface du tube (aspérité de sable) $K_é = K$, où K est le diamètre du grain de sable.

Le transfert de chaleur à une surface rugueuse est plus intense qu'à une surface lisse; ceci est dû à une intensité accrue du trans-

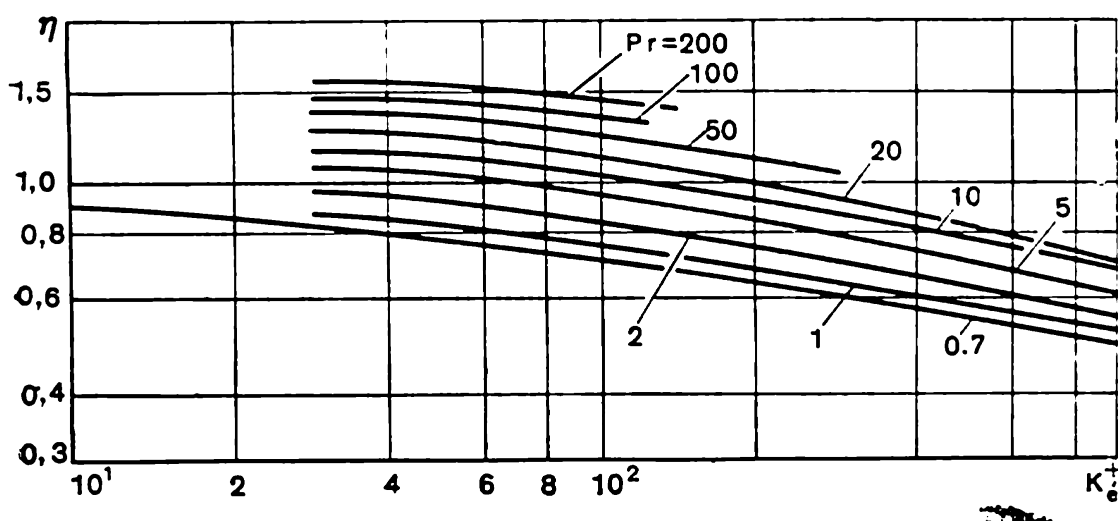


Fig. VI.61. Relation entre le coefficient d'efficacité des tubes rugueux et $K_é^+$ pour de différentes valeurs de Pr

fert turbulent au voisinage de la paroi. Le renforcement du transfert de chaleur s'accompagne de l'augmentation de la résistance hydraulique.

L'*efficacité de la surface rugueuse* peut être évaluée d'après la formule

$$\eta = \frac{Nu_r/Nu_l}{\zeta_r/\zeta_l}, \qquad (VI.490)$$

où Nu_r, Nu_l et ζ_r, ζ_l sont les nombres de Nüsselt et les coefficients de résistance des tubes à surface rugueuse et lisse pour les mêmes valeurs des nombres Re et Pr.

La figure VI.61 visualise la relation entre le coefficient d'efficacité η et le paramètre de rugosité $K_é^+ = \frac{v^* K_é}{\nu} = \frac{K_é}{d_é} \mathrm{Re} \sqrt{\frac{\zeta_r}{8}}$ d'une part et le nombre de Prandtl, de l'autre [29]. En partant de ce graphique, si on connaît ζ_l, ζ_r et $K_é$, on peut calculer le transfert de chaleur à une surface rugueuse

Dans de nombreux cas pratiques le fluide se déplace dans un tube dont l'axe forme des arcs de cercle. C'est le cas où apparaissent des forces centrifuges qui compliquent le mouvement du fluide en lui communiquant une allure hélicoïdale (fig. VI.62). Il en résulte que les coefficients de transmission de chaleur locaux du côté extérieur de l'arc de cercle s'avèrent plus grands que du côté intérieur. Les conditions envisagées justifient l'analogie de Reynolds, c'est-à-dire

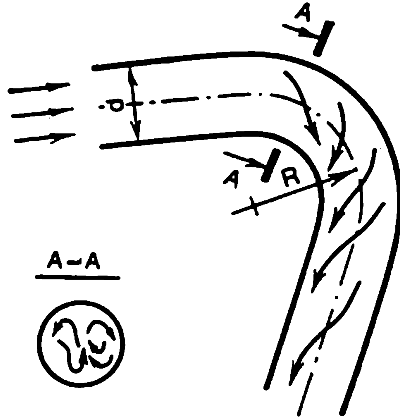


Fig. VI.62. Ecoulement dans un canal coudé

$$St \cdot Pr^{0,6} = \zeta/8, \qquad (VI.491)$$

où

$$\zeta = \zeta_{dr} [Re (r_0/R_0)^2]^{0,05}; \qquad (VI.492)$$

r_0 est le rayon du tube; R_0, le rayon de la courbure (coude) de l'axe du tube; ζ_{dr}, le coefficient de résistance hydraulique du tube droit défini par la formule (VI.423). La formule (VI.492) est vérifiée pour $Re (r_0/R) > 6$.

Dans le cas de l'écoulement turbulent, le calcul de transfert de chaleur dans les tubes de section non circulaire peut parfois se faire d'après les formules obtenues pour les tubes circulaires [formules (VI.465), (VI.467)], si dans les nombres réduits Nu et Re on utilise comme dimension caractéristique le diamètre équivalent

$$d_é = 4f/P, \qquad (VI.493)$$

où f est la section droite du canal; P, le périmètre mouillé de la section droite, indépendamment de la partie qui échange la chaleur avec le fluide.

Le calcul à l'aide de $d_é$ est une méthode approchée, surtout lorsque les nombres de Prandtl sont petits. Pour obtenir des résultats plus exacts, on recourt à l'équation de similitude de l'échange de chaleur obtenue pour le profil donné de la section de passage du canal. Ainsi, lorsqu'un fluide aqueux se déplace dans des canaux à section droite annulaire, les coefficients moyens de transmission de chaleur de la surface interne du tube peuvent se calculer d'après la formule de V. Issatchenko et N. Galine [14]

$$Nu_{fd_é} = 0{,}017 Re_{fd_é}^{0,8} Pr_f^{0,4} \left(\frac{Pr_f}{Pr_p}\right)^{0,25} \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^{0,18}. \qquad (VI.494)$$

Ici la grandeur déterminante est la température moyenne du fluide dans le tube et $d_é = d_2 - d_1$, où d_1 est le diamètre interne du canal annulaire; d_2, son diamètre externe. La formule (VI.494) est vraie

pour $d_2/d_1 = 1{,}2$ à $1{,}4$; $l/d = 50$ à 460; $\mathrm{Pr}_f = 0{,}7$ à 100. Dans des canaux de section triangulaire l'écoulement d'un fluide fait naître des courants turbulents à grande échelle qui compliquent sensiblement le processus d'échange de chaleur. Les méthodes de calcul pour ce cas sont décrites dans [28].

Echange de chaleur lors de l'écoulement turbulent dans le tronçon initial du tube. Le passage du régime laminaire dans la couche limite à l'écoulement turbulent marche de la même façon que dans le cas d'une plaque plane. Si la couche limite turbulente commence à croître à partir de la section du tronçon initial du tube, le calcul de l'évolution des couches limites dynamique et thermique se fait d'après les formules obtenues au § VI.3 pour le contournement extérieur des corps. La différence consiste dans le fait que lors du contournement extérieur la vitesse du fluide à la frontière externe de la couche limite est une valeur donnée, alors que pour les conditions envisagées elle est un paramètre à établir. Son calcul se fait d'après une équation complémentaire de la permanence du débit du fluide le long du tube.

Considérons l'écoulement dans le tronçon initial d'un tube cylindrique, la distribution de la vitesse et de la température à l'entrée du tube étant uniforme. L'équation de la continuité peut alors s'écrire

$$\rho_{01} w_{01} = 2 \int_0^{R_0} \rho w R \, dR = \text{const.} \qquad \text{(VI.495)}$$

où ρ_{01} et w_{01} sont la densité et la vitesse du fluide dans le tronçon initial du tube.

Pour un tube cylindrique, l'*épaisseur de déplacement* se calcule d'après la formule

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho w}{\rho_0 w_0}\right) \left(1 - \frac{y}{R_0}\right) dy. \qquad \text{(VI.496)}$$

Alors l'équation (VI.495) s'écrit

$$\rho_{01} w_{01} = \rho_0 w_0 \, (1 - 2\delta^*/R_0), \qquad \text{(VI.497)}$$

où ρ_0 et w_0 sont la densité et la vitesse du fluide dans le noyau du courant pour lequel on admet que l'écoulement est potentiel.

Pour le cas de la densité constante de la couche limite turbulente le paramètre de forme est $H = \delta^*/\delta^{**} = 1{,}3$.

La formule (VI.497) entraîne

$$\mathrm{Re}^{**} = \mathrm{Re}_{01} \, (\tilde{w}_0 - 1)/5{,}2, \qquad \text{(VI.498)}$$

où $\tilde{w}_0 = w_0/w_{01}$.

La relation intégrale des impulsions (VI.59), la loi de frottement (VI.233) et l'équation (VI.498) composent un système d'équations fermé dont la solution analytique (avec $m = 0,25$ et $B = 0,0256$) est de la forme [19]:

$$2,88\left[4(\tilde{w}_0-1)^{0,25}-\ln\frac{(\tilde{w}_0-1)^{0,5}+\sqrt{2}(\tilde{w}_0-1)^{0,25}+1}{(\tilde{w}_0-1)^{0,5}-\sqrt{2}(\tilde{w}_0-1)^{0,25}+1}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}(\tilde{w}_0-1)^{0,25}}{1-(\tilde{w}_0-1)^{0,5}}\right]-2,3\frac{(\tilde{w}_0-1)^{1,25}}{\tilde{w}_0}=\frac{0,4\bar{x}}{\mathrm{Re}_{01}^{0,25}}. \quad \text{(VI.499)}$$

En connaissant le rapport de $\tilde{w}_0$ à $\bar{x}$, calculons les valeurs locales de Re**, et à partir de l'équation (VI.233), le coefficient de frottement

$$C_f = 0,0256/(\mathrm{Re}^{**})^{0,25}. \quad \text{(VI.500)}$$

La longueur du tronçon initial se calcule d'après la condition d'intersection des couches limites. Dans ce cas $\sigma = R_0$ et $\sigma^*/R_0 = 0,097$. L'équation (VI. 497) entraîne que

$$\tilde{w}_{01} = (1 - 2\delta^*/R_0)^{-1} = 1,24. \quad \text{(VI.501)}$$

L'équation (VI.500) peut être approximée avec une précision suffisante par la relation bien simple

$$\tilde{w}_0 = 1,18x/\mathrm{Re}_{01}^{0,25}. \quad \text{(VI.502)}$$

Alors, compte tenu de (VI.501), on obtient la formule de la longueur du tronçon initial

$$\bar{x}_1 = 1,3\mathrm{Re}_{01}^{0,25}. \quad \text{(VI.503)}$$

Dans le cas d'écoulement du gaz à des vitesses subsoniques à l'entrée, mais dans les conditions sensiblement non isothermes, la formule (VI.503) devient [19]

$$\bar{x}_1/\mathrm{Re}_{01}^{0,25} = (0,8\psi + 0,5)/\psi^{0,19}. \quad \text{(VI.504)}$$

Pour calculer les valeurs locales des coefficients de transmission de chaleur, intégrons la relation de l'énergie de la loi de variation de la vitesse à la frontière externe, déterminée par la formule (VI.502). L'équation (VI.63) amène

$$\mathrm{Re}_t^{**} = \frac{1}{\Delta T}\left\{\frac{(1+m)}{2\mathrm{Pr}^n}\mathrm{Re}_{01}\int_0^{x_1}\Delta T^{m+1}\tilde{w}_0\,d\bar{x}\right\}^{1/(m+1)}. \quad \text{(VI.505)}$$

Compte tenu de (VI.502) pour le cas T_p = const, on obtient (en adoptant $m = 0{,}25$ et $B/2 = 0{,}0128$)

$$\mathrm{Re}^{**} = \mathrm{Re}_{01}\left\{\frac{0{,}1}{\mathrm{Pr}^{0{,}75}}\left[1{,}18^{\bar{x}/\mathrm{Re}_{01}^{0{,}25}} - 1\right]\right\}^{0{,}8}. \qquad \text{(VI.507)}$$

Appliquons la loi d'échange de chaleur (VI.241) pour obtenir

$$\mathrm{St} = \frac{0{,}020}{\mathrm{Re}_{01}^{0{,}25}\left[1{,}18^{\bar{x}/\mathrm{Re}_{0,1}^{0{,}25}} - 1\right]^{0{,}2}\mathrm{Pr}^{0{,}6}} \qquad \text{(VI.508)}$$

ou

$$\mathrm{Nu}_D = 0{,}02\,\mathrm{Re}_{01}^{0{,}75}\,\mathrm{Pr}^{0{,}4}\,\frac{1{,}18^{\bar{x}/\mathrm{Re}_{0,1}^{0{,}25}}}{\left[1{,}18^{\bar{x}/\mathrm{Re}_{0,1}^{0{,}25}} - 1\right]^{0{,}2}}. \qquad \text{(VI.509)}$$

Cette formule permet de calculer les coefficients de transmission de chaleur local dans le tronçon initial du tube lors du développement simultané des couches limites dynamique et thermique à la température constante de la paroi.

Cependant, en utilisant l'équation (VI.505), on peut obtenir l'équation de calcul pour n'importe quelle loi de variation de la température de la paroi suivant la longueur du tube.

En particulier, pour le cas q_p = const, l'équation (VI.60) permet de tirer

$$\mathrm{Re}_t^{**} = \mathrm{St}\mathrm{Re}_x = \mathrm{St}\mathrm{Re}_{01}\tilde{w}_0\bar{x}. \qquad \text{(VI.510)}$$

Compte tenu de la loi d'échange de chaleur, on obtient

$$\mathrm{St} = \frac{0{,}0128}{[\mathrm{St}\,\mathrm{Re}_{01}\,\tilde{w}_0\bar{x}]^{0{,}25}\,\mathrm{Pr}^{0{,}75}},$$

ou

$$\mathrm{St} = \frac{0{,}0305}{[\mathrm{Re}_{01}\tilde{w}_0\bar{x}]^{0{,}2}\mathrm{Pr}^{0{,}6}}. \qquad \text{(VI.511)}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Nu}_D = 0{,}0305\,\mathrm{Re}_{01}^{0{,}75}\mathrm{Pr}^{0{,}4}\,\frac{1{,}18^{0{,}8\bar{x}/\mathrm{Re}_{01}^{0{,}25}}}{(\bar{x}/\mathrm{Re}_{01}^{0{,}25})^{0{,}2}}. \qquad \text{(VI.512)}$$

Il convient d'indiquer que les formules obtenues sont justifiées dans la marge des nombres de Prandtl de 0,5 à 200.

§ VI.6. Echange de chaleur lors du contournement transversal des tubes

La conception des échangeurs thermiques tubulaires, largement appliqués en technique, impose la connaissance de la loi d'échange de chaleur par convection lors de l'écoulement normal à un tube ou à un faisceau de tubes.

Considérons les particularités du contournement transversal d'un tube circulaire unitaire par le courant d'un fluide incompressible. D'après les expériences, il se forme à la partie frontale de la surface du tube une couche limite laminaire dont l'épaisseur croît

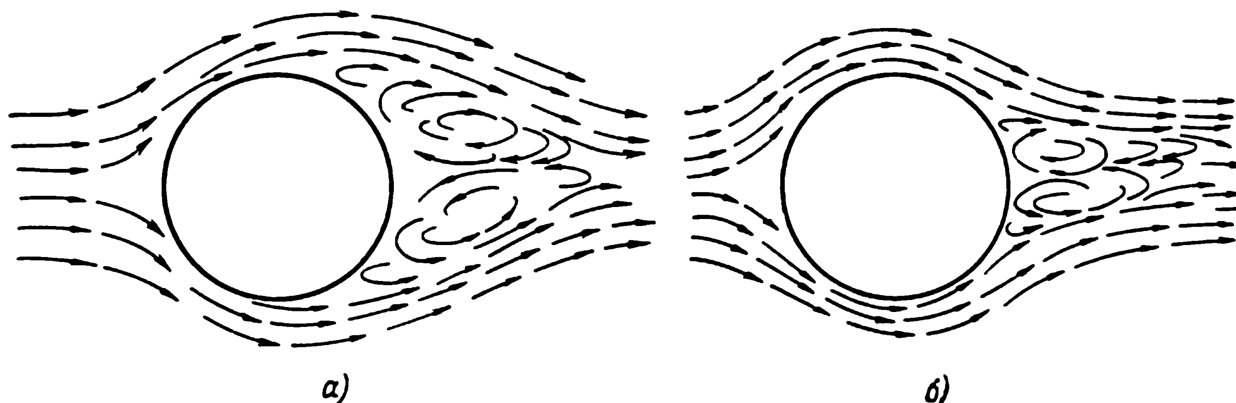


Fig. VI.63. Contournement d'un cylindre lors du décollement des couches limites laminaire (*a*) et turbulente (*b*)

progressivement. Lors du contournement de la partie d'attaque d'un cylindre, la pression dans le courant extérieur tombe ($dp/dx < 0$), alors que la vitesse dans la direction du mouvement augmente et les particules de la couche limite, malgré l'action freinante des forces de viscosité, poursuivent leur mouvement le long de la surface. Dans la partie amont du cylindre, la pression du courant extérieur croît, les particules de la couche limite, sous l'action des forces de viscosité et du gradient de pression positif, décélèrent, et à partir d'une certaine section du courant, se déplacent dans le sens inverse en formant des tourbillons qui se détachent périodiquement de la surface pour être emportés par le courant (fig. VI.63). Le point de décollement de la couche limite laminaire se trouve à peu près à un angle $\varphi = 82°$ et dépend peu du nombre Re. Dans ce cas 45 % de la surface du cylindre seulement sont contournés par le fluide sans se décoller. Un tel régime est observé avec des Re allant de 9 à $(2 \text{ ou } 5)\cdot 10^5$. Avec l'augmentation ultérieure du nombre de Reynolds, la couche limite laminaire devient turbulente, et le point de son décollement se déplace en aval du courant jusqu'à des $\varphi = 110$ à $120°$, et près de 65 % de toute la surface du cylindre sont baignés sans décollement.

L'allure du contournement d'un tube circulaire détermine également la distribution des coefficients locaux d'échange de chaleur à la surface (fig. VI.64). Le transfert de chaleur atteint la valeur maximale à la génératrice d'attaque du cylindre ($\varphi = 0$) où la couche limite est mince. La valeur du coefficient de transmission thermique diminue suivant la surface du cylindre du fait que la couche limite croît et avec $\varphi = 90$ à $100°$ atteint le minimum. La partie aval du

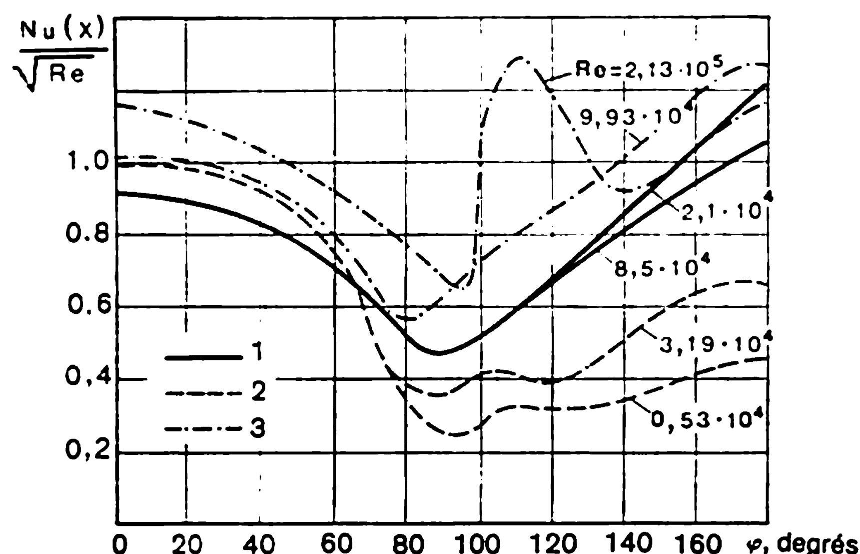


Fig. VI.64. Variation du transfert de chaleur suivant la circonférence d'un tube pour de différents nombres Re:
1, 2, 3 — données expérimentales

tube est le siège où la couche limite se désagrège et le coefficient de transmission de chaleur croît de nouveau. Jusqu'au point de décollement de la couche limite le transfert de chaleur local à la surface du cylindre peut se calculer analytiquement d'après les formules des §§ VI.2 et VI.4. Le calcul analytique des moyennes des coefficients de transmission de chaleur est pratiquement impossible du fait que les conditions de l'écoulement du fluide dans la partie aval sont très compliquées. Aussi recommande-t-on d'utiliser à cet effet les équations de similitude de l'échange de chaleur.

Les données les plus sûres sur les moyennes des coefficients d'échange de chaleur pour le contournement transversal d'un cylindre sont obtenues par Joukaouskas et ses collaborateurs [13].

Les résultats du traitement des données expérimentales à la lumière des critères sont visualisés sur la figure VI.65.

Les données expérimentales se prêtent bien à la généralisation par les formules pour Re = 5 à 1000:

$$\overline{Nu}_{fd} = 0,5 Re_{fd}^{0,5} Pr_f^{0,38} (Pr_f/Pr_p)^{0,25}, \qquad (VI.513)$$

pour $Re_{fd} = 10^3$ à $2 \cdot 10^5$

$$\overline{Nu}_{fd} = 0{,}25 Re_{fd}^{0,6} Pr_f^{0,43} (Pr_f/Pr_p)^{0,25}. \qquad (VI.514)$$

Dans le calcul des nombres caractéristiques la dimension déterminante retenue est la température moyenne du fluide.

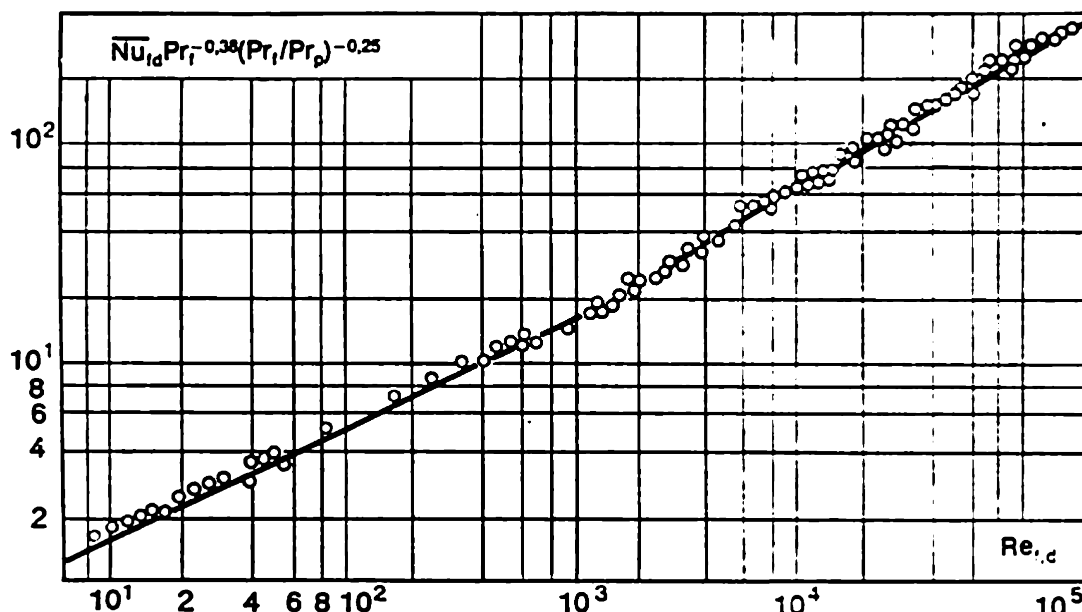


Fig. VI.65. Transfert de chaleur moyen dans un cylindre contourné transversalement:

——— — calcul d'après les formules (VI.513) et (VI.514); O — expérience

Les formules (VI.513) et (VI.514) sont vérifiées pour le cas de l'écoulement normal à la génératrice du cylindre. Si l'angle ψ entre

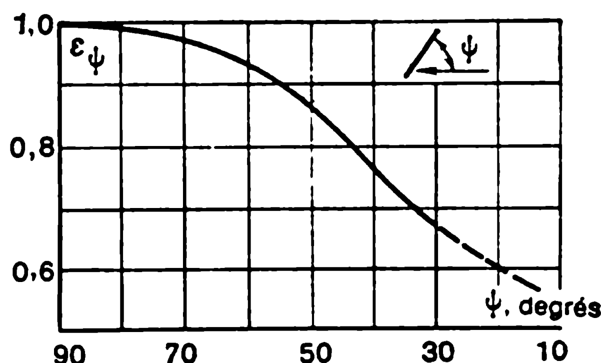


Fig. VI.66. Influence de l'angle d'attaque sur le transfert de chaleur dans un cylindre

la génératrice et la direction du courant diminue, le transfert de chaleur moyen, lui, diminue également. Cet effet peut être pris en compte par l'introduction dans les formules (VI.513) et (VI.514) du coefficient de correction $\varepsilon_\psi = \alpha_\psi/\alpha_{90°}$. La figure VI.66 visualise

le rapport entre le coefficient ε_ψ et l'angle ψ. Dans le domaine de ψ de 30 à 90°, on peut appliquer la relation approchée

$$\varepsilon_\psi = 1 - 0{,}54 \cos^2 \psi. \qquad \text{(VI.515)}$$

Les échangeurs tubulaires sont réalisés généralement sous la forme de faisceaux de tubes. Leur arrangement dans le faisceau peut être le plus varié. Les plus fréquents sont les arrangements en quinconce ou en ligne (fig. VI.67).

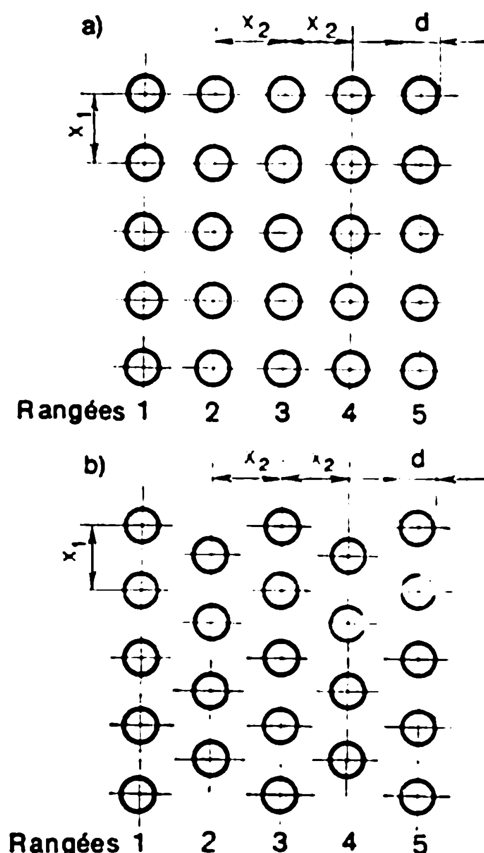


Fig. VI.67. Arrangement des tubes dans des faisceaux: en ligne (*a*) et en quinconce (*b*)

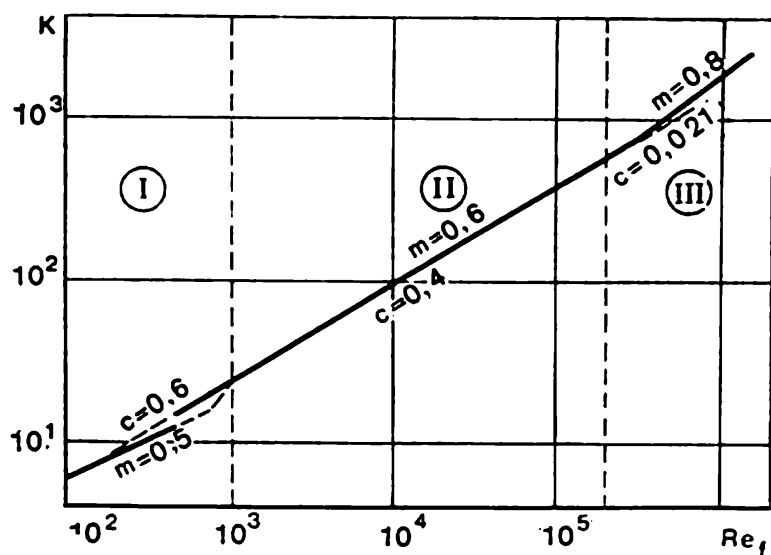
Le contournement du tube dans le faisceau se distingue du cas d'un tube unitaire du fait que dans ce processus intervient la disposition des tubes l'un près de l'autre. Lorsque le contournement d'une rangée isolée est transversal, les tubes voisins forment des rétrécissements qui modifient le champ des vitesses par rapport à un tube unitaire. Le point de décollement de la couche limite se déplace le long du courant. Les tubes placés dans la deuxième rangée et les rangées qui suivent se retrouvent dans le sillage tourbillonnaire produit par les rangées précédentes, ce qui intervient, naturellement, dans les coefficients de transmission de chaleur. De multiples données expérimentales sur les coefficients moyens de transmission de chaleur dans les faisceaux de tubes obtenues par A. Joukaouskas et ses collaborateurs [13] et traitées à la lumière des critères sont visualisées sur la figure VI.68. Les formules de cette figure sont justifiées pour les rangées en profondeur, c'est-à-dire pour celles où le courant est devenu hydrodynamiquement stable. Pour température déterminante on retient celle du courant d'impact; pour longueur caractéristique, le diamètre du tube; pour vitesse de calcul, celle de la section de passage minimale du faisceau.

Pour des faisceaux à nombre de rangées inférieur à 20 il faut tenir compte de la diminution du coefficient de transmission de chaleur dans les premières rangées par rapport aux rangées en profondeur

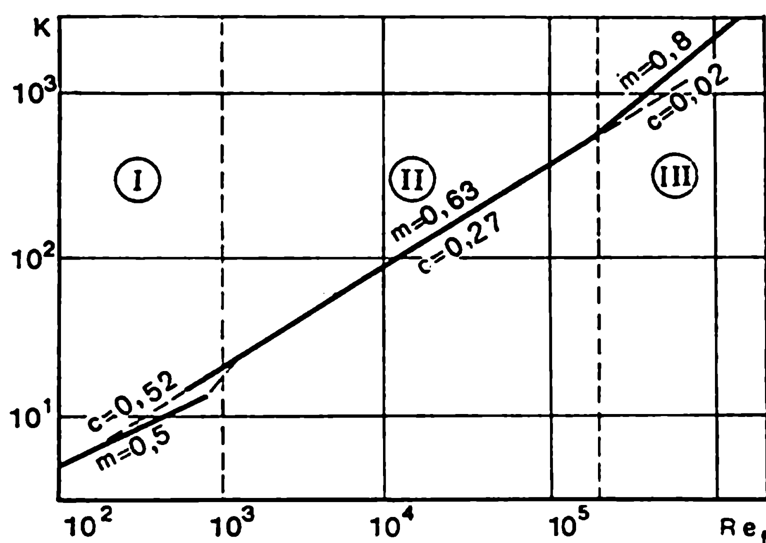
$$\mathrm{Nu}_z = C_z \mathrm{Nu}_{z>20}.$$

Les valeurs du coefficient C_z peuvent être fournies par la figure VI.69.

Dans la conception des échangeurs il faut déterminer l'organisation optimale du point de vue des frais d'installation et d'exploitation. La perfection de la surface d'échange de chaleur peut être



a)



b)

Fig. VI.68. Transfert de chaleur dans le contournement transversal des tubes d'un faisceau en quinconce (*a*) et en ligne (*b*),

$$\text{où } K = \frac{Nu_f}{Pr_f^{0,36}\left(\frac{Pr_f}{Pr_p}\right)^{0,25}} = CRe_f^m$$

caractérisée du point de vue énergétique par le rapport de la chaleur transmise par la surface d'échauffement donnée et l'énergie absorbée

pour surmonter la résistance

$$E = \alpha F \Delta t / (Q_V \Delta p), \qquad \text{(VI.516)}$$

où Q_V est le débit volumique, m³/s.

Pour la chute des températures $\Delta t = 1$ °C, on a

$$E = \alpha F / f w \Delta p = \alpha / \varepsilon,$$

où le paramètre ε est la quantité d'énergie nécessaire pour surmonter la résistance revenant à une unité de la surface d'échauffement.

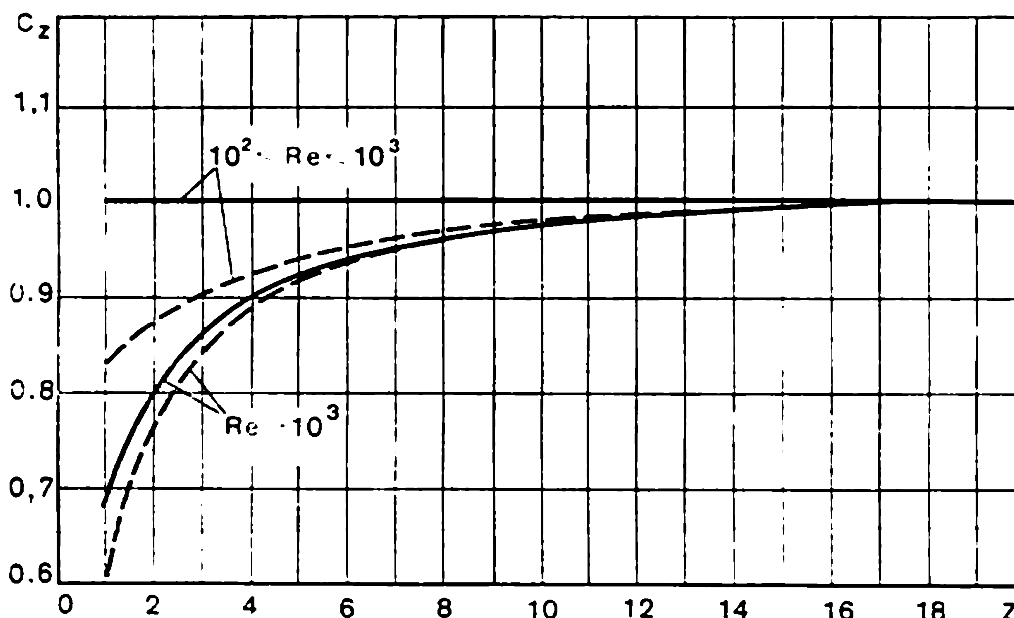


Fig. VI.69. Correction pour le nombre de rangées dans le calcul du transfert de chaleur d'un faisceau
——— en ligne; — — — — en quinconce

La figure VI.70 consigne les résultats des calculs de l'efficacité E des faisceaux de tubes d'un diamètre de 19 mm contournés par un courant d'eau à la température de 20 °C.

La figure VI.70 montre que pour les nombres Re de $5 \cdot 10^2$ à $5 \cdot 10^4$ l'arrangement en ligne des tubes est plus efficace que celui en quinconce. Bien que le transfert de chaleur suivant le premier mode dans ce domaine est inférieur à celui du deuxième, l'efficacité du premier est plus élevée par suite des pertes hydrauliques plus faibles. Pour des Re plus grands, l'efficacité du transfert de chaleur s'uniformise et l'arrangement en quinconce des tubes dans le faisceau devient quelque peu plus efficace, le paramètre déterminant dans ce domaine étant le pas des tubes.

L'efficacité de l'émission de chaleur E caractérise le processus d'échange de chaleur seulement du point de vue énergétique. Lors

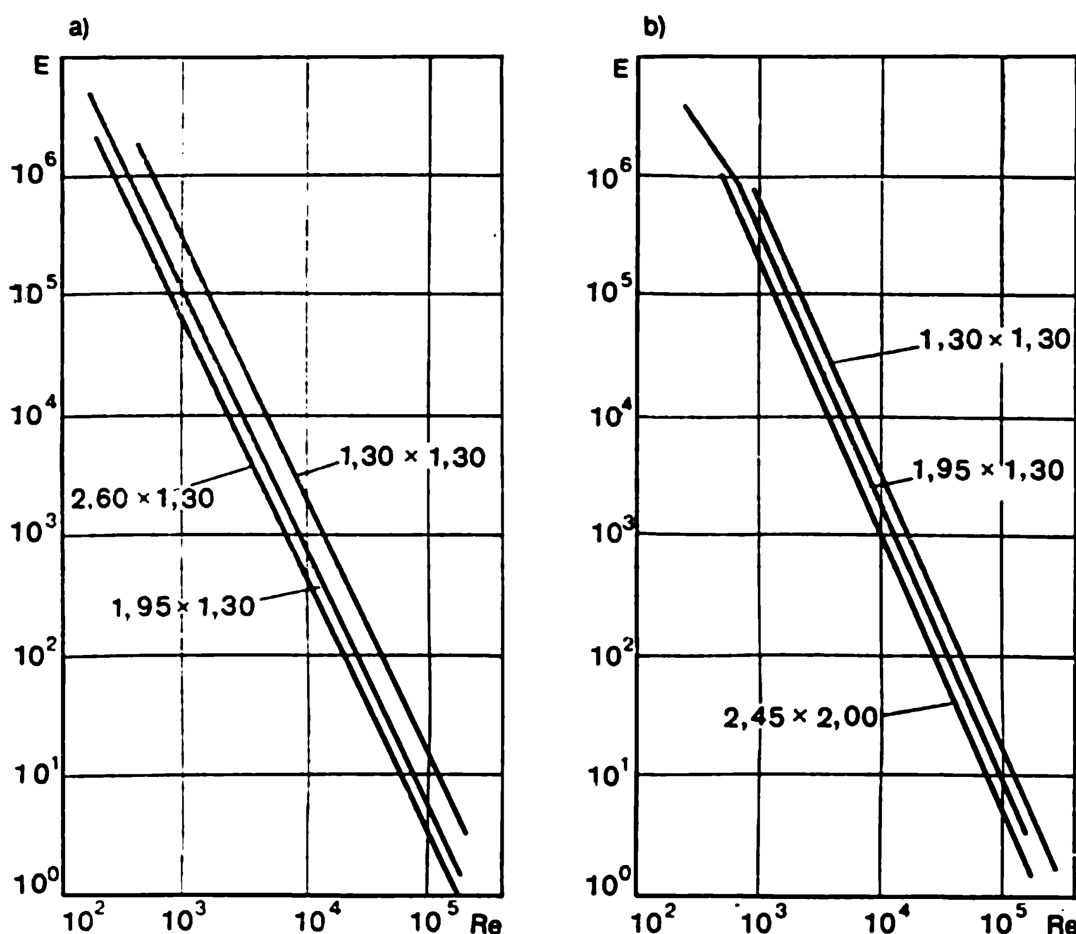


Fig. VI.70. Efficacité du transfert de chaleur d'un faisceau de tubes en quinconce (*a*) et en ligne (*b*) en fonction du nombre de Reynolds et la distance entre les tubes

du choix d'un échangeur, il faut tenir compte également d'autres impératifs, et rien que l'examen cumulé des frais d'exploitation et d'installation rend possible le choix de la version optimale.

§ VI.7. Méthodes de la protection thermique des corps contre l'action du courant d'un gaz à enthalpie élevée

La tendance principale du développement de la technique énergétique est l'augmentation des températures et des pressions maximales des caloporteurs et des fluides moteurs. Dans les installations énergétiques les températures maximales du gaz dépassent sensiblement les températures admissibles des matériaux dont sont construites les veines des machines thermiques. Dans ces conditions, le système de refroidissement acquiert une importance notable pour la fiabilité des pièces des machines thermiquement chargées et leur fonctionnement sans aléas.

En technique, les systèmes de refroidissement par film liquide ou par paroi poreuse trouvent une application de plus en plus large.

1. Echange de chaleur par convection en présence des rideaux de gaz

Pour protéger la surface du corps contre l'action de la chaleur d'un courant de gaz à enthalpie élevée on recourt largement en technique actuelle aux rideaux de gaz. Le gaz refroidissant est amené à la surface d'échange de chaleur et, en se propageant le long de cette dernière, forme un rideau. Il arrive qu'un tel rideau assure une protection thermique aussi bien que chimique.

Les figures VI.71, *a-c* schématisent les versions principales des rideaux de gaz. Ces versions rendent également possibles leurs com-

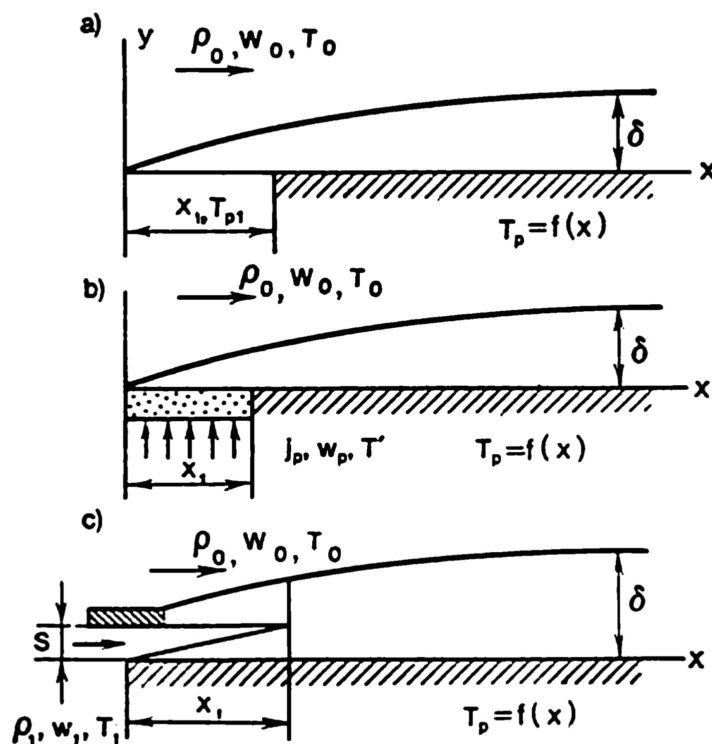


Fig. VI.71. Versions des rideaux de gaz

binaisons différentes. Par exemple, le refroidissement par film largement appliqué dans les moteurs-fusées à combustible liquide est combiné au refroidissement récupératif ordinaire de la paroi. La veine du moteur-fusée à combustible solide est exécutée ordinairement sous la forme de tronçons couverts de revêtements calorifuges différents; dans ce cas le rideau de gaz se propage le long de la surface avec le flux transversal de la substance.

Le paramètre déterminant de l'intensité de l'échange de chaleur en présence de rideau de gaz est ce qu'on appelle son *efficacité*

$$\Theta = (T_0 - T_p)/(T_0 - T_{p1}), \qquad \text{(VI.517)}$$

où T_0, T_p et T_{p1} sont respectivement les températures du courant d'amenée, de la paroi calorifuge et du gaz refroidissant.

De la sorte, en présence d'un rideau de gaz, son efficacité détermine la température de la paroi calorifuge

$$T_p = T_0 - \Theta (T_0 - T_{p1}). \qquad \text{(VI.518)}$$

Nous montrerons dans ce qui suit que la connaissance de cette température est également nécessaire pour calculer dans ces conditions l'échange de chaleur.

Dans le cas plus général de l'écoulement d'un gaz compressible soumis à des réactions chimiques l'efficacité du rideau de gaz se calcule à partir des enthalpies totales

$$\Theta = (h_0 - h_p)/(h_0 - h_{p1}). \qquad \text{(VI.519)}$$

Pour déduire la formule de l'efficacité, examinons le contournement longitudinal d'une surface plane par le courant d'un fluide

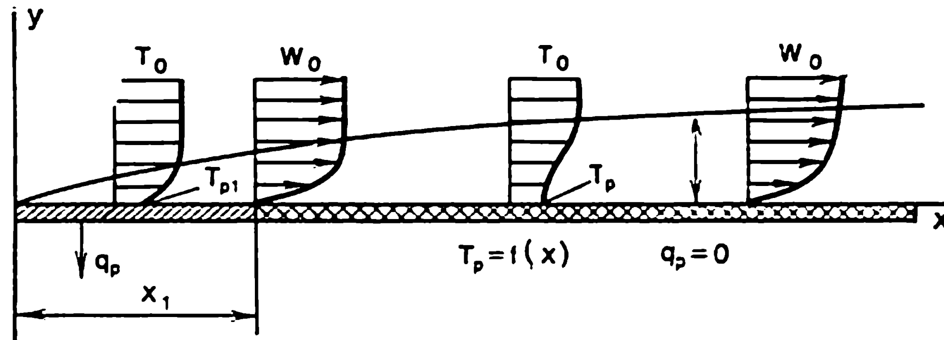


Fig. VI.72. Rideau de gaz

incompressible à paramètres physiques constants (fig. VI.72) [19]. Le tronçon de longueur x_1 est refroidi, et la température du mur dans la section x_1 est égale à T_{p1}, le refroidissement du mur dans cette région pouvant être assuré de la manière la plus différente (évacuation de la chaleur par la paroi du mur, insufflation du gaz refroidissant par une paroi poreuse ou une fente, refroidissement par film liquide, etc.). Dans le domaine $x > x_1$, le mur est thermiquement isolé et sa température change le long de la surface en s'approchant de la température du courant incident. L'échange de chaleur radiatif est négligé.

Pour le domaine $x > x_1$, $q_p = 0$, l'équation de l'énergie (VI.60) s'écrit

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\mathrm{Re}_T^{**}}{\Delta T}\frac{d(\Delta T)}{d\bar{x}} = 0, \qquad \text{(VI.520)}$$

son intégration de $\bar{x}_1$ à $\bar{x}$ permet d'obtenir

$$\mathrm{Re}_T^{**}\Delta T = \mathrm{Re}_{T1}^{**}\Delta T_1. \qquad \text{(VI.521)}$$

En introduisant le paramètre d'efficacité, il vient

$$\Theta = R_{T1}^{**}/\mathrm{Re}_T^{**}, \tag{VI.522}$$

où Re_{T1}^{**} est le nombre de Reynolds dans la section $\bar{x}_1$.

Bien entendu, l'équation (VI.521) est également vraie pour le cas plus général, si au lieu des températures on utilise des enthalpies totales.

Si pour $x > x_1$ la condition $T_p = T_{p1} = \text{const}$ était vraie, le nombre de Reynolds suivant l'épaisseur d'énergie (Re_{T0}^{**}) se calculerait d'après l'équation

$$\mathrm{Re}_{T0}^{**} = \left[(\mathrm{Re}_{T1}^{**})^{m+1} + \frac{m+1}{2} B\, \mathrm{Re}_{L1} \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}} \tilde{w}_0\, d\bar{x}\right]^{1/(m+1)}. \tag{VI.523}$$

Pour la couche limite à la surface calorifuge avec $x > x_1$ il faut que soient respectées les conditions suivantes

$$\begin{aligned} &\text{pour } y = 0 \qquad q_p = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0; \\ &\text{pour } y = \delta_T \qquad q = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{VI.524}$$

De la sorte, à l'intérieur de la couche limite la température est nivelée seulement sous l'effet du brassage moléculaire et turbulent et de l'aspiration du gaz à partir du courant extérieur. Ce brassage est le plus intense au voisinage de la paroi, où la dérivée $\partial w_x/\partial y$ est maximale. Il en résulte que le profil des températures se déforme de façon que le domaine $\partial T/\partial y \approx 0$ (ou à $T = T_p = \text{const}$) croît continûment par rapport à x. En même temps l'insufflation du gaz à partir du courant extérieur fait que la température de la couche limite s'approche de la température T_0, c'est-à-dire

$$\text{pour } x \to \infty, \quad T \to T_p \to T_0, \tag{VI.524}$$

Par définition, l'épaisseur d'énergie est

$$\delta_{T0}^{**} = \int_0^\infty \frac{w_x}{w_0}\left(1 - \frac{T - T_p}{T_0 - T_p}\right) dy.$$

Par conséquent, à la surface calorifuge

$$\text{pour } x \to \infty \quad \delta_T^{**} \to \int_0^\infty \frac{w_x}{w_0}\, dy. \tag{VI.525}$$

Introduisons le coefficient $\beta = \delta_T^{**}/\delta_{T0}^{**}$ qui vérifie les conditions aux limites: pour $x \to x_1$ $\beta \to 1$ et pour $x \to \infty$ $\beta \to \beta_{max}$, où

$$\beta_{max} = \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_0 w_0} dy \Big/ \int_0^\infty \frac{\rho w_x}{\rho_0 w_0}\left(1 - \frac{T - T_p}{T_0 - T_p}\right) dy. \qquad \text{(VI.526)}$$

Pour une couche limite laminaire

$$\omega = w_x/w_0 = 2(\xi - \xi^3) + \xi^4;\ \beta_{max} = 6{,}0,\ \text{où}\ \xi = y/\delta.$$

Dans la plupart des cas pratiques, le rideau de gaz est utilisé dans le domaine des grands Reynolds et dans la couche limite turbulente. Alors, en adoptant $\omega = \omega_0 = \xi^{1/7}$, on obtient $\beta_{max} = 9{,}0$.

Compte tenu des équations (VI.522) et (VI.523) et de la condition d'après laquelle pour $x \to \infty$ $\beta = \beta_{max}$, on obtient la formule de l'efficacité du rideau de gaz

$$\Theta = \left[1 + \frac{m+1}{2} B \left(\frac{\beta_{max}}{\mathrm{Re}_{T1}^{**}}\right)^{m+1} \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}} \mathrm{Re}_L \, d\bar{x}\right]^{-1/(m+1)}. \qquad \text{(VI.527)}$$

Pour la couche limite laminaire ($m = 1$, $B/2 = 0{,}22$)

$$\Theta = \left[1 + \frac{10{,}6}{(\mathrm{Re}_{T1}^{**})^2} \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}} \mathrm{Re}_L \, d\bar{x}\right]^{-0{,}5}. \qquad \text{(VI.528)}$$

Pour la couche limite turbulente ($m = 0{,}25$; $B/2 = 0{,}0128$)

$$\Theta = \left[1 + \frac{0{,}254}{(\mathrm{Re}_{T1}^{**})^{1{,}25}} \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}} \mathrm{Re}_L \, d\bar{x}\right]^{-0{,}8} \qquad \text{(VI.529)}$$

En particulier pour le contournement d'une plaque plane ($\mathrm{Re}_L =$ $=$ const):

pour une couche limite laminaire

$$\Theta = \left[1 + \frac{10{,}6}{(\mathrm{Re}_{T1}^{**})^2} \mathrm{Re}_{\Delta x}\right]^{-0{,}5}; \qquad \text{(VI.530)}$$

pour une couche limite turbulente

$$\Theta = \left[1 + \frac{0{,}254}{(\mathrm{Re}_{T1}^{**})^{1{,}25}} \mathrm{Re}_{\Delta x}\right]^{-0{,}8}, \qquad \text{(VI.531)}$$

où $\mathrm{Re}_{\Delta x} = \rho_0 w_0 (x - x_1)/\mu_0$.

Si on introduit $\mathrm{Re}^*_{\Delta x} = \int\limits_{\bar{x}_1}^{\bar{x}} \mathrm{Re}_L d\bar{x}$, les formules (VI.530) et(VI.531) peuvent être extrapolées au cas d'une loi arbitraire de la variation de la vitesse le long de la surface du corps.

En particulier pour une vitesse variant suivant une loi exponentielle $\tilde{w}_0 = \bar{x}^n$, on obtient

$$\mathrm{Re}^*_{\Delta x} = \mathrm{Re}_{L1} (\bar{x}^{n+1} - 1)/(n + 1), \qquad \text{(VI.532)}$$

où $\bar{x} = x/x_1$; $\tilde{w}_0 = w_0/w_{01}$.

Alors pour une couche limite laminaire l'efficacité du rideau de gaz s'écrit

$$\Theta = \left[1 + \frac{10,6}{(\mathrm{Re}^{**}_{T1})^2} \mathrm{Re}_{L1} \frac{\bar{x}^{n+1} - 1}{n+1}\right]^{-0,5}; \qquad \text{(VI.533)}$$

et pour une couche limite turbulente

$$\Theta = \left[1 + \frac{0,254}{(\mathrm{Re}^{**}_{T1})^{1,25}} \mathrm{Re}_{L1} \frac{\bar{x}^{n+1} - 1}{n+1}\right]^{-0,8}. \qquad \text{(VI.534)}$$

Les formules (VI.533) et (VI.534) impliquent que l'efficacité diminue pour des courants accélérés ($dw_0/dx > 0$; $n > 0$) et augmente pour des courants ralentis ($dw_0/dx < 0$; $n < 0$).

La formule (VI.527) peut être extrapolée également à l'écoulement d'un gaz compressible. Compte tenu des équations (VI.302) on obtient

$$\Theta = \left[1 + \frac{B}{2}(1 + m)\beta_{\max}^{m+1} \int\limits_{\bar{x}_1}^{\bar{x}} \frac{\Psi \,\mathrm{Re}_L \, d\bar{x}}{(\mathrm{Re}^{**}_{T01})^{m+1}}\right]^{-1/(m+1)}, \qquad \text{(VI.535)}$$

où

$$\Psi = \left[\frac{2\,\mathrm{arctg}\left(M_0 \sqrt{0,5r(k-1)}\right)}{\left(\sqrt{\bar{\psi}}+1\right) M_0 \sqrt{0,5r(k-1)}}\right]^2 \left(\frac{\mu_p}{\mu_{00}}\right)^m; \qquad \text{(VI.536)}$$

$$\bar{\psi} = T_p/T^*_p. \qquad \text{(VI.537)}$$

Déduisons les formules de l'efficacité du rideau de gaz schématisé par la figure VI.73.

La relation intégrale de l'énergie pour une surface perméable avec $T_p = \mathrm{const}$

$$\frac{d\mathrm{Re}^{**}_T}{d\,\mathrm{Re}_x} = \mathrm{St} + \bar{j}_p. \qquad \text{(VI.538)}$$

En retenant que $\mathrm{St} = \frac{q_p}{\rho_0 w_0 c_p (T_0 - T_p)}$, et $q_p = j_p c_p (T_p - T')$, on obtient

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{d\,\mathrm{Re}_x} = \frac{j_p}{\rho_0 w_0} (1 + K_1), \tag{VI.539}$$

où $K_1 = (T_{p1} - T')/(T_0 - T_{p1})$.

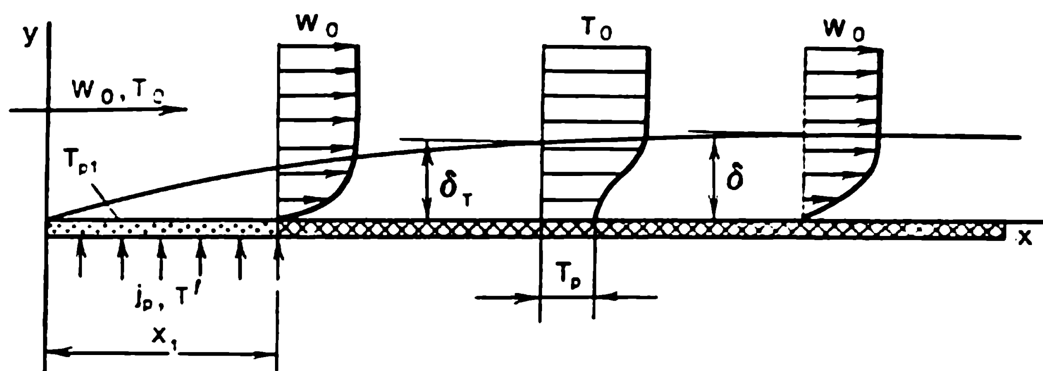


Fig. VI.73. Rideau de gaz à secteur poreux

Par conséquent, lorsqu'on insuffle le gaz refroidissant par une plaque poreuse

$$\mathrm{Re}_{T1}^{**} = \mathrm{Re}_{p1} (1 + K_1), \tag{VI.540}$$

où $\mathrm{Re}_{p1} = \frac{1}{\mu_0} \int\limits_0^{x_1} j_p \, dx$.

Dans le cas d'une insufflation critique $T' = T_{p1}$; $K = 1$ et $\mathrm{Re}_{T1}^{**} = \mathrm{Re}_{p1}$.

Les formules de l'efficacité des rideaux lors de l'insufflation du gaz par une paroi poreuse, compte tenu des équations (VI.527) et (VI.540), s'écrivent

pour une couche limite laminaire

$$\Theta = \left[1 + \frac{10{,}6}{[\mathrm{Re}_{p1} (1 + K_1)]^2} \int\limits_1^{\bar{x}} \mathrm{Re}_{x1} \, d\bar{x} \right]^{-0{,}5}; \tag{VI.541}$$

pour une couche limite turbulente

$$\Theta = \left[1 + \frac{0{,}254}{[\mathrm{Re}_{p1} (1 + K_1)]^{1{,}25}} \int\limits_1^{\bar{x}} \mathrm{Re}_{x1} \, d\bar{x} \right]^{-0{,}8} \tag{VI.542}$$

Les figures VI.74 et VI.75 comparent les résultats obtenus d'après la formule (VI.542) avec les données expérimentales de différents chercheurs.

Pour l'écoulement du gaz compressible on obtient compte tenu de (VI.535)

$$\Theta=\left\{1+\frac{0{,}25\,\mathrm{Re}_{00}\Psi_{t1}\left(\frac{\mu_{p1}}{\mu_{00}}\right)^{0,25}\int\limits_{1}^{\bar{x}}\Psi_{M}U\left(1-U^{2}\right)^{1/(k-1)}d\bar{x}}{(1+K_{1})^{1,25}\,\mathrm{Re}_{p1}^{1,25}}\right\}^{-0,8},\tag{VI.543}$$

où l'indice « 00 » se rapporte aux paramètres de freinage.

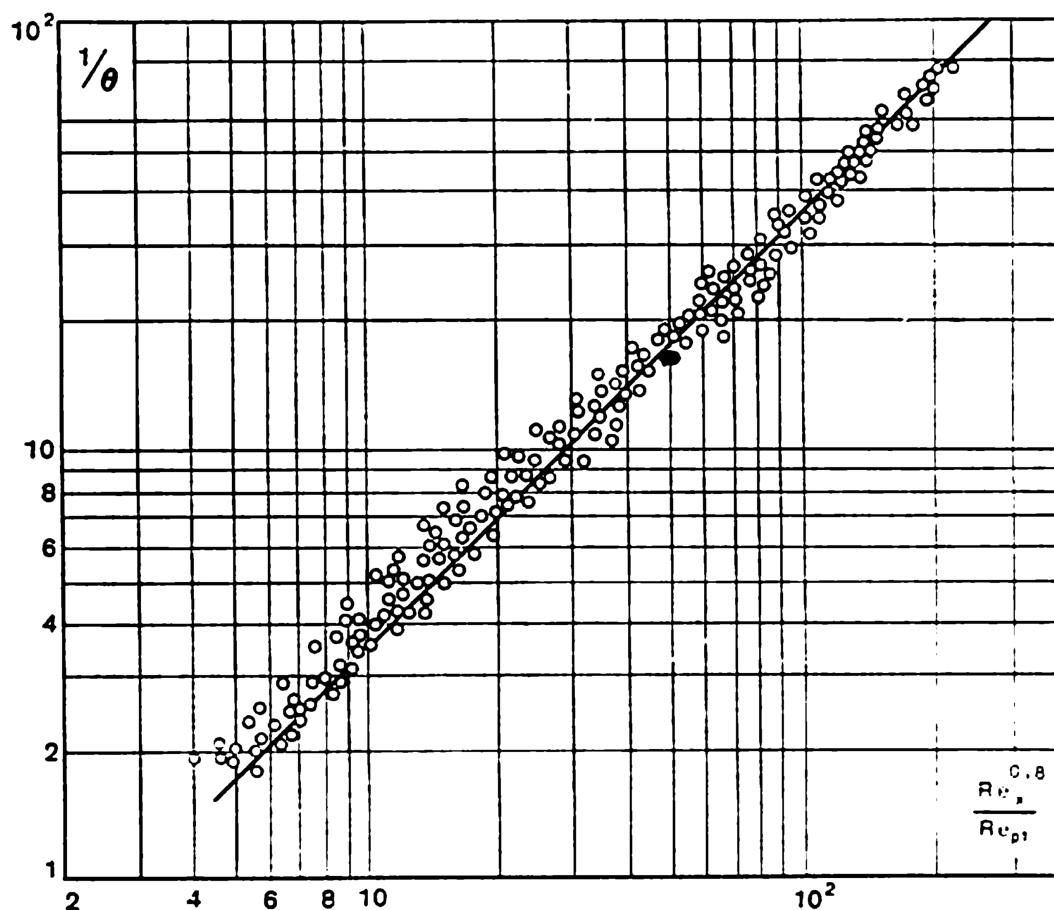


Fig. VI.74. Efficacité d'un rideau de gaz à secteur poreux (w_0 = const): ——— — calcul d'après la formule (VI.542); ○ — données expérimentales [19]

Pour l'écoulement du gaz dans une tuyère supersonique on obtient à partir de l'équation de l'énergie d'une couche limite symétrique à l'axe

$$\Theta=\frac{D_1}{D}\,\frac{\mathrm{Re}_{T1}^{**}}{\mathrm{Re}_{T}^{**}}.\tag{VI.544}$$

Compte tenu de l'équation de continuité de la tuyère

$$D_1^2 U_1 (1 - U_1^2)^{1/(k-1)} = D^2 U (1 - U^2)^{1/(k-1)} \qquad \text{(VI.545)}$$

on a

$$\Theta = \left\{ 1 + \frac{0{,}25\, \mathrm{Re}_{00}\, \Psi_{t1} (\mu_{p1}/\mu_{00})^{0{,}25}}{(1+K_1)^{1{,}25}\, \mathrm{Re}_{p1}^{1{,}25} \overline{D}^{1{,}25}} \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}} \Psi_M (\overline{D})^{m-1}\, d\bar{x} \right\}^{-0{,}8}. \qquad \text{(VI.546)}$$

En connaissant la relation entre le diamètre de la tuyère et, par suite, le nombre M, et la longueur x, on calcule la variation de l'ef-

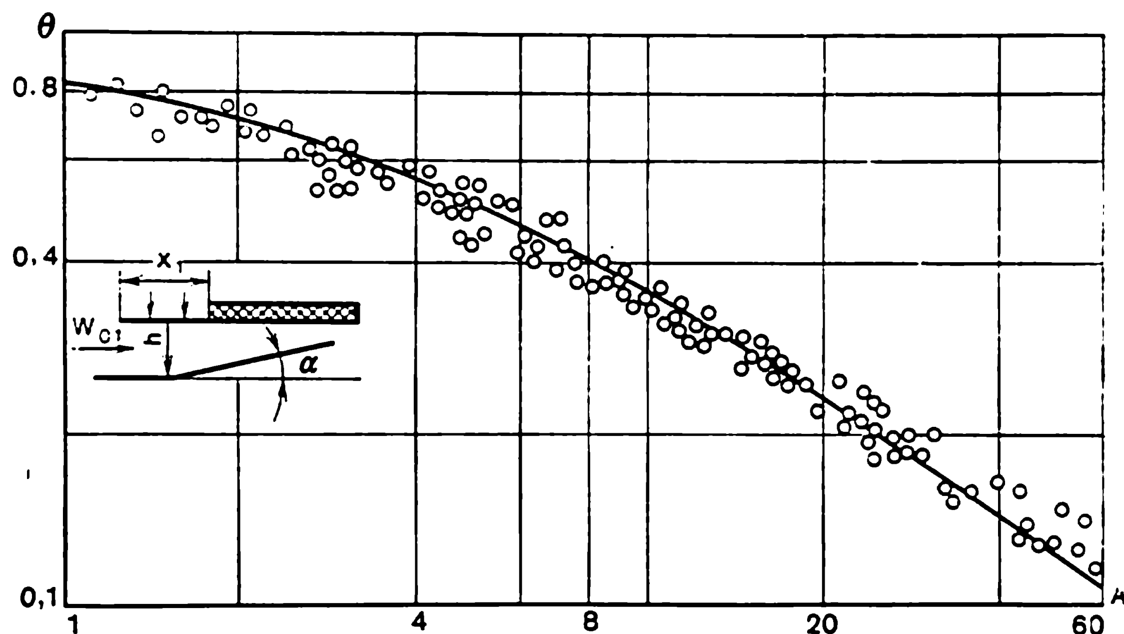


Fig. VI.75. Efficacité d'un rideau de gaz à secteur poreux dans le cas de gradient de pression longitudinal:

———— — calcul d'après la formule (VI.542) $A = \int_1^{\bar{x}} \mathrm{Re}_x\, dx_1 / [\mathrm{Re}_{p1} (1 + K_1)]^{1{,}25}$;

○ — données expérimentales [19]

ficacité du rideau suivant la longueur de la tuyère. Puisque dans la partie supersonique de la tuyère $\Psi_M < 1$, l'équation (VI.546) entraîne que l'efficacité du rideau dans le cas d'un gaz compressible est plus élevée que dans celui d'un fluide incompressible.

La figure VI.76 compare les données expérimentales fournies par un courant supersonique avec les calculs effectués d'après la formule (VI.543) pour le cas du contournement d'une plaque plane (U = const).

Examinons un rideau produit par l'insufflation du gaz refroidissant par une fente (fig. VI.77). On adopte que les paramètres physiques des gaz principal et insufflé sont constants et identiques.

Dans la région $0 < x < x_1$ la plaque est contournée seulement par le gaz insufflé et la température de la plaque est égale à celle du gaz, c'est-à-dire $T_p = T_{p1} = T_1$. Dans la section $x = x_1$ s'amorce la constitution de la couche limite thermique sous l'effet du brassage du gaz de rideau avec le courant principal.

En utilisant les relations connues pour les jets turbulents [2], on peut adopter pour le domaine $w_1 < w_0$

$$x_1/S = (0{,}107 + 0{,}037w_1/w_0)^{-1}(w_0 + w_1)/(w_0 - w_1). \quad \text{(VI.547)}$$

Dans certains cas on peut négliger la région x_1, c'est-à-dire poser $x - x_1 \approx x$ et obtenir par là même une certaine marge d'efficacité.

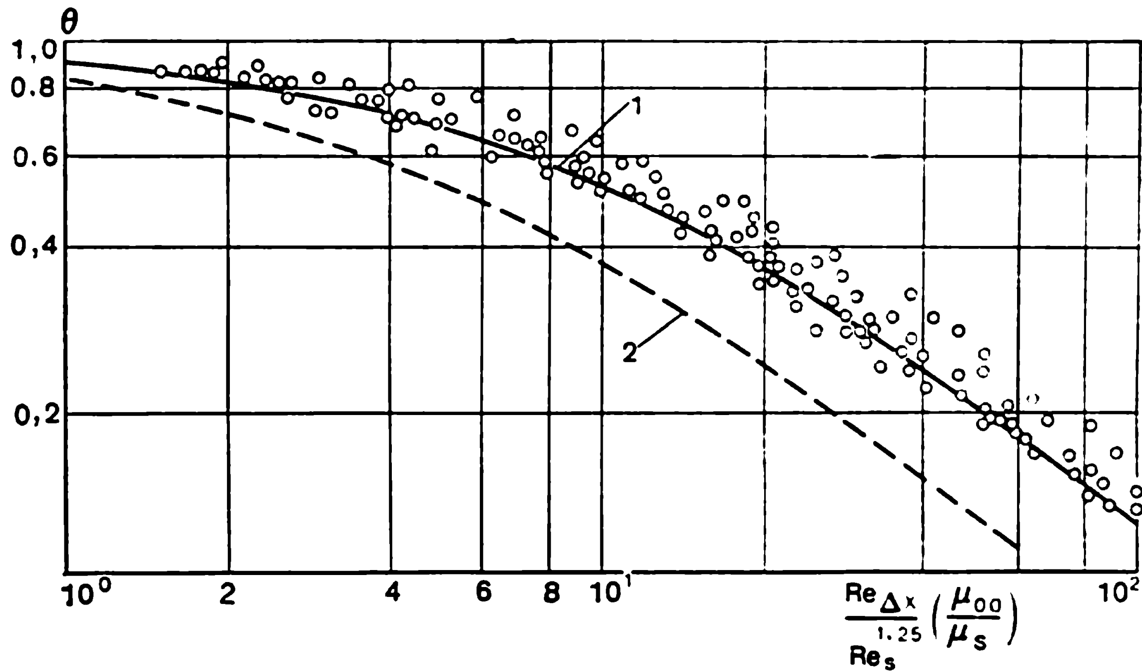


Fig. VI.76. Efficacité d'un rideau de gaz dans un courant supersonique de gaz: *1* — calcul d'après la formule (VI.543); *2* — calcul d'après la formule (VI.542); ○ — données expérimentales [19]

La figure VI.77 implique que pour la section x_1

$$\int_0^\delta c_p\rho wT\,dy = c_p\rho_1 w_1 T_1\delta + c_p\rho_0 w_0 T_0(\delta - S); \quad \text{(VI.548)}$$

$$\int_0^\delta \rho w\,dy = \rho_1 w_1 S + \rho_0 w_0(\delta - S). \quad \text{(VI.549)}$$

Par définition, l'épaisseur d'énergie

$$\delta_T^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho w}{\rho_0 w_0}\left(1 - \frac{T - T_p}{T_0 - T_p}\right)dy$$

et pour la section $x = x_1$, où $T_p = T_{p1}$, compte tenu des équations (VI.548) et (VI.549), on a

$$\rho_0 w_0 \Delta T_1 \delta_{T1}^{**} = \int_0^\delta \rho w (T_0 - T)\, dy = T_0 \rho_1 w_1 S +$$
$$+ T_0 \rho_0 w_0 (\delta - S) - T_0 \rho_0 w_0 (\delta - S) - \rho_1 w_1 S T_1 =$$
$$= (T_0 - T_1) \rho_1 w_1 S. \quad \text{(VI.550)}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Re}_{T1}^{**} = \rho_1 w_1 S/\mu_0 = \mathrm{Re}_S. \quad \text{(VI.551)}$$

Ainsi, l'efficacité du rideau de gaz produit par l'insufflation par une fente du gaz refroidissant se calcule d'après les formules:

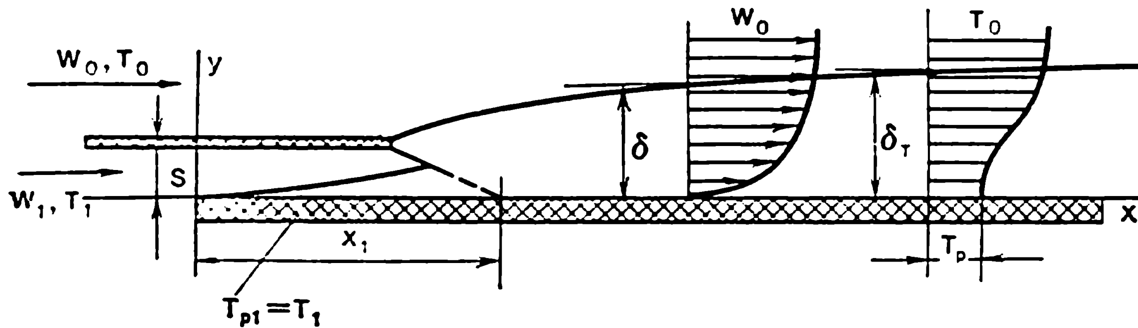


Fig. VI.77. Schéma d'un rideau de gaz à fente

couche limite laminaire

$$\Theta = \left[1 + \frac{10{,}6}{(\mathrm{Re}_S)^2} \mathrm{Re}_{\Delta x}^{*}\right]^{-0,5}; \quad \text{(VI.552)}$$

couche limite turbulente

$$\Theta = \left[1 + \frac{0{,}254}{(\mathrm{Re}_S)^{1,25}} \mathrm{Re}_{\Delta x}^{*}\right]^{-0,8}. \quad \text{(VI.553)}$$

La figure VI.78 compare les données expérimentales obtenues par divers chercheurs avec la formule (VI.553).

Pour le cas du contournement d'une surface curviligne par un courant de gaz compressible, on a

$$\Theta = \left[1 + \frac{0{,}016\beta^{1,25} \Psi_{t1} (\mu_{p1}/\mu_{00})^{0,25} \mathrm{Re}_{00} \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}} \Psi_M U (1 - U^2)^{1/(k-1)}\, d\bar{x}}{(\mathrm{Re}_{S00})^{1,25}}\right]^{-0,8}. \quad \text{(VI.554)}$$

Il convient de noter que toutes les formules de l'efficacité du rideau peuvent être extrapolées à l'insufflation du gaz différent de celui du courant incident. Dans ce cas l'efficacité se calcule d'après les enthalpies du gaz

$$\Theta_h = (h_0 - h_p^*)/(h_0 - h_{p1}). \qquad \text{(VI.556)}$$

Pour Sc = 1, les distributions des enthalpies et des concentrations totales du gaz insufflé doivent être semblables; donc

$$\Theta_h = (h_0 - h_p^*)/(h_0 - h_{p1}) = C_0 - C_p/(C_0 - C_{p1}). \qquad \text{(VI.557)}$$

D'où

$$C_p^* = C_0 - \Theta_h (C_0 - C_{p1}), \qquad \text{(VI.558)}$$

où C_p^* est la part de la composante insufflée sur la paroi calorifuge; C_{p1}, la part de la composante insufflée dans la section x_1 de la paroi.

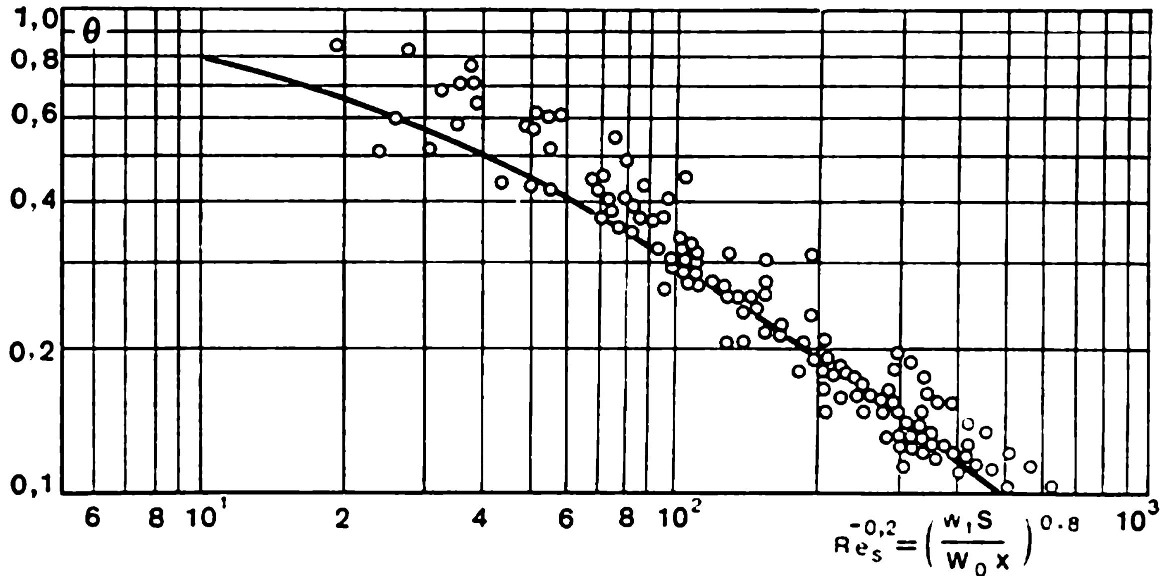


Fig. VI.78. Efficacité d'un rideau de gaz pour l'insufflation par la fente: ———— — calcul d'après la formule (VI.553); ○ — données expérimentales [19]

La figure VI.79 compare les calculs des parts du gaz insufflé sur la paroi avec les données expérimentales.

Pour calculer la température de la paroi calorifuge lors de l'insufflation du gaz étranger, écrivons l'équation de la capacité thermique d'un mélange binaire des gaz sur la paroi

$$c_{pp}^* = c_{pS} C_p^* + c_{p0}(1 - C_p) = c_{p0} + (c_{pS} - c_{p0}) C_p^*. \qquad \text{(VI.559)}$$

L'équation (VI.556) entraîne

$$\Theta_h = (c_{p0} T_0 - c_{pp}^* T_p^*)/(c_{p0} T_0 - c_{pp1} T_{p1}). \qquad \text{(VI.560)}$$

On en tire compte tenu de (VI.559)

$$\Theta_t = \frac{T_0 - T_p^*}{T_0 - T_{p1}} = \frac{\Theta_h (c_{p0} T_0 - c_{pp1} T_{p1}) - (c_{pp1} - c_{p0}) T_0 C_p^*}{[c_{p0} + (c_{pp1} - c_{p0}) C_p^*] (T_0 - T_{p1})}. \quad \text{(VI.561)}$$

Dans le cas d'insufflation du gaz étranger par une fente tangentielle $C_0 = 0$, $C_{p1} = 1$; $T_{p1} = T_S$; $c_{pp1} = c_{pS}$, on obtient en ap-

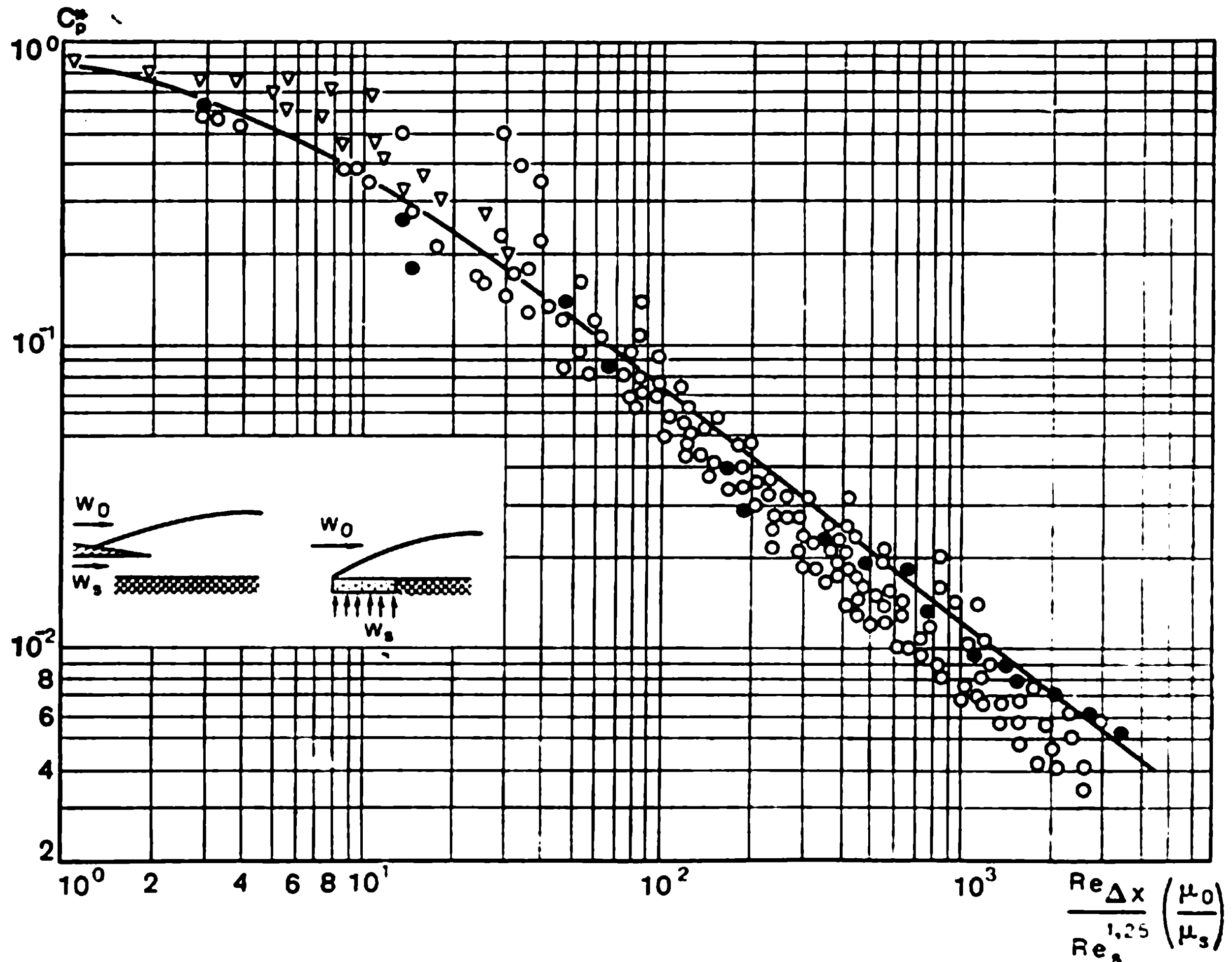


Fig. VI.79. Efficacité d'un rideau de gaz lors de l'insufflation du gaz étranger: ———— — calcul d'après la formule (VI.562); ○, ● — données expérimentales [19]

pliquant l'équation (VI.561)

$$\Theta_t = \frac{\Theta_h c_{pS}}{\Theta_h (c_{pS} - c_{p0}) + c_{p0}}. \quad \text{(VI.562)}$$

La température de la paroi calorifuge se calcule d'après la formule

$$T_p^* = T_0 - \Theta_t (T_0 - T_1) = T_0 - \frac{\Theta_h c_{pS}}{\Theta_h (c_{pS} - c_{p0}) + c_{p0}} (T_0 - T_1).$$

De cette façon, lorsque la capacité thermique du gaz refroidissant croît, les autres conditions étant égales, la température de la paroi calorifuge baisse.

Généralement, le rideau de gaz s'emploie avec le refroidissement usuel et il faut savoir calculer les coefficients de transmission de chaleur locaux et les flux thermiques pour ces conditions.

L'équation intégrale de l'énergie pour le domaine $x > x_1$ peut s'écrire

$$d/dx\,[(T_p - T_p^*)\,\delta_T^{**} + (T_p^* - T_0)\,\delta_{T1}^{**}] = q_p/gc_p\rho_0 w_0, \qquad \text{(VI.563)}$$

où

$$\delta_T^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{\rho w}{\rho_0 w_0} \left(\frac{T - T'}{T_p - T_p^*}\right) dy\,; \qquad \text{(VI.564)}$$

$$\delta_{T1}^{**} = \int_0^{\delta_T} \frac{\rho w}{\rho_0 w_0} \left(\frac{T' - T_0}{T_p^* - T_0}\right) dy, \qquad \text{(VI.565)}$$

T_p^* est la température de la surface calorifuge ; T', la température de la couche limite au point donné à la surface calorifuge.

En vertu de l'équation (VI.520)

$$\frac{d}{dx}\,[(T_p^* - T_0)\,\delta_{T1}^{**}] = 0. \qquad \text{(VI.566)}$$

Par conséquent,

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\mathrm{Re}_T^{**}}{\Delta T^*}\,\frac{d\,(\Delta T^*)}{d\bar{x}} = \mathrm{Re}_L\,\mathrm{St}_0, \qquad \text{(VI.567)}$$

où $\mathrm{St}_0 = q_p/(c_{p0}\rho_0 w_0 \Delta T^*)$; $\Delta T^* = T_p^* - T_p$; $\mathrm{Re}_T^{**} = \rho_0 w_0 \delta_T^{**}/\mu_0$.

Ainsi, pour la surface d'échange de chaleur en présence d'un rideau de gaz la relation intégrale de l'énergie conserve la forme usuelle, si au lieu de ΔT on porte $\Delta T^* = T_p - T_p^*$ et si on calcule l'épaisseur d'énergie d'après la formule (VI.565).

Adoptons l'hypothèse de la loi d'échange de chaleur sous la forme (VI.241), justifiée également pour les conditions envisagées si δ_T^{**} se calcule d'après l'équation (VI.565), et St, d'après l'équation (VI.567), c'est-à-dire

$$\mathrm{St}_0 = \frac{B}{2}\,(\mathrm{Re}_T^{**})^{-m}\,\mathrm{Pr}^{-n}. \qquad \text{(VI.568)}$$

Compte tenu de (VI.568), l'intégrale de l'équation de l'énergie s'écrit

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \frac{1}{\left[\Theta - \frac{T_0 - T_p}{T_0 - T_{p1}}\right]} \left\{ \frac{(m+1)B}{2\mathrm{Pr}^{0,75}} \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}} \mathrm{Re}_L \left[\Theta - \frac{T_0 - T_p}{T_0 - T_{p1}}\right]^{m+1} d\bar{x} + (\mathrm{Re}_T^{**})^{m+1}_{\bar{x} = \bar{x}_1} \right\}^{1/(m+1)}. \qquad \text{(VI.569)}$$

Les équations de Θ permettent d'après l'équation (VI.569) de calculer Re_T^{**} et d'après l'équation (VI.568), les valeurs locales du critère de Stanton. La valeur des flux thermiques locaux vers la paroi est déterminée par la formule

$$q_p = c_{p0}\rho_0 w_0 (T_p^* - T_p)\, \mathrm{St}_0, \qquad \text{(VI.570)}$$

où $T_p^* = T_0 - \Theta(T_0 - T_{p1})$ et l'efficacité du rideau Θ est donnée par la formule (VI.554).

2. Refroidissement par paroi poreuse

C'est le mode dans lequel le gaz refroidissant pénètre dans la couche limite à travers une surface perméable. Si l'agent de refroidissement est un liquide, le mode est dit *par suage* ou *transpiration*. Dans le cas du refroidissement par paroi poreuse, le débit du gaz par rapport aux autres modes d'établissement des rideaux est minimal.

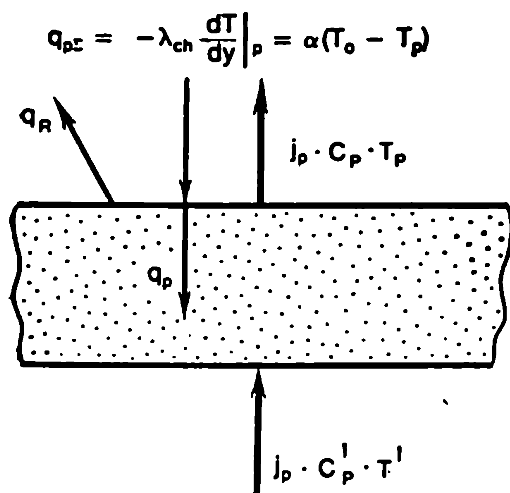


Fig. VI.80. Flux thermiques schématisés dans le refroidissement poreux

La figure VI.80 schématise les flux thermiques dans le cas du refroidissement par paroi poreuse.

Le flux thermique émanant du gaz chaud est transmis à la surface du matériau poreux pour se propager à l'intérieur du matériau en fonction de sa conductivité thermique. Le gaz refroidissant, en passant par le matériau poreux, accumule cette chaleur et s'échauffe jusqu'à la température de la paroi. Le bilan thermique de la surface d'échange de chaleur peut donc s'écrire

$$q_p = j_p c'_p (T_p - T'). \qquad \text{(VI.571)}$$

Considérons le cas de la donnée des paramètres du gaz principal, du gaz refroidissant et de la température de la paroi (fig. VI.81),

alors qu'il faut déterminer le débit du gaz refroidissant nécessaire pour assurer la température imposée de la paroi.

L'équation (VI.571) implique que

$$b_{T1} = (T_0 - T_{p1})/(T_p - T') = 1/K, \qquad \text{(VI.572)}$$

ou

$$Kb_T = \Psi_S. \qquad \text{(VI.573)}$$

Par conséquent, pour une couche limite plane l'équation de l'énergie se met sous la forme

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_T^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\mathrm{Re}_T^{**}}{\Delta T}\frac{d\,(\Delta T)}{d\bar{x}} = \mathrm{Re}_L\,\mathrm{St}_0\,\Psi_S\left(\frac{K+1}{K}\right). \qquad \text{(VI.574)}$$

Compte tenu des équations (VI.574) et (VI.241), on a

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \frac{1}{\Delta T}\left\{\frac{1+m}{2\,\mathrm{Pr}^{n_1}}B\,\mathrm{Re}_{L0}\int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}}\Delta T^{1+m}\tilde{w}\Psi_S\left(\frac{1+K}{K}\right)d\bar{x} + \right.$$
$$\left. + (\mathrm{Re}_T^{**}\,\Delta T)_{\bar{x}_0}^{1+m}\right\}^{1/(1+m)}. \qquad \text{(VI.575)}$$

La loi relative d'échange de chaleur Ψ_S se calcule d'après les formules (VI.280), (VI.282).

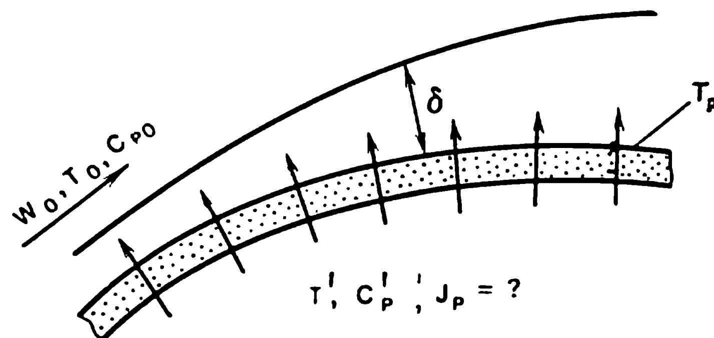


Fig. VI.81. Illustration du calcul du refroidissement poreux

Le débit du gaz refroidissant à travers la paroi poreuse se trouve d'après la formule

$$j_p = \rho_0 w_0 \mathrm{St}_0\,\Psi_S b_{T_1}, \qquad \text{(VI.576)}$$

où $\mathrm{St}_0 = \dfrac{B}{2\,(\mathrm{Re}_p^{**})^m\,\mathrm{Pr}^{n_1}}$; $\quad \mathrm{Re}_p^{**} = \mathrm{Re}_T^{**}\left(\dfrac{\mu_p}{\mu^*}\right)$.

Pour le domaine des vitesses subsoniques de l'écoulement du gaz, T_p et T' étant constantes et les conditions aux limites $\mathrm{Re}_T^{**} = 0$ pour $x = 0$, on a

$$\mathrm{Re}_T^{**} = \left\{ \frac{1+m}{2\,\mathrm{Pr}^{n_1}} B\Psi_S \left(\frac{K+1}{K}\right) \mathrm{Re}_{L1} \int_0^{\bar{x}} \tilde{w}_0\, d\bar{x} \right\}^{1/(m+1)}. \qquad \text{(VI.577)}$$

Dans ce cas la formule du débit du gaz refroidissant est de la forme

$$j_p = \left(\frac{B}{2}\right)^{1/(m+1)} \times$$

$$\times \frac{\mu_0 \tilde{w}_0 \mathrm{Re}_{L_0}^{1/(m+1)} \Psi_S^{1/(m+1)} b_{T_1}}{L\,\mathrm{Pr}^{n_1/(1+m)} \left[(1+m)(1+b_{T_1}) \int_0^{\bar{x}} \tilde{w}_0\, d\bar{x}\right]^{m/(m+1)}}, \qquad \text{(VI.578)}$$

et pour le contournement d'une plaque plane ($\tilde{w}_0 = 1$)

$$j_p = \left(\frac{B}{2}\right)^{1/(m+1)} \frac{\mu_0}{L} \times$$

$$\times \frac{\mathrm{Re}_{L_0}^{1/(m+1)} \Psi_S^{1/(m+1)} b_{T_1}}{\mathrm{Pr}^{n_1/(1+m)} [(1+m)(1+b_{T_1}\bar{x}]^{m/(m+1)}}. \qquad \text{(VI.579)}$$

Pour une couche limite laminaire $B/2 = 0{,}22$ et $m = 1$. Pour une couche limite turbulente $B/2 = 0{,}0128$ et $m = 0{,}25$.

Il s'ensuit de la formule (VI.579) que pour maintenir constante la température de la paroi poreuse le débit du gaz refroidissant doit diminuer suivant la longueur de la plaque : pour une couche limite laminaire $j_p \sim x^{-0{,}5}$, et pour une couche limite turbulente, $j_p \sim$ $\sim x^{-0{,}2}$.

Pour la loi exponentielle de la variation de la vitesse ($\tilde{w}_0 \sim x^n$), on a

$$j_p = \left(\frac{B}{2}\right)^{1/(1+m)} \frac{\mu_0}{L} \times$$

$$\times \frac{\bar{x}^{(n-m)/(1+m)} \mathrm{Re}_0^{1/(1+m)} \Psi_S^{1/(1+m)} b_{T_1}}{\mathrm{Pr}^{n_1/(1+m)} \left[\frac{1+m}{1+n}(1+b_{T_1})\right]^{m/(1+m)}}. \qquad \text{(VI.580)}$$

Au voisinage du point d'attaque ($n = 1$) pour une couche limite laminaire j_p = const et pour une couche limite turbulente, $j_p \sim x^{0{,}6}$.

En connaissant le débit du gaz refroidissant j_p, la température de la surface d'échange de chaleur T_p et la température initiale du gaz T', on calcule sans peine la distribution de la température suivant l'épaisseur de la surface de la paroi poreuse.

§ VI.8. Echange de chaleur dans l'écoulement des gaz raréfiés

Le développement de nouvelles branches de la technique, surtout dans le domaine cosmique, a accru l'intérêt porté à l'exploration des processus d'échange de chaleur dans les gaz raréfiés, lorsqu'il faut prendre en considération la structure discrète du gaz. Il en est ainsi dans le cas où la densité du gaz est si faible que le libre parcours moyen des molécules $\bar{l}$ est commensurable avec la dimension linéaire caractéristique L du corps ou du processus (épaisseur de la couche limite, onde de choc, coup de bélier, diamètre du canal, etc.).

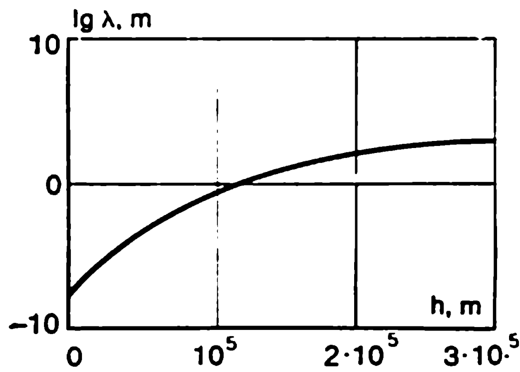


Fig. VI.82. Variation de la longueur de parcours moyenne des molécules de l'air avec l'altitude

La théorie cinétique des gaz enseigne qu'il existe le rapport suivant entre la viscosité du gaz et le libre parcours

$$\mu = 0{,}499\rho\, \bar{v}\bar{l}. \quad \text{(VI.581)}$$

D'autre part, la vitesse moyenne des molécules $\bar{v}$ est associée à la vitesse du son a par la relation

$$\bar{v} = \sqrt{8/\pi}\sqrt{p/\rho} = a\sqrt{8/(\pi k)}, \qquad \text{(VI.582)}$$

où $k = c_p/c_V$.

Donc,

$$\bar{l} = \frac{1{,}255\sqrt{k}\cdot a}{\nu}. \qquad \text{(VI.583)}$$

Le libre parcours moyen des molécules de l'air dépend de l'altitude. Comme le montre la courbe de la figure VI.82, à une altitude de $80\cdot 10^3$ m le libre parcours moyen des molécules est d'environ 25 mm ; dans ces conditions, si la dimension caractéristique du corps est de même ordre, l'air ne peut déjà plus être considéré comme un milieu continu.

L'équation (VI.583) entraîne que

$$\frac{l}{\delta} = \frac{l}{L}\frac{L}{\delta} \approx \frac{L}{\delta}\frac{\nu}{a}\frac{1}{L} \sim \frac{L}{\delta}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Re}}. \qquad \text{(VI.584)}$$

Pour $\mathrm{Re} \ll 1$ on a $L/\delta \approx 1$; donc

$$l/\delta \sim \mathrm{M/Re}. \qquad \text{(VI.585)}$$

La théorie de la couche limite laminaire entraîne pour de grandes valeurs de Re que $L/\delta \sim \sqrt{\mathrm{Re}}$. Par conséquent,

$$l/\delta \sim \mathrm{M}/\sqrt{\mathrm{Re}} \text{ pour } \mathrm{Re} \gg 1. \qquad (\mathrm{VI}.586)$$

Le rapport $l/\delta = \mathrm{Kn}$ s'appelle *nombre de Knudsen.*

Lorsque le libre parcours moyen l est petit mais non négligeable devant la dimension du corps L ou l'épaisseur de la couche limite δ, l'écoulement du gaz près de la paroi est dit *glissant.* A ce type d'écou-

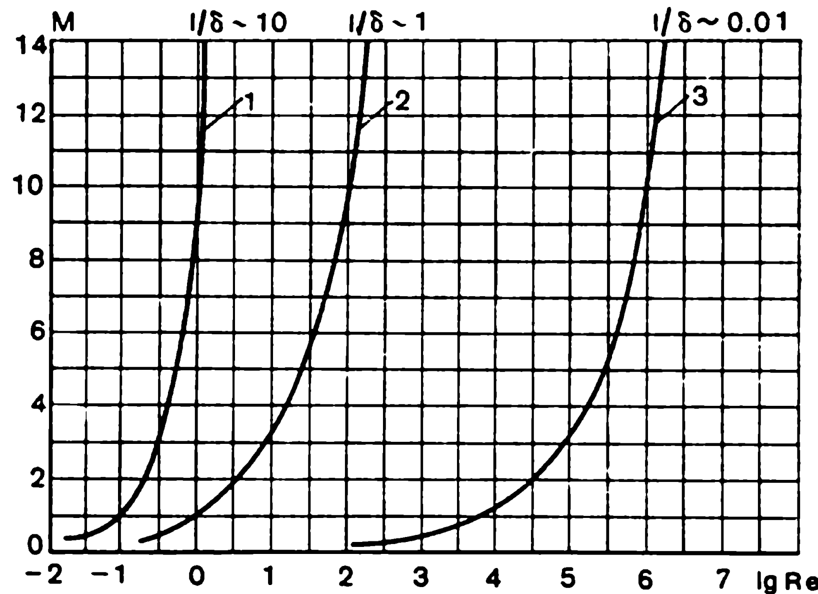


Fig. VI.83. Domaines de l'écoulement du gaz:
1 — écoulement moléculaire libre; *2* — écoulement avec glissement; *3* — dynamique ordinaire du gaz

lement correspond l'intervalle $0{,}01 < l/\delta < 1$. Ce domaine est délimité sur la figure VI.83 en coordonnées M et Re par les courbes $l/\delta = 1$ et $l/\delta = 0{,}01$.

A droite de la courbe $l/\delta = 0{,}01$ repose le *domaine aérodynamique ordinaire* qui justifie les hypothèses sur le milieu continu.

Si le libre parcours moyen est bien plus grand que les dimensions du corps, on est en présence d'un *écoulement moléculaire libre* défini sur la figure VI.83 par la relation $l/L \sim \mathrm{M}/\mathrm{Re} > 10$. Les collisions des molécules entre elles font que dans cette région la variation de la quantité de mouvement des molécules est bien inférieure à la variation due aux impacts des molécules avec la paroi ou la surface du corps. C'est pourquoi pour calculer les forces et les flux thermiques, il suffit d'envisager ici les impacts du flux des molécules à des vitesses et des énergies distribuées conformément à l'équilibre thermique dans le flux libre, c'est-à-dire à la distribution de Maxwell. Dans la

région entre l'écoulement moléculaire et l'écoulement glissant les impacts entre les molécules et les collisions des molécules avec la paroi présentent le même intérêt.

Chaque région de l'écoulement impose ses méthodes à elle de calcul de l'échange de chaleur.

La complétude de l'échange d'énergie entre les molécules et la paroi est caractérisée par le *coefficient d'accomodation thermique*

$$\alpha = (e_{\mathrm{i}} - e_{\mathrm{r}})/(e_{\mathrm{i}} - e_{\mathrm{p}}), \qquad \text{(VI.587)}$$

où e_{i} et e_{r} sont les flux d'énergie des molécules incidentes et réfléchies; e_{p}, le flux d'énergie qui serait évacué de la paroi avec l'échange d'énergie complet, c'est-à-dire sous la condition que l'énergie des molécules réfléchies correspond à la température de la paroi.

L'échange de l'impulsion est caractérisé par le coefficient d'accomodation de l'impulsion tangentielle

$$\delta = (\bar{u}_{\mathrm{i}} - \bar{u}_{\mathrm{r}})/\bar{u}_{\mathrm{i}}, \qquad \text{(VI.588)}$$

où u_{i} et u_{r} sont les vitesses tangentielles des molécules incidentes et réfléchies; $\bar{u}$, la moyenne de la vitesse tangentielle.

Si $\sigma = 0$, la réflexion des molécules par la paroi est totalement *spéculaire*; si $\sigma = 1$, elle est *diffuse*. La densité du flux thermique d'un écoulement moléculaire libre se calcule d'après la formule

$$q_{\mathrm{m.l.}} = \alpha\,(e_{\mathrm{i}} - e_{\mathrm{p}}). \qquad \text{(VI.589)}$$

Dans un gaz monoatomique la surface perçoit seulement l'énergie de la translation. Donc,

$$e_{\mathrm{i}} = e_{\mathrm{const}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\, mv^2 v_x f\, dv_x\, dv_y\, dv_z, \qquad \text{(VI.590)}$$

où v est la vitesse totale de la molécule dans l'espace; m, sa masse; f, la fonction de la distribution des vitesses.

Pour la distribution d'équilibre, maxwellienne, des vitesses on a

$$f = \frac{\rho_0}{m\,(2\pi RT_0)^{3/2}} \exp\left[\frac{(v_x - w\sin\Theta)^2 + (v_y + w\cos\Theta)^2 + C^2}{2RT_0}\right], \qquad \text{(VI.591)}$$

où w est la vitesse du courant non perturbé.

Pour les gaz multiatomiques, il convient de tenir compte de l'énergie interne des molécules. Le flux de leur énergie interne vers la surface

$$e_{\mathrm{in}} = j_{\mathrm{i}}\,\frac{mRT_0}{2}\,N_n, \qquad \text{(VI.592)}$$

où $j_1 = (5 - 3k)/(k - 1)$ est le nombre de degrés de liberté; N_n, le nombre de molécules incidentes par unité de surface par unité de temps

$$N_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x f\, dv_x\, dv_y\, dv_z. \qquad (VI.593)$$

Ainsi, pour les gaz multiatomiques,

$$e_i = e_{tr} + e_{in}. \qquad (VI.594)$$

On peut montrer que le flux d'énergie des molécules du gaz multiatomique réfléchies par la paroi

$$e_p = (4 + j)\frac{mRT_p}{2} N_n. \qquad (VI.595)$$

En portant e_i et e_p dans (VI.589) et en admettant que l'accomodation de l'énergie est la même suivant tous les degrés de liberté, on procède ensuite à l'intégration de l'expression pour obtenir

$$q_{m.l.} = \alpha\rho_0 T_0 R \sqrt{\frac{RT_0}{2\pi}} \left\langle \left[S^2 + \frac{k}{k-1} - \frac{k+1}{2(k-1)}\frac{T_p}{T_0} \right] \times \right.$$
$$\times \{\exp(-S\sin\Theta)^2 + \sqrt{\pi}\, S \sin\Theta\,[1 + \operatorname{erf}(S\sin\Theta)]\} -$$
$$\left. -\frac{1}{2}\exp(-S\sin\Theta)^2 \right\rangle, \qquad (VI.596)$$

où $S = w_0/\sqrt{2RT_0} = M\sqrt{k/2}$; Θ, l'angle d'attaque.

Pour $S \gg 1$, c'est-à-dire pour la région des vitesses hypersoniques,

$$q_{m.l.} \approx \frac{1}{2}\alpha\rho_0 w_0^3 \sin\Theta \left[1 - \frac{k+1}{2(k-1)}\frac{T_p}{T_0} \right]. \qquad (VI.597)$$

On en tire pour $q_{m.l.} = 0$

$$T_p^*/T^* \approx 2k/(k+1). \qquad (VI.598)$$

De la sorte, dans un flux moléculaire libre le facteur de récupération ne dépend pas du coefficient d'accomodation. Dans un flux hypersonique d'un gaz raréfié la température de la paroi calorifuge est supérieure à celle de freinage adiabatique. La connaissance de la grandeur T_p^* permet de juger de la direction du flux thermique. Si $T_p < T_p^*$, le flux thermique est absorbé par le corps. Pour $T_p > T_p^*$, le corps transmet la chaleur au courant de gaz incident. Cette conclusion est vraie seulement pour le cas de l'échange de chaleur par convection. Or, dans les conditions réelles du déplacement des corps dans une atmosphère raréfiée il convient de tenir compte du rayonnement par la surface du corps dans l'espace ambiant.

La figure VI.84 visualise la relation expérimentale entre le facteur de récupération et le nombre de Knudsen lors du contournement d'une plaque et d'un cylindre par l'air [$\tilde{r} = (r - r_l)/(r_{m.l.} - r_l)$;

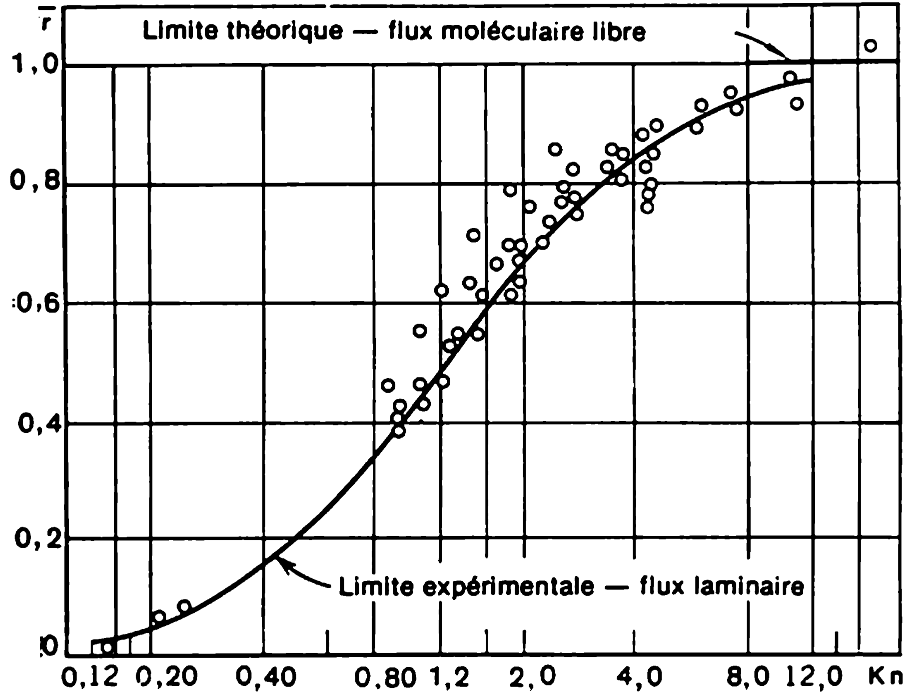


Fig. VI.84. Relation entre le coefficient de restitution et le nombre de Knudsen

on admet que $r_l = 0{,}94$]. D'après la courbe, le régime moléculaire libre survient avec Kn > 10.

Pour un corps subissant un refroidissement intense ($S \gg T_p/T_0$) et une accomodation totale ($\alpha = 1$) on tire de la formule (VI.597)

$$q = \frac{1}{2}\rho_0 w_0^3 \sin\Theta. \qquad \text{(VI.599)}$$

Cette valeur limite du flux thermique constitue la moitié de l'énergie dissipée qui revient à l'unité de surface et qui se calcule d'après la résistance du corps dans un courant à grands nombres M.

En intégrant l'équation (VI.596) par rapport à la surface du corps, on peut obtenir l'expression du flux thermique global vers le corps d'une forme quelconque.

La figure VI.85 consigne les résultats de tels calculs pour l'angle d'attaque nul lors du contournement d'un cylindre, d'une sphère et d'une plaque plane. En ordonnées, on a porté le paramètre

$$\alpha\beta\,\mathrm{St} = \frac{2k}{k+1}\,\frac{Q}{\rho_0 w_0 F c_p (T_p^* - T_p)}, \qquad \text{(VI.600)}$$

où F est la surface totale du corps.

En abscisses on a porté le paramètre $S = M\sqrt{k/2}$.

D'après les courbes, à partir de $S > 3$, pour un cylindre, une sphère et une plaque plane perpendiculaire au courant la loi d'échange de chaleur ne dépend pratiquement pas du nombre M et le flux thermique est défini par les paramètres ρ_0 et w_0.

Pour le coefficient d'accomodation α égal à l'unité les valeurs limites du nombre de Stanton dans le cas de l'air sont: pour une pla-

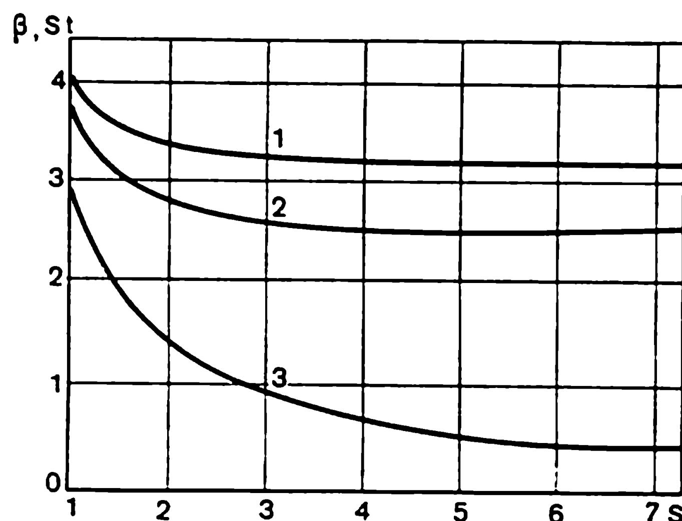


Fig. VI.85. Echange de chaleur dans un cylindre (*1*), une sphère (*2*) et une plaque plane (*3*) dans un flux moléculaire libre

que normale au courant St = 0,435; pour une sphère St = 0,275, et pour un cylindre (à axe perpendiculaire au vecteur de la vitesse) St = 0,22.

Pour une plaque parallèle au courant, la valeur limite du nombre de Stanton dans le cas de très grandes vitesses tend vers zéro en vertu de la formule $\alpha\beta\,\mathrm{St} = 1/(\sqrt{2k\pi}M)$. Pour un gaz fixe ($S = 0$), on tire de l'équation (VI.596) pour des corps convexes

$$q_{\mathrm{m.l.}} = \alpha\rho c_v \frac{k+1}{2} \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} (T - T_p). \qquad \text{(VI.601)}$$

Ainsi, du point de vue de calcul, le régime moléculaire libre est relativement simple, mais il présente des difficultés sérieuses pour la détermination du coefficient d'accomodation α.

Pour les formules où il figure, il ne peut être déterminé que par expérience. Il dépend de la nature du gaz et de la surface, siège de l'accomodation, ainsi que de la température et de la pression. Malheureusement, les données expérimentales sont contradictoires et pas assez sûres. Les expériences ont permis d'établir que le coefficient d'accomodation dépend des conditions dans lesquelles se trou-

vait la surface avant l'expérience, ce qui rend bien plus difficile la généralisation des données obtenues.

Dans le domaine de l'écoulement glissant on enregistre à la surface du corps des sauts de vitesse et de température. Pour illustrer cet effet, considérons l'écoulement du gaz entre deux plaques se déplaçant parallèlement l'une à l'autre (ce qu'on appelle le courant de Couette).

Dans le courant moléculaire libre (fig. VI.86) (M/Re est grand) les molécules passent d'une paroi à l'autre sans entrer en collision.

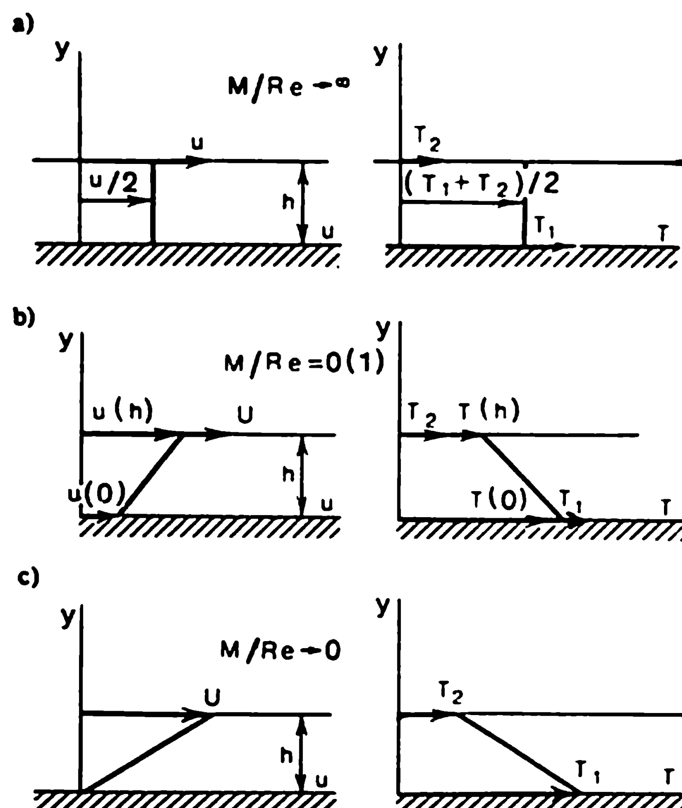


Fig. VI.86. Écoulement du gaz avec glissement entre deux plaques: *a* — écoulement moléculaire libre; *b* — écoulement dans le domaine du continuum; *c* — écoulement avec glissement

La vitesse moyenne des molécules est $u/2$ et leur température moyenne, si les deux plaques ont le même coefficient d'accomodation, est $(T_1 + T_2)/2$.

Dans le domaine du continuum (M/Re est très petit) la distribution de la vitesse et de la température entre deux plaques est linéaire et aux surfaces des plaques les conditions aux limites observées sont celles de l'aérodynamique ordinaire (conditions de « collage »). Pour des valeurs intermédiaires de M/Re comprises entre 0,1 et 10, on adopte qu'entre les plaques les variations des vitesses et des températures sont continues, mais cette continuité est violée près de la

paroi par l'apparition, comme dans le courant moléculaire libre, des sauts de vitesse (glissement) et de température.

La théorie moléculaire cinétique des gaz donne, au facteur proche de l'unité près, la valeur du glissement et du saut de la température au voisinage de la paroi :

$$\overline{w}_S = \frac{2-\sigma}{\sigma}\,\bar{l}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\mathrm{p}} + \frac{3}{4}\,\bar{l}\sqrt{\frac{2R}{\pi T}}\left(\frac{dT}{dx}\right)_{\mathrm{p}}; \qquad \text{(VI.602)}$$

$$\Delta T_S = T_{\mathrm{g.p.}} - T_{\mathrm{p}} = 2\,\frac{2-\alpha}{\alpha}\,\frac{k}{k+1}\,\frac{\bar{l}}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{\mathrm{p}}, \qquad \text{(VI.603)}$$

où $T_{\mathrm{g.p.}}$ la température du gaz près de la paroi.

La quantité $\xi = 2\,\frac{2-\alpha}{\alpha}\,\frac{k}{k+1}$ s'appelle *coefficient du saut.*

Le deuxième terme de l'équation du glissement exprime l'action exercée par l'écoulement thermomoléculaire : le mouvement du gaz dans la direction de la montée de la température.

Comme il fallait s'attendre, au voisinage de la paroi les sauts sont proportionnels au libre parcours moyen $\bar{l}$ et aux gradients des vitesses et des températures sur les plaques. Avec les grandes pressions $\bar{l}$ étant petit, on peut négliger aussi bien le glissement du gaz sur la paroi que le saut de température, ce qui justifie l'hypothèse du collement du gaz à la paroi adoptée en dynamique des gaz usuelle.

Pour des $\mathrm{Kn} > 0{,}01$, les équations (VI.602), (VI.603) peuvent être introduites dans les conditions aux limites des équations de Navier-Stokes et de l'énergie, et le problème peut alors être résolu en calculant les coefficients de frottement et d'échange de chaleur par les méthodes ordinaires examinées dans ce chapitre.

En particulier, pour le cas du contournement d'une sphère, on peut avancer l'hypothèse que sous le régime glissant l'échange de chaleur entre le gaz et la sphère de rayon R est le même que dans un courant continu entre le gaz et une sphère de rayon $R - \bar{l}$. Cette hypothèse implique que le saut de température produit une résistance thermique supplémentaire et réduit le coefficient de transmission de chaleur.

La formule de calcul est de la forme

$$\mathrm{Nu} = \frac{\mathrm{Nu}_0}{1+\xi \mathrm{M}\,\mathrm{Nu}_0/\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}. \qquad \text{(VI.604)}$$

La figure VI.87 compare les données d'expérience avec le calcul d'après la formule (VI.604) pour un coefficient de saut $\xi = 3{,}42$. La courbe continue correspond au calcul pour le domaine du continuum, la courbe interrompue, au régime moléculaire libre, les lignes en pointillé visualisent la valeur du nombre Nu en fonction du nombre Re pour de différentes valeurs du nombre M. On voit qu'avec

l'augmentation du nombre de Reynolds l'influence du nombre M diminue.

L'affaiblissement du transfert de chaleur sous l'effet d'un saut de températures est largement utilisé en technique dans la création

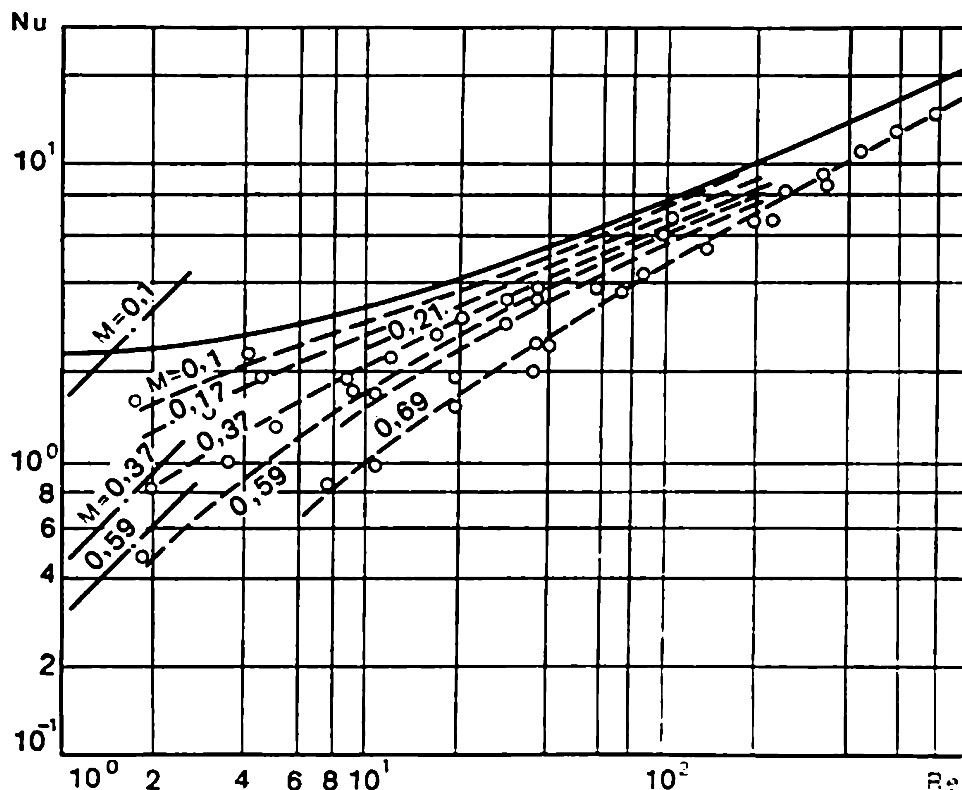


Fig. VI.87. Echange de chaleur dans une sphère pour un courant subsonique de gaz raréfié

de l'isolation à vide. En particulier, dans la technique cryogénique on recourt largement à l'isolation multicouche par le vide et l'isolation par le vide et poudre. La conductivité thermique efficace des meilleurs isolations multicouches atteint sous une pression inférieure à 0,133 Pa une valeur de l'ordre de 10^{-4} W/(m.K).

CHAPITRE VII

ÉCHANGE DE CHALEUR PAR CONVECTION NATURELLE

§ VII.1. Echange de chaleur par convection naturelle dans un grand volume

La convection naturelle apparaît dans le champ des forces de masse extérieures dont la nature peut être différente. Dans un cas particulier, ce champ peut être le champ gravifique de la Terre. C'est un cas très fréquent qui s'appelle *convection thermique gravifique*.

Le champ gravifique de la Terre exerce une action sur le mouvement du fluide seulement en présence dans le courant de surfaces libres ou de distribution irrégulière de la densité. En absence de surfaces libres et avec une distribution régulière de la densité, la force de pesanteur appliquée à un élément de volume extrait du fluide est équilibrée par la force d'Archimède d'expulsion et peut ne pas être prise en compte.

Dans le cas général, lorsque la distribution de la densité est irrégulière, l'action de la pesanteur n'est pas équilibrée par la force d'Archimède. A la différence des écoulements convectifs forcés dont la présence est conditionnée par des causes extérieures, les courants convectifs naturels ou libres sont dus exclusivement à la différence des densités liée à l'inégalité du champ thermique dans le liquide ou le gaz.

L'action des forces de masse extérieures dans les équations du mouvement d'un liquide visqueux est traduite par les termes ρg_x, ρg_y et ρg_z, où ρ est la densité du fluide, dans le cas général, fonction de la température et de la pression, et g_x, g_y, g_z, les projections du vecteur accélération du champ des forces de masse sur les axes des coordonnées. Dans l'exposé qui suit par champ des forces de masse extérieures nous entendrons le champ gravifique de la Terre.

Dans ce cas la force de pesanteur par unité de masse F sera égale à l'accélération de la chute libre g.

Pour introduire dans l'équation du mouvement la force ascensionnelle, transformons les deux premiers termes qui figurent dans le deuxième membre de cette équation. Pour l'équation relative à la projection sur l'axe des x on obtient

$$\rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x} = (\rho - \rho_0)\, g_x - \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_0 g_x \right), \qquad \text{(VII.1)}$$

où F_x est la projection de la pesanteur sur l'axe des x; ρ_0. la densité à une certaine température constante T_0 en un point fixé du courant.

En admettant que les variations de ρ et T sont petites par rapport à leurs valeurs absolues, on peut admettre

$$\rho - \rho_0 = -\beta\rho\,(T - T_0), \qquad \text{(VII.2)}$$

où $\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_p$ est le coefficient de dilatation volumique du fluide.

Le terme $\rho_0 g_x$ de (VII.1) peut être mis sous la forme $\rho_0 g_x = \partial p_0/\partial x$, où p_0 désigne la pression hydrostatique calculée sous la condition qu'en tous les points du volume la densité du fluide est constante et égale à ρ_0. En notant la différence $p - p_0 = p_1$, après des transformations élémentaires de (VII.1) on obtient

$$\rho F_x - \partial p/\partial x = -g_x\beta\rho\,(T - T_0) - \partial p_1/\partial x.$$

Ici le terme $-g_x\beta\rho\,(T - T_0)$ est la projection de la force ascensionnelle rapportée à l'unité de volume de la particule du fluide sur l'axe des x.

On admet que la densité du fluide qui entoure la particule de densité ρ est partout constante et égale à ρ_0.

Au lieu de $\beta\rho$ il est plus commode d'utiliser la quantité $\beta_\rho\rho_0 = \beta\rho$ où

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p = \frac{\text{const}}{\rho} \quad \text{et} \quad \beta_\rho = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p = \text{const}.$$

Etant donné que ρ varie peu avec la température, on adopte souvent que le coefficient β est constant et égal à la moyenne dans l'intervalle donné des températures.

D'une façon analogue on introduit l'expression de la force ascensionnelle dans les équations du mouvement relatives à la projection sur les axes des y et des z.

L'écoulement par convection naturelle est très fréquent dans la nature et en technique; il s'observe, par exemple, lorsqu'on chauffe une plaque verticale, un cylindre horizontal ou un corps de forme quelconque.

Si un tel écoulement apparaît dans un grand volume, ses propriétés sont, généralement, identiques à celles que possède une couche limite. Celle-ci est une couche relativement mince adhérente à la paroi, où est enregistrée une variation brusque de la vitesse et de la température et qui porte le même nom de couche limite que dans le cas du déplacement forcé du milieu. Les propriétés propres à cette couche sont particulièrement manifestes lorsque la conductivité thermique et la viscosité du fluide sont faibles. A titre d'exemple de tels milieux on peut mentionner l'air et l'eau.

24—1289

Si dans le cas du mouvement forcé d'un fluide à propriétés physiques constantes *) son champ des vitesses ne dépend pas du champ thermique, alors, dans les conditions de convection naturelle, le champ des vitesses intervient directement dans la distribution de la température et de la densité.

Ceci est dû au fait que la force ascensionnelle qui est à l'origine du mouvement libre, dépend de la différence des températures au point donné et en un certain point fixé du courant.

1. Plaque verticale

L'écoulement dans une couche limite sous une convection naturelle sur une plaque chauffée peut être rendu visible par diverses méthodes optiques. A cet effet on oriente parallèlement à la surface émettrice de chaleur un faisceau lumineux qui, en passant par la couche limite chauffée, donne sur l'écran placé derrière le corps une *image strioscopique* permettant de juger de l'épaisseur de la couche limite thermique et du coefficient de transmission local.

L'image strioscopique apparaît sous l'effet du gradient de densité dans l'ambiance du corps. L'écart des rayons est proportionnel au gradient de densité à la surface du corps et, par suite, au flux thermique.

En plus de la méthode strioscopique de l'étude des écoulements, on recourt largement à la méthode fondée sur l'interférence de la lumière. Les figures VII.1, *a* et *b* représentent les clichés de la couche limite thermique sur une plaque verticale chauffée et dans une cavité annulaire dans les conditions d'une convection naturelle obtenus par la méthode des bandes d'interférence. Le dépouillement d'un tel interférogramme permet d'enregistrer non seulement des résultats quantitatifs, mais aussi des résultats qualitatifs suffisamment précis. En particulier, les mesures interférométriques renseignent sur l'allure des isothermes, des champs thermiques et des coefficients de transmission thermique locaux.

Suivant les dimensions de la plaque, la différence de sa température et de celle du milieu ambiant, les propriétés physiques du liquide ou du gaz entourant la plaque, l'écoulement dans la couche limite qui contourne la plaque (dans les conditions de la convection naturelle) peut être laminaire ou turbulent.

Les mesures interférométriques ont montré que lors de la convection naturelle sur une plaque verticale le passage du régime laminaire au régime turbulent survient avec $Ra_x > 0{,}7 \cdot 10^9$, où Ra_x

*) En plus de la convection, lors du mouvement forcé et libre du milieu, une convection mixte est également possible, dans laquelle la forme naturelle s'accompagne de la forme forcée.

est le nombre de Rayleigh égal au produit du nombre de Grashof Gr_x par le nombre de Prandtl Pr:

$$Gr_x = gx^3\beta\,(T_p - T_f)/\nu^2;\ Pr = \nu/a = \mu c_p/\lambda.$$

Ici x est la coordonnée longitudinale comptée à partir du bord inférieur de la plaque verticale dans le cas où $T_p > T_f$, et à partir du bord supérieur de la plaque dans le cas où $T_f > T_p$; g, l'accélération de la chute libre; T_p et T_f, la température de la surface de la

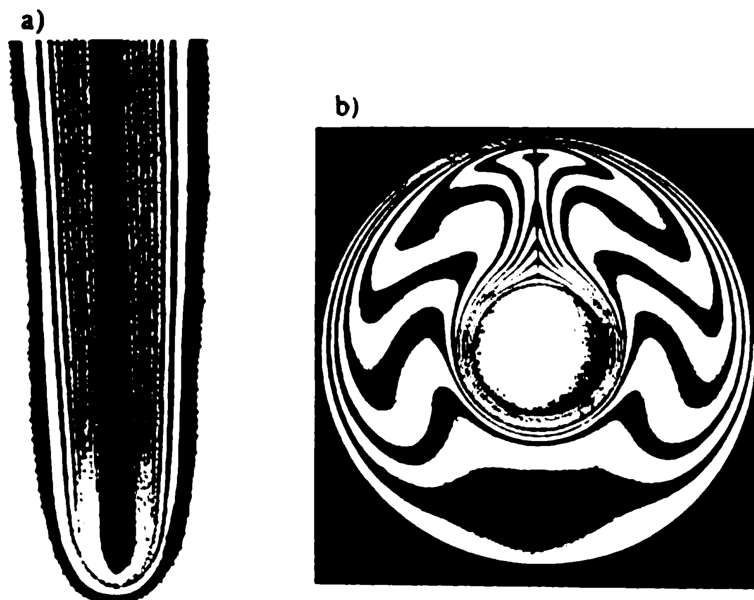


Fig. VII.1. Couche limite thermique sur une plaque verticale chauffée (a) et dans une cavité annulaire (b)

plaque et la température du courant de fluide non perturbé respectivement; μ, λ et c_p, la viscosité dynamique, la conductivité thermique et la chaleur spécifique sous la pression constante; $\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p$, le coefficient de dilatation volumique du milieu ambiant de la plaque (pour un gaz parfait, $\beta = 1/T_f$); ρ, la densité; $\nu = \mu/\rho$ et $a = \lambda/(c_p\rho)$, la viscosité cinématique et la diffusivité du milieu, respectivement.

Ainsi, dans la couche limite, suivant la valeur de x dans de différentes zones de la même plaque l'écoulement peut être aussi bien laminaire que turbulent.

Le transfert de chaleur par une plaque verticale dans les conditions de la convection naturelle a été soumis par de nombreux savants à une étude expérimentale ou théorique.

Pour la description mathématique du phénomène on peut utiliser les équations du mouvement et de l'énergie avec des simplifications caractéristiques des courants dans la couche limite. Ces

équations connues sous le nom d'*équations de la couche limite* des courants stationnaires à convection libre s'écrivent

$$w_x \partial w_x/\partial x + w_y \partial w_x/\partial y = \nu \partial^2 w_x/\partial y^2 + g\beta (T - T_f); \quad \text{(VII.3)}$$

$$\partial w_x/\partial x + \partial w_y/\partial y = 0; \quad \text{(VII.4)}$$

$$w_x \partial T/\partial x + w_y \partial T/\partial y = a \partial^2 T/\partial y^2, \quad \text{(VII.5)}$$

où w_x et w_y sont les composantes du vecteur de la vitesse dans le sens des axes x et y, l'axe des x étant dirigé le long de la plaque, et l'axe des y, perpendiculairement à cette dernière.

A la différence du cas de l'écoulement purement forcé, les équations (VII.3)-(VII.5) possèdent un terme qui rend compte de la force ascensionnelle $g\beta (T - T_f)$ présentant la différence entre la force d'Archimède du déplacement et la force de pesanteur.

Dans ce qui précède nous avons montré, en déduisant les équations de la couche limite (cf. chapitre VI, § 1), que la pression p dans le sens de la coordonnée y normale à la plaque ne change pratiquement pas, et on peut admettre qu'elle est égale à la pression hors de la couche limite. Puisque loin de la plaque la pression est égale à la pression hydrostatique p_0 dans la section donnée x, nous avons $p(x) = p_0(x)$. Donc, pour une plaque verticale, $p_1 = p - p_0 = 0$ et $\partial p_1/\partial x = 0$. Pour cette raison dans (VII.3) nous avons omis le terme $\partial p_1/\partial x$ apparu dans l'équation du mouvement après l'introduction de la force ascensionnelle.

Pour le domaine laminaire, la solution analytique du système d'équations de la couche limite a été obtenue par E. Polhausen qui a montré qu'après l'introduction de la fonction de courant respectant les conditions

$$w_x = \partial\psi/\partial y, \quad w_y = -\partial\psi/\partial x. \quad \text{(VII.6)}$$

Les équations aux dérivées partielles (VII.3)-(VII.5) peuvent être ramenées à deux équations différentielles ordinaires. Appliquons à cet effet la transformation de similitude suivante: au lieu des variables indépendantes x et y, introduisons une nouvelle variable $\eta = Cy/x^{1/4}$, et au lieu de la fonction de courant inconnue ψ, une nouvelle fonction inconnue

$$f(\eta) = \frac{\psi}{4\nu C x^{3/4}},$$

où

$$C = \sqrt{g(T_p - T_f)/(4\nu^2 T_f)}. \quad \text{(VII.7)}$$

Alors, dans les nouvelles variables les composantes du vecteur vitesse w_x et w_y s'expriment de la façon suivante:

$$w_x = 4\nu x^{1/2} C^2 f', \quad w_y = \nu C x^{-1/4} (\eta f' - 3f).$$

En portant ces expressions dans les équations (VII.3)-(VII.5) et en introduisant le rapport sans dimension des températures $\Theta = (T - T_f)/(T_p - T_f)$, on obtient deux équations différentielles ordinaires pour le calcul des fonctions inconnues $f(\eta)$ et $\Theta(\eta)$

$$f''' + 3ff'' - 2(f')^2 + \Theta = 0; \qquad \text{(VII.8)}$$

$$\Theta'' + 3\mathrm{Pr}f\Theta' = 0. \qquad \text{(VII.9)}$$

Le système d'équations (VII.8) et (VII.9) est résolu pour les conditions aux limites du I-er ordre

$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad T = T_p \quad \text{pour} \quad y = 0;$$
$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad T = T_f \quad \text{pour} \quad y = \infty,$$

qui, avec les nouvelles variables, deviennent

$$f(\eta) = f'(\eta) = 0, \quad \Theta(\eta) = 1 \quad \text{pour} \quad \eta = 0;$$
$$f'(\eta) = 0, \quad \Theta(\eta) = 0 \quad \text{pour} \quad \eta = \infty.$$

Le passage ultérieur aux fonctions inconnues précédentes w_x, w_y, T, et aux variables indépendantes x et y permet de calculer les champs

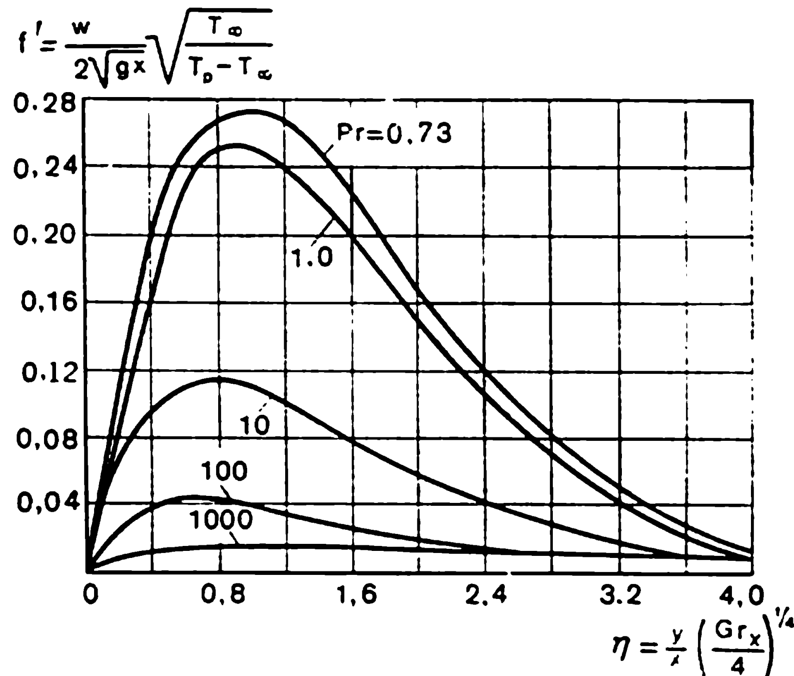


Fig. VII.2. Relation entre f' et η pour de différents nombres de Prandtl

des vitesses et des températures dans le milieu liquide et le gaz qui entoure la plaque.

Les solutions de ces équations pour des nombres de Prandtl différents sont visualisées par les figures VII.2 et VII.3.

Ces courbes sont applicables aussi bien au refroidissement de la plaque ($T_p > T_f$) qu'à son échauffement ($T_p < T_f$).

On tire des solutions mentionnées que l'épaisseur des couches limites dynamique et thermique est proportionnelle à $x^{1/4}$.

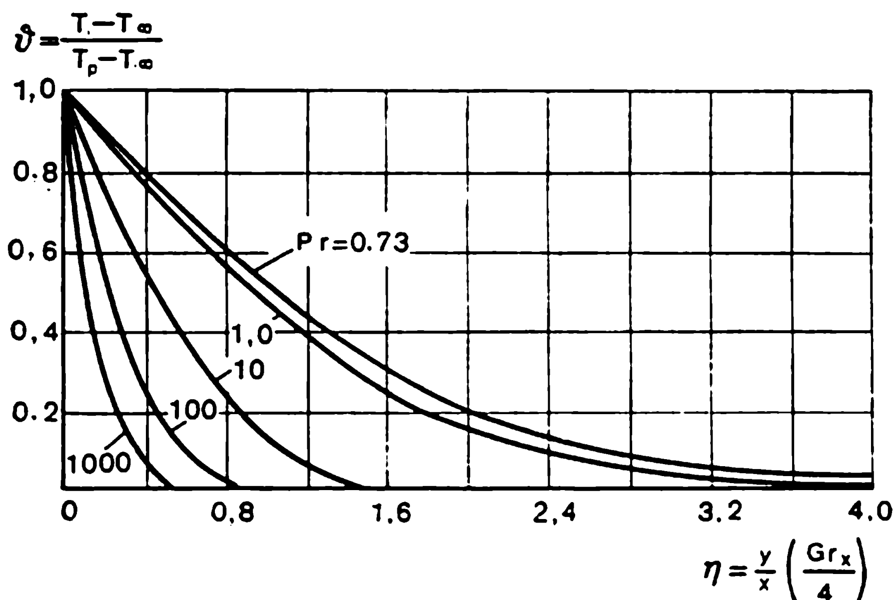


Fig. VII.3. Relation entre ϑ et η pour de différents nombres de Prandtl

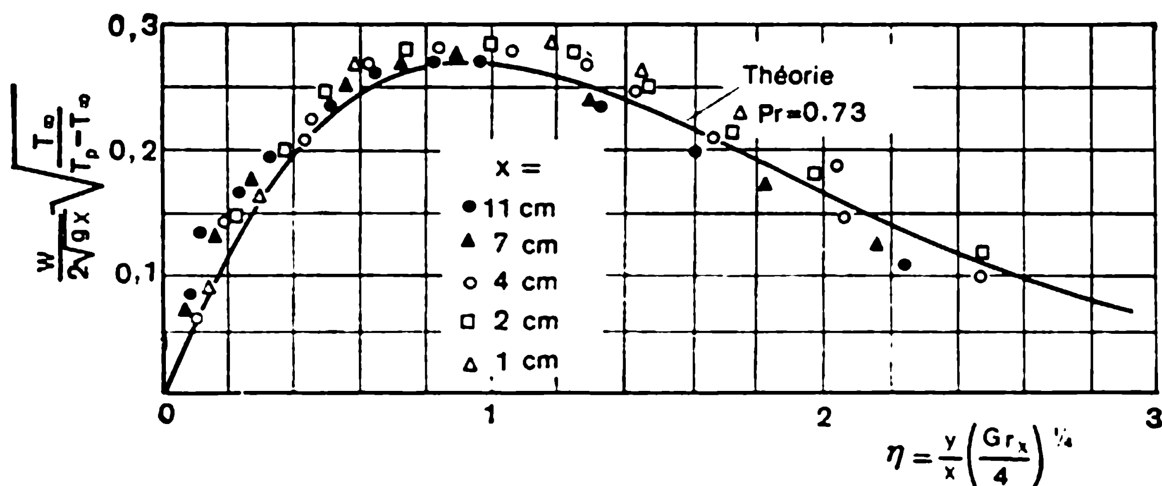


Fig. VII.4. Comparaison des résultats de la résolution avec les données expérimentales

L'expérience confirme les calculs théoriques (fig. VII.4, VII.5).

D'après la distribution des températures dans la couche limite il est aisé de calculer la quantité de chaleur transmise par la plaque au fluide, puisqu'en vertu de la loi de conductivité thermique de Fourier

$$q_p = -\lambda \, (\partial T/\partial y)_p, \qquad \text{(VII.10)}$$

où q_p est la valeur locale de la densité du flux thermique à la surface de la plaque qui dépend de x ; λ la conductivité thermique du milieu.

D'autre part, en vertu de la loi de refroidissement de Newton suivant laquelle la densité du flux thermique est proportionnelle à

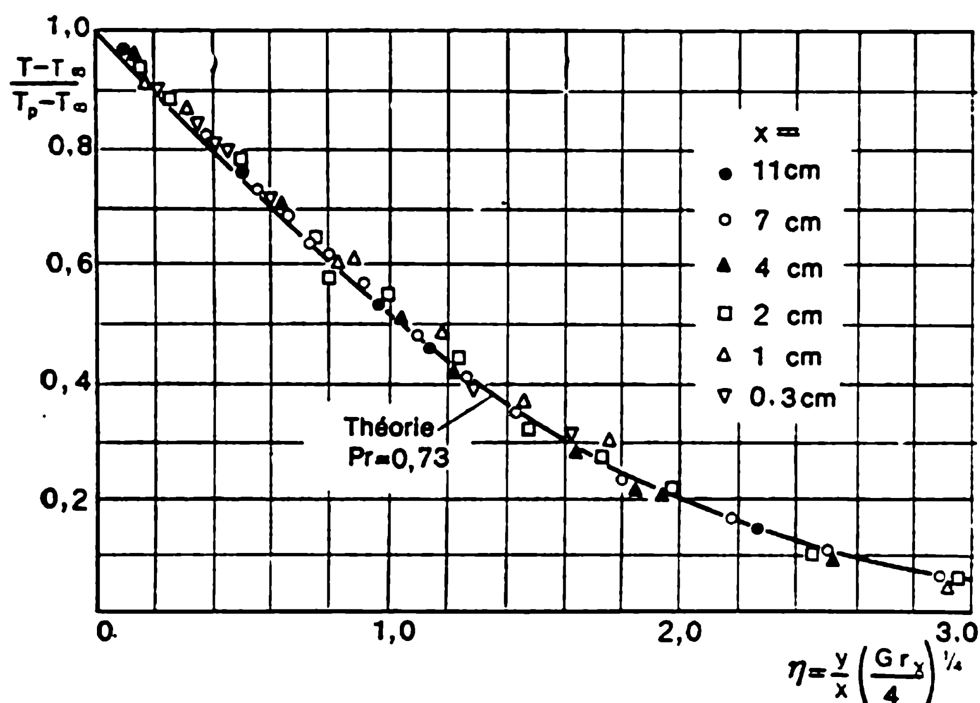


Fig. VII.5. Comparaison des résultats de la résolution avec les données expérimentales

la différence des températures de la surface du corps solide et du milieu ambiant,

$$q_p = \alpha_x (T_p - T_f), \tag{VII.11}$$

où α_x est la valeur locale du coefficient de transmission de chaleur. En passant de T au paramètre sans dimension Θ, l'expression (VII.10) permet de tirer

$$q_p = -\lambda C x^{-1/4} (d\Theta/d\eta)_p \, (T_p - T_f). \tag{VII.12}$$

Les solutions des équations (VII.3)-(VII.5) sont représentées sous la forme de tableaux [36] dont on tire que pour l'air $(d\Theta/d\eta)_p =$ $= -0.508$. Les relations (VII.11)-(VII.12) permettent d'obtenir l'expression pour calculer la valeur locale du nombre de Nüsselt sur la plaque

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}359\ \mathrm{Gr}_x^{1/4}, \tag{VII.13}$$

où $\mathrm{Nu}_x = \alpha_x x/\lambda$; $\mathrm{Gr}_x = g x^3 \beta (T_p - T_f)/\nu^2$; α_x, la valeur locale du coefficient de transmission de chaleur.

La formule (VII.13) entraîne que $\alpha_x \sim 1/x^{1/4}$ et décroît dans le sens du mouvement du milieu.

Au besoin on peut calculer la quantité totale de la chaleur transmise par la plaque au milieu ambiant

$$Q = b \int_0^l q_p \, dx = 0{,}508 \frac{4}{3} b l^{3/4} C \lambda (T_p - T_f),$$

où b est la largeur; l, la longueur de la plaque (le transfert de chaleur est pris en compte d'un seul côté de la plaque).

En introduisant la notion du coefficient de transmission de chaleur moyen on obtient

$$Q = \bar{\alpha} (T_p - T_f)\, bl = b\lambda \,\overline{\mathrm{Nu}}\, (T_p - T_f),$$

où $\bar{\alpha}$ est le coefficient de chaleur moyen suivant la surface de la plaque; $\overline{\mathrm{Nu}}$, le Nüsselt moyen égal à $\bar{\alpha} l/\lambda$. Introduisons le nombre de Grashof (Gr_l) et remplaçons C par sa valeur tirée de (VII.7) pour composer l'équation de similitude du calcul de la chaleur transmise par la plaque à l'air:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}478\, \mathrm{Gr}_l^{1/4}, \qquad \text{(VII.14)}$$

où $\mathrm{Gr}_l = g l^3 \beta (T_p - T_f)/\nu^2$ ($T_p = \mathrm{const}$).

Les données suivantes permettent de juger de l'influence du nombre de Prandtl sur l'intensité du transfert de chaleur dans les conditions de la convection naturelle laminaire (ici $\mathrm{Ra}_l = \mathrm{Gr}_l \mathrm{Pr}$ est le nombre de Rayleigh établi d'après la dimension déterminante l):

Pr	0,003	0,008	0,01	0,02	0,03	1	2	10	100	1000
$\overline{\mathrm{Nu}}/\mathrm{Ra}_l^{1/4}$	0,182	0,228	0,242	0,280	0,305	0,535	0,568	0,620	0,653	0,665

Les cas limites qui correspondent à $\mathrm{Pr} \to 0$ et à $\mathrm{Pr} \to \infty$ ont été également mis à l'étude. Il s'est avéré que pour $\mathrm{Pr} \to 0$ $\overline{\mathrm{Nu}}/(\mathrm{Gr}_l \mathrm{Pr}^2)^{1/4} = 0{,}80$, et pour $\mathrm{Pr} \to \infty$, $\overline{\mathrm{Nu}}/(\mathrm{Gr}_l \mathrm{Pr})^{1/4} = 0{,}67$.

Le problème examiné peut également être résolu par la méthode approchée des relations intégrales.

Cette méthode permet d'obtenir la relation suivante:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}508 \left[\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr} + 0{,}952}\right]^{1/4} (\mathrm{Gr}_x \mathrm{Pr})^{1/4}, \qquad \text{(VII.15)}$$

qui pour $10^{-2} < \mathrm{Pr} < 10^3$ s'accorde à 10 % près avec la solution exacte.

Le problème de la convection naturelle sur une plaque verticale peut être résolu également dans le cas de la donnée à la surface de la plaque du flux thermique constant

$$q_p = -\lambda\,(\partial T/\partial y)_p = \text{const},$$

alors que la température de la surface est inconnue (conditions aux limites du II-e genre).

Sous ces conditions, le système d'équations différentielles aux dérivées partielles (VII.3)-(VII.5) peut être ramené par la substitution des variables suivante à deux équations différentielles ordinaires :

$$\eta = C_1 \frac{y}{x^{1/5}}\,; \quad f(\eta) = \frac{\psi}{C_2 x^{4/5}}\,; \quad \Theta(\eta) = \frac{C_1 (T_f - T)\,\lambda}{x^{1/5} q_p}, \qquad \text{(VII.16)}$$

où

$$C_1 = \left[\frac{g\beta q_p}{5\lambda\nu^2}\right]^{1/5}; \quad C_2 = \left[\frac{5^4 g\beta q_p \nu^3}{\lambda}\right]^{1/5}. \qquad \text{(VII.17)}$$

Avec les nouvelles variables, compte tenu des relations (VII.6) et (VII.16), les composantes du vecteur vitesse vont s'écrire

$$w_x = C_1 C_2 x^{3/5} f'(\eta)\,; \quad w_y = \frac{C_2}{5x^{1/5}}\,[\eta f'(\eta) - 4f(\eta)]. \qquad \text{(VII.18)}$$

En portant les équations obtenues dans le système (VII.3)-(VII.5), on obtient deux équations différentielles ordinaires

$$f''' - 3\,(f')^2 + 4ff'' - \Theta = 0; \qquad \text{(VII.19)}$$

$$\Theta'' + \Pr\,[4\Theta' f - \Theta f'] = 0, \qquad \text{(VII.20)}$$

qui peuvent être résolues numériquement sur un ordinateur.

Avec de nouvelles variables, les conditions aux limites du système d'équations (VII.19), (VII.20) deviennent

$$f = 0, \quad f' = 0, \quad \Theta' = 1 \quad \text{pour} \quad \eta = 0;$$

$$f = 0, \quad \Theta = 0 \quad \text{pour} \quad \eta = \infty.$$

Il est commode de généraliser les résultats de la résolution du système d'équations (VII.19), (VII.20) sous la forme des formules suivantes

$$T_p - T_f = -\frac{5^{1/5} q_p x \Theta(0)}{\lambda\,(\mathrm{Gr}_x^*)^{1/5}}\,; \qquad \text{(VII.21)}$$

$$\mathrm{Nu}_x = -\frac{1}{5^{1/5}\Theta(0)}\,(\mathrm{Gr}_x^*)^{1/5}, \qquad \text{(VII.22)}$$

où $\mathrm{Gr}_x^* = \frac{g\beta q_p x^4}{\lambda\nu^2}$ est le nombre de Grashof local modifié; $\Theta(0)$, la température de surface de la plaque; $\mathrm{Nu}_x = \alpha_x x/\lambda$.

Les valeurs de la fonction Θ (0) qui dépend du critère Pr:

Pr	0,1	1	10	100
Θ (0)	−2,7507	−1,3574	−0,76746	−0,46566

Ce problème, tout comme le précédent, peut être résolu par la méthode approchée des relations intégrales. La résolution approchée permet d'obtenir la formule:

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}616\left[\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}+0{,}8}\right]^{1/5}(\mathrm{Gr}_x^*\mathrm{Pr})^{1/5},$$

qu'il est commode de comparer à la formule (VII.15) des conditions aux limites du I-er genre.

En posant dans (VII.22) $x = l/2$ et en retenant que dans ces conditions $q_p = \alpha (T_p - T_f)_{l/2}$, on obtient

$$\overline{\mathrm{Nu}} = \left[-\frac{2^{1/5}}{5^{1/5}\Theta(0)}\right]^{5/4}\mathrm{Gr}_l^{1/4}. \qquad \text{(VII.23)}$$

Ici l est la longueur de la zone de la plaque verticale à régime laminaire dans la couche limite; $(T_p - T_f)_{l/2}$, la différence des températures dans la section $x = l/2$; α, le coefficient de transmission de chaleur défini par la différence des températures $(T_p - T_f)_{l/2}$, $\overline{\mathrm{Nu}} = \alpha l/\lambda$, $\mathrm{Gr}_l = g\beta l^3 (T_p - T_f)_{l/2}/\nu^2$.

La comparaison de la grandeur $\overline{\mathrm{Nu}}/(\mathrm{Gr}_l)^{1/4}$ fournie par la formule (VII.23) et obtenue par la résolution du problème aux conditions aux limites du II-e genre (q_p = const), avec la valeur de $\overline{\mathrm{Nu}}/(\mathrm{Gr}_l)^{1/4}$ qui correspond à la solution exacte du problème de convection naturelle sur une plaque verticale sous les conditions aux limites du I-er genre (T_p = const) est très suggestive. Cette comparaison est donnée par le tableau VII.1.

Tableau VII.1

Influence des conditions aux limites sur l'échange de chaleur dans la convection naturelle

Pr	$\overline{\mathrm{Nu}}/(\mathrm{Gr}_l)^{1/4}$ (q_p = const)	$\overline{\mathrm{Nu}}/(\mathrm{Gr}_l)^{1/4}$ (T_p = const)	Pr	$\overline{\mathrm{Nu}}/(\mathrm{Gr}_l)^{1/4}$ (q_p = const)	$\overline{\mathrm{Nu}}/(\mathrm{Gr}_l)^{1/4}$ (T_p = const)
0,1	0,224	0,219	10	1,11	1,10
1	0,543	0,535	100	2,07	2,07

Les données du tableau VII.1 impliquent que le groupement sans dimensions $\overline{\mathrm{Nu}}/(\mathrm{Gr}_l)^{1/4}$, établi d'après la différence des températures $(T_p - T_f)_{l/2}$ pour $q_p = \mathrm{const}$, est proche de la valeur de $\overline{\mathrm{Nu}}/(\mathrm{Gr}_l)^{1/4}$ calculée pour les conditions $T_p = \mathrm{const}$.

Les solutions obtenues sont strictement vraies seulement lorsque la différence des températures $(T_p - T_f)$ est faible, puisqu'on a admis dans les calculs que les propriétés physiques du gaz ou du liquide sont constantes. La résolution des équations (VII.3)-(VII.5) ne tient compte que de la dépendance de ρ (T) dans le terme traduisant la force ascensionnelle.

La variation des paramètres μ, λ, c_p, ρ et β avec la température dans les conditions d'une grande différence des températures de la plaque et du milieu conduit dans la couche limite à une modification notable des profils de température et de vitesse.

Avec les propriétés physiques variables dans le cas d'échauffement ou de refroidissement de la plaque, les autres conditions étant égales, les flux thermiques ne sont pas identiques.

Pour les propriétés variables du liquide ou du gaz les équations de la couche limite deviennent

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = g(\rho_f - \rho) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial w_x}{\partial y}\right); \quad \text{(VII.24)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho w_y) = 0; \quad \text{(VII.25)}$$

$$\rho c_p \left(w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right). \quad \text{(VII.26)}$$

Ces équations, tout comme pour le cas des propriétés physiques constantes, peuvent être ramenées à deux équations différentielles dont la résolution est une tâche bien plus simple par rapport à la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Les conditions aux limites de ce système ne se distinguent pas de celles relatives au cas envisagé précédemment des conditions physiques constantes. Si on admet que le gaz possède des propriétés qui vérifient les relations

$$\mu\rho = \mathrm{const}, \quad \rho\lambda = \mathrm{const}, \quad c_p = \mathrm{const}, \quad \rho = p/(RT), \quad \text{(VII.27)}$$

alors, pour des propriétés variables le système d'équations différentielles ordinaires est identique au système obtenu dans ce qui précède pour des propriétés constantes (VII.8), (VII.9). De la sorte, toutes les solutions du système (VII.8), (VII.9) deviennent valides pour le gaz aux propriétés (VII.27).

L'analyse de l'influence sur l'échange de chaleur de la variation des propriétés physiques avec la température, fondée sur les résolutions sous des hypothèses simplificatrices (VII.27), ainsi que sur l'in-

tégration numérique immédiate du système correspondant d'équations différentielles ordinaires avec la conservation de tous les termes, a été réalisée par Sparrow et Gregg. Dans le cas général on a supposé que la relation entre λ (T) et μ (T) vérifie la loi de Sutherland, c'est-à-dire

$$\lambda = \lambda_0 T^{3/2}/(T + A_1) \text{ et } \mu = \mu_0 T^{3/2}/(T + A_2), \quad \text{(VII.28)}$$

et que la variation de la capacité calorifique avec la température est linéaire. Dans les formules (VII.28) A_1 et A_2 sont des constantes qui dépendent du genre de gaz ; λ_0 et μ_0, la conductivité thermique et la viscosité dynamique pour 0 °C. Pour l'air, par exemple, $A_1 = 201$ K ; $A_2 = 110.4$ K ; $\lambda_0 = 0.254 \cdot 10^{-2}$ W/(m.K) ; $\mu_0 = 1.46 \cdot 10^{-6}$ N·s/m².

En comparant les résultats d'un grand nombre de résolutions obtenues pour des propriétés constantes et variables, on a montré que l'influence de la relation entre les propriétés physiques et la température du gaz peut être évaluée avec une précision suffisante par l'artifice d'introduction d'une certaine température déterminante

$$T_* = T_p - 0{,}38\,(T_p - T_f),$$

pour laquelle les paramètres μ, λ, c_p et Pr doivent être portés dans les formules (VII.13) et (VII.14) relatives au cas des propriétés constantes. On admet alors que le coefficient de dilatation volumique $\beta = 1/T_f$, et que le nombre de Prandtl varie de 0,7 à 1.

D'une façon analogue on a montré que pour le mercure il convient d'adopter comme température déterminante la grandeur

$$T_* = T_p - 0{,}3\,(T_p - T_f),$$

à laquelle se rapportent tous les paramètres physiques, y compris le coefficient β et le nombre Pr.

Les résultats obtenus ont été confirmés expérimentalement et sont justifiés dans la marge des températures importantes pour la pratique.

Pour le calcul du transfert de chaleur d'une large plaque inclinée à l'air (Pr = 0,73) il existe la formule :

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}48\,[(1 + \cos\varphi)/2]\,\mathrm{Gr}^{1/4}. \quad \text{(VII.29)}$$

où $\mathrm{Gr}_l = -\frac{gl^3}{\nu^2}\frac{T_p - T_f}{T_f}$; $\overline{\mathrm{Nu}} = \frac{\overline{\alpha} l}{\lambda}$ est le Nüsselt moyen ; l, la longueur de la plaque ; φ, l'angle entre la surface émettrice de chaleur inférieure de la plaque et la verticale. La formule (VII.29) est vraie pour $10^5 < \mathrm{Gr}_l < 10^9$ et $0 < \varphi < 90°$. Avec $\varphi = 0$ la plaque est verticale ; avec $\varphi = 90°$, elle est horizontale (la surface émettrice de chaleur est tournée en bas).

Dans le cas de la surface chauffée (émettrice de chaleur) tournée en haut, on applique la formule

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}54\ \mathrm{Ra}^{1/4}. \qquad \text{(VII.30)}$$

vraie pour les plaques carrées avec $10^5 < \mathrm{Ra} < 2 \cdot 10^7$.

Dans ces formules les propriétés physiques du milieu sont rapportées à la température $0{,}5\,(T_p + T_f)$. Dans la formule (VII.30) la dimension caractéristique adoptée est le côté du carré. Cette formule peut être appliquée également dans le cas où le côté froid de la plaque est tourné en bas et $T_p' < T_f$.

Nous avons déjà noté au début du chapitre qu'avec $\mathrm{Ra} > 0{,}7 \cdot 10^9$ l'écoulement dans la couche limite devient turbulent et les formules du domaine laminaire s'avèrent invalidées.

Pour le moment, il n'existe pas de théorie rigoureuse de la convection naturelle turbulente, et l'intensité du transfert de chaleur sous ce régime se calcule d'après les formules empiriques ou semi-empiriques.

On a montré que pour des nombres de Rayleigh assez grands l'intensité du transfert de chaleur définie par le coefficient de transmission α, aux limites de l'erreur des mesures près, ne dépend pas des dimensions de la plaque, c'est-à-dire on a établi que le Nüsselt est proportionnel à $\mathrm{Gr}^{1/3}$.

Les expériences réalisées avec les fluides aqueux pour des $\mathrm{Pr} = 2{,}4$ à 118, ont permis d'obtenir la relation suivante pour le transfert de chaleur par une plaque verticale sous la convection naturelle

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}0674\,(\mathrm{Gr}_l\ \mathrm{Pr}^{1{,}29})^{1/3}.$$

Elle est justifiée pour $4 \cdot 10^{10} < \mathrm{Ra}_l < 9 \cdot 10^{11}$

Pour une plaque carrée horizontale tournée par le côté chauffé en haut ou par le côté froid en bas, il existe la formule suivante justifiée pour le domaine turbulent:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = 0{,}14\ \mathrm{Ra}_l^{1/3}. \qquad \text{(VII.31)}$$

Dans cette formule la dimension caractéristique est le côté du carré; les propriétés physiques du milieu sont rapportées à la température $0{,}5\,(T_p + T_f)$. La formule (VII.31) est justifiée avec $2 \cdot 10^7 < \mathrm{Ra} < 3 \cdot 10^{10}$.

Les relations écrites sont établies en traitant les données expérimentales par la méthode de la théorie de similitude et sont validées dans les limites de variation des groupements sans dimensions déterminants, appliquées dans ces expériences.

2. Cylindre horizontal

Pour Ra < $0,7\cdot10^9$ il existe une solution analytique du problème de transfert de chaleur d'un cylindre horizontal de longueur infinie dans les conditions de convection naturelle. Cette solution est fondée sur la théorie de la couche limite laminaire et s'accorde avec les résultats des mesures.

Pour un cylindre, tout comme pour le contournement d'une plaque, la solution analytique est obtenue par substitution des variables, ce qui permet de transformer les équations de la couche limite en équations différentielles ordinaires. Cette transformation s'est avérée possible du fait que la solution du problème appartient à la classe des solutions de ce genre.

La solution théorique obtenue par Hermann pour un cylindre horizontal long amène la formule

$$\mathrm{Nu}_x = 0{,}604\, f(\varphi)\, \mathrm{Gr}_x^{1/4}\, (x/d)^{1/4}, \qquad \text{(VII.32)}$$

où x est la coordonnée curviligne comptée à partir du point critique amont le long du contour du cylindre; d, le diamètre du cylindre; $\mathrm{Nu}_x = \alpha_x x/\lambda$; $\mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta x^3}{\nu^2}(T_p - T_f)$; α_x, la valeur locale du coefficient de transmission de chaleur; $f(\varphi)$, une fonction qui dépend de l'angle au centre φ (compté à partir du point critique amont). Les valeurs de la fonction $f(\varphi)$ fournies par la résolution sont

φ, degrés	0	30	60	90	120	150	165	180
$f(\varphi)$	0,760	0,752	0,718	0,664	0,581	0,458	0,360	0

La formule (VII.32) est valide sous le régime laminaire dans la couche limite et Pr = 0,73.

Le nombre de Prandtl intervient dans l'échange de chaleur d'après la relation

$$\frac{\mathrm{Nu}_x/\mathrm{Gr}_x^{1/4}}{(\mathrm{Nu}_x/\mathrm{Gr}_x^{1/4})_{\mathrm{Pr}=0,73}} = \left(\frac{2{,}21}{1{,}143+\mathrm{Pr}}\right)^{1/4}\cdot \mathrm{Pr}^{1/2}.$$

La formule (VII.32) de la valeur locale du nombre de Nüsselt (Nu_x) peut servir pour déduire la formule du Nüsselt moyen suivant la surface du cylindre ($\overline{\mathrm{Nu}}_d$)

$$\overline{\mathrm{Nu}}_d = 0{,}372\, (\mathrm{Gr}_d)^{1/4}. \qquad \text{(VII.33)}$$

Ici $\overline{\mathrm{Nu}}_d = \bar{\alpha} d/\lambda$; $\mathrm{Gr}_d = \frac{\beta g d^3 (T_p - T_f)}{\nu^2}$; $\bar{\alpha}$, le coefficient de transmission de chaleur moyenné suivant la surface du cylindre; d, le diamètre du cylindre.

Pour des nombres de Grashof égaux et $l = d$, le coefficient de transmission de chaleur moyen est de 1,29 fois plus grand pour une plaque verticale que pour un cylindre horizontal.

Pour des nombres de Prandtl différents, le transfert de chaleur moyen d'un cylindre horizontal se calcule en utilisant les résultats obtenus par la combinaison de certaines considérations théoriques avec des coefficients empiriques

Ra	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$\overline{\mathrm{Nu}}_d$	0,497	0,616	0,785	1,03	1,42	2,04	3,10	4,92	8,14	13,8	23,9	41,8

Dans toute la marge des Ra ces données s'accordent bien avec les résultats fournis par les expériences sur l'air, l'anyline, le butane, l'éthyle chlorhydrique et l'huile, réalisées par différents chercheurs. Pour les $\mathrm{Ra} > 10^6$ et $\mathrm{Pr} = 0,74$ ces données coïncident à 2 % près avec les calculs suivant l'équation (VII.33), obtenue par résolution des équations de la couche limite d'un cylindre horizontal. En utilisant les données mentionnées, les paramètres physiques doivent être rapportés à la température $0,5\ (T_p + T_f)$.

Il existe également dans la littérature des relations de similitude approchées qui permettent de résumer avec une certaine erreur les données expérimentales sur la convection naturelle dans le cas des corps les plus simples: plaques verticales, cylindres horizontaux et verticaux, sphères. Telle est la formule (VII.34) établie en dépouillant un grand nombre de données expérimentales (fig. VII.6) de divers chercheurs:

$$\overline{\mathrm{Nu}} = C\mathrm{Ra}^n. \qquad \text{(VII.34)}$$

Pour la déduire, la dimension caractéristique retenue des plaques et des cylindres verticaux était la hauteur, et des cylindres horizontaux et sphères, le diamètre. Les paramètres physiques sont rapportés à la température $0,5\ (T_p^* + T_f)$, $\mathrm{Pr} > 0,7$.

L'analyse des données expérimentales a montré que dans la marge $10^{-3} < \mathrm{Ra} < 5 \cdot 10^2$ le contournement de ces corps donne lieu au régime qui peut s'appeler *pseudo-conductivité thermique*. Dans la marge indiquée des nombres de Rayleigh, $n = 1/8$ et $C = 1,18$.

Sous le régime de pseudo-conductivité, la distribution des températures dans l'ambiance ne se distingue que de peu du champ ther-

mique dans les conditions d'une conductivité pure propre à l'absence totale du mouvement.

La marge $5 \cdot 10^2 < Ra < 2 \cdot 10^7$ est caractérisée par la présence d'une couche limite laminaire complètement formée évoluée à la

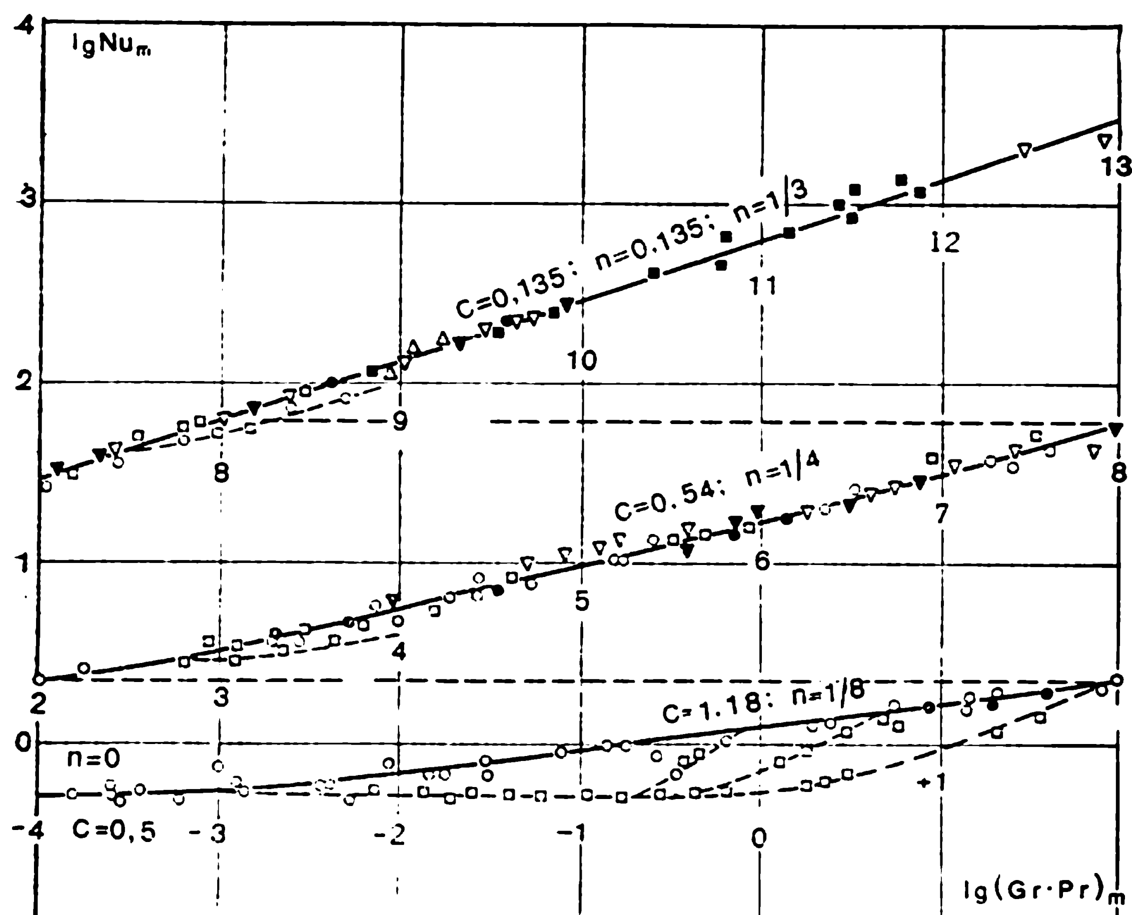


Fig. VII.6. Transfert de chaleur dans le mouvement libre du fluide pour des corps de forme différente

surface du corps. C'est le régime de la *convection laminaire* développée tel que $n = 1/4$ et $C = 0{,}54$.

La marge $2 \cdot 10^7 < Ra < 10^{13}$ inclut pour la couche limite de l'écoulement les *régimes transitoire* ou *mixte* et *turbulent*. Dans cette marge $n = 1/3$ et $C = 0{,}135$.

En réalité le passage d'un régime à un autre s'effectue de façon assez régulière. Chaque régime couvre un domaine de variation un peu plus grand que celui qui a été mentionné. Les limites de ces régimes dépendent sensiblement des conditions dans lesquelles marche le processus et des perturbations extérieures qui ont accompagné l'expérience.

Dans la formule (VII.34) l'élément déterminant est le nombre Ra = Gr·Pr. Cette relation est caractéristique des écoulements du liquide ou du gaz, où les forces d'inertie en action sont faibles par rapport aux forces de frottement intérieur dues à la viscosité.

L'analyse du système d'équations du mouvement, de la continuité et de l'énergie par la méthode de la théorie de la similitude et des dimensions montre que dans les conditions de convection naturelle dans un liquide, en l'absence totale des forces d'inertie, l'intensité du transfert de chaleur est proportionnelle au groupement Gr·Pr. Cependant, avec de petits nombres de Prandtl, caractéristiques des métaux liquides, les forces d'inertie deviennent commensurables avec les forces de frottement interne et la proportionnalité se trouve violée. Dans ces conditions, le traitement des données expérimentales et des variables Nu, Ra conduit à la stratification des données suivant le nombre Pr.

La théorie enseigne que l'impératif de la similitude des phénomènes physiques est la similitude géométrique des corps contournés. La généralisation des données d'expérience pour les corps de forme différente, obtenue au prix d'une certaine dispersion des points testés, s'est avérée possible du fait que sous une convection naturelle dans un grand volume le rôle de la forme est secondaire.

Ce qui importe, c'est que pour un écoulement turbulent évolué l'intensité du transfert de chaleur dans la couche limite ne dépend pratiquement pas des dimensions du corps, l'exposant du nombre de Rayleigh s'étant avéré proche de 1.3. Ce principe rend possible l'étude du processus sur des modèles en réduction.

En utilisant pour le calcul du transfert de chaleur les relations fournies par la théorie de la similitude, il faut retenir qu'elles sont applicables dans les limites de la marge des groupements sans dimensions déterminants (Gr, Pr, Ra) pour laquelle elles sont obtenues. D'autre part, il convient de ne pas perdre de vue que chacune des relations n'est justifiée que sous la condition que la dimension caractéristique du corps et la température déterminante des paramètres physiques soient absolument les mêmes que celles employées pour établir la formule.

§ VII.2. Echange de chaleur lors du mouvement libre en espaces confinés

L'objet du paragraphe précédent a été l'étude du cas d'échange de chaleur lors de la convection naturelle dans un grand volume (indéfini).

Dans ces conditions les processus d'échauffement et de refroidissement se poursuivent sur une grande distance et les courants ascendants et descendants n'influent que peu l'un sur l'autre.

Dans un espace confiné l'épaisseur de la couche limite devient commensurable avec les dimensions de l'espace lui-même, et les processus de chauffage et de refroidissement ne peuvent déjà plus être envisagés séparément.

Si dans un grand volume l'intensité du transfert de la chaleur dépend relativement peu de la forme du corps contourné, dans un espace confiné la formation du champ des vitesses et du champ thermique d'un liquide ou d'un gaz est influencée sensiblement par la forme des parois.

Le problème que pose l'échange de chaleur sous la convection naturelle dans un espace confiné se présente dans de nombreuses applications techniques. L'isolation thermique des conduites, des édifices, des fours et des capacités par des sous-couches de gaz; les formations des champs thermiques et le transfert de chaleur dans les sections et les réservoirs des avions supersoniques, des fusées et des vaisseaux cosmiques; l'échange de chaleur dans les installations radio-électroniques; le transfert de chaleur dans les corps et milieux poreux, autant de problèmes à résoudre qu'imposent ces processus. Ceux-ci présentent un intérêt pratique en géodésie, lorsqu'on affronte des liquides chauffés enfermés en un espace restreint, ainsi qu'en cryogénie pour la conservation durable des gaz liquéfiés.

Un intérêt particulier pour les applications pratiques présente le cas du transfert de chaleur à travers une fente plane horizontale, verticale ou inclinée, ainsi qu'à travers une sous-couche annulaire ou sphérique remplie de liquide ou de gaz.

1. Couches horizontales longues

Dans le cas d'une couche horizontale de liquide ou de gaz chauffée d'en haut il s'établit dans le champ de l'écoulement un état d'équilibre hydrostatique et le transfert de chaleur par la couche ne peut avoir lieu que par conductivité ou rayonnement thermiques *). L'absence de convection n'est possible que dans une couche strictement horizontale avec $T_1 > T_2$ et une distribution régulière des températures à la frontière de la couche. Dans ces conditions les particules froides plus denses du fluide se trouvent près de la paroi inférieure (à température T_2) et ne peuvent pas descendre plus bas. Exactement de la même façon les particules chauffées moins denses qui se trouvent près de la paroi supérieure chauffée (à température T_1) ne peuvent pas monter plus haut. C'est le cas de ce qu'on appelle *stratification stable de la densité.*

Lorsque le gaz est chauffé d'en bas ($T_2 > T_1$), il s'avère, sous certaines conditions, que l'équilibre hydrostatique est également possible. En posant dans les équations du mouvement et de l'énergie

---

*) L'échange de chaleur par radiation fait l'objet du chapitre IX.

que les composantes du vecteur de la vitesse sont nulles et en admettant que le gaz est non visqueux et ne jouit pas de la conductivité thermique, on obtient le système d'équations qui exprime les conditions d'équilibre hydrostatique dans un gaz compressible parfait tel que $p = \rho RT$:

$$dp/dx = \rho g; \quad \rho c_p \, dT/dx = dp/dx. \tag{VII.35}$$

On suppose ici que l'axe des x est orienté verticalement et le vecteur d'accélération de la chute libre g est orienté dans le sens inverse des x positifs.

Ces équations entraînent que dans les conditions d'un équilibre hydrostatique

$$dT/dx = g/c_p. \tag{VII.36}$$

La convection n'est possible qu'avec

$$dT/dx > g/c_p. \tag{VII.37}$$

Du point de vue physique cela signifie que la densité croissante sous l'action de la pesanteur dans le sens négatif de l'axe des x compense la diminution de la densité par suite de l'échauffement de la paroi inférieure et, lorsque la condition (VII.37) est observée, l'équilibre hydrostatique du gaz n'est pas violé.

En partant d'une théorie plus rigoureuse qui tient compte de la viscosité et de la conductivité thermique du fluide incompressible, on a montré que lorsque la couche horizontale indéfinie est chauffée d'en bas, la convection apparaît avec

$$\mathrm{Ra} = \mathrm{Gr} \cdot \mathrm{Pr} > \mathrm{Ra}_{cr}, \tag{VII.38}$$

où $\mathrm{Ra}_{cr} = \left[\frac{g\beta\delta^3}{\nu a} (T_1 - T_2) \right]_{cr}$ est une valeur critique du nombre de Rayleigh, $\mathrm{Ra}_{cr} = 1700$; δ, l'épaisseur de la couche (la distance entre les faces chauffées).

De la sorte, la distribution irrégulière de la densité d'un fluide ne définit pas toujours la formation d'un mouvement libre. La convection n'apparaît qu'à la condition d'une stratification instable de la densité.

Les recherches théoriques ont abouti à établir la condition (VII.38) confirmée également par l'expérience. Il a été montré que dans une fente horizontale remplie de liquide, après l'instauration de l'instabilité thermique apparaît un mouvement à structure cellulaire du courant. La visualisation du courant à l'aide des parois transparentes et des particules solides en suspension dans le liquide a montré que la forme des cellules rappelle dans la projection verticale des nids d'abeilles.

En appliquant l'analogie du diaphragme oscillant, Rayleigh a démontré théoriquement qu'une telle cellule hexagonale (vue en plan) correspond à la forme la plus stable du courant.

Pour $1700 < Ra < 3 \cdot 10^3$, le bas niveau des vitesses d'écoulement permet de l'appeler rampant.

D'après les données de Schmidt, dans cette marge des nombres de Rayleigh

$$Nu = 0{,}0012\ Ra^{0{,}9}. \qquad (VII.39)$$

Dans les conditions de la convection, le liquide monte au centre de la cellule hexagonale pour descendre à sa périphérie. Dans les expériences avec l'air la marche de l'écoulement est inversée. Ces particularités sont liées pour les fluides au caractère différent du rapport de la viscosité à la température. La viscosité des gaz croît avec la température, alors que dans le cas des liquides c'est l'inverse. En présence de la convection la direction de la propagation des perturbations initiales dépend à son tour de la variation de la viscosité à l'intérieur de la couche.

Le régime de convection laminaire évoluée survient avec des nombres de Rayleigh plus grands. Pour $3 \cdot 10^3 < Ra < 2{,}5 \cdot 10^4$ la loi caractéristique de la variation du nombre de Nüsselt est exponentielle en fonction du nombre de Rayleigh

$$Nu = 0{,}24\ Ra^{1/4}. \qquad (VII.40)$$

Cette marge des Rayleigh, si on observe les conditions isothermes des frontières, rend possible l'existence d'une structure bidimensionnelle de l'écoulement sous la forme de longues lances alternantes dont les axes de symétrie sont parallèles aux parois de la fente. A mesure que les nombres de Rayleigh augmentent, le rapport entre la période des courants ascendants et descendants et l'épaisseur de la couche augmente de 2 à 2,8.

Pour des Ra plus élevés, le courant devient tridimensionnel et apparaissent les indices de passage à un régime turbulent. La marge $2{,}5 \cdot 10^4 < Ra < 3 \cdot 10^4$ justifie la formule

$$Nu = 0{,}3\ Gr^{0{,}16}\ Pr^{0{,}21}. \qquad (VII.41)$$

Avec $Ra > 3 \cdot 10^4$

$$Nu = 0{,}1\ Gr^{0{,}31}\ Pr^{0{,}36}. \qquad (VII.42)$$

Les mesures optiques réalisées par Schmidt et Saunders ont montré que dans une couche de fluide horizontale longue le régime turbulent apparaît avec $Ra > 5 \cdot 10^4$.

Des recherches ultérieures ont montré que, outre le nombre de Rayleigh, le passage au régime turbulent dépend également du nombre de Prandtl. Dans des milieux moins visqueux la turbulence apparaît avec des Rayleigh plus petits.

Les relations (VII.41) et (VII.42) entraînent que pour Ra > > 2,5·10⁴ ce nombre caractéristique n'est pas le seul à être déterminant. Pour de grands nombres de Rayleigh, l'influence des nombres de Grashof et de Prandtl sur l'échange de chaleur cesse d'être la même. Dans les formules (VII.39)-(VII.42) les nombres caractéristiques figurent comme suit:

$$\mathrm{Gr}=\frac{g\beta\delta^3}{\nu^2}(T_2-T_1)\,;\quad \mathrm{Pr}=\frac{\mu c_p}{\lambda}\,;\quad \mathrm{Nu}=\frac{\lambda_é}{\lambda}. \qquad \text{(VII.43)}$$

Toutes les grandeurs qui déterminent les propriétés physiques du milieu sont rapportées ici à la temperature moyenne dans la sous-couche 0,5 (T_1+T_2). Comme dimension caractéristique on a adopté l'épaisseur δ de la sous-couche. Dans les calculs techniques du transfert de chaleur à travers des sous-couches et des fentes on introduit le coefficient de conductivité équivalente $\lambda_é$.

Le nombre de Nüsselt moyen $\overline{\mathrm{Nu}}$ pour une sous-couche plane est établi ici sous la forme du rapport de $\lambda_é$ à la conductivité du milieu λ qui constitue la sous-couche. Ainsi, le Nüsselt moyen montre de combien de fois l'intensité du transfert de chaleur augmente sous l'action de la convection naturelle par rapport aux conditions de conductivité pure.

D'après le nombre $\overline{\mathrm{Nu}}$ moyen on calcule la densité moyenne du flux thermique q qui passe par la couche du liquide et du gaz

$$q=\frac{\lambda_é}{\delta}(T_2-T_1)=\frac{\overline{\mathrm{Nu}}\lambda}{\delta}(T_2-T_1). \qquad \text{(VII.44)}$$

Il convient de retenir que dans les conditions envisagées la structure tourbillonnaire complexe de l'écoulement fait que les Nüsselt locaux changent le long des frontières de la sous-couche. Pour les sous-couches, leurs valeurs (Nu_1, Nu_2) sont déterminées par les relations

$$\mathrm{Nu}_1=\lambda_1\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\right)_1\frac{\delta}{\lambda\,\Delta T}\,,\quad \mathrm{Nu}_2=\lambda_2\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2\frac{\delta}{\lambda\,\Delta T}\,, \qquad \text{(VII.45)}$$

où les indices « 1 » et « 2 » signifient que le paramètre donné concerne la paroi à la température T_1 ou T_2 respectivement; $\Delta T = T_2 - T_1$ $(T_2 > T_1)$; λ, la conductivité thermique du milieu à la température moyenne de la couche; λ_1 et λ_2, la conductivité du milieu aux températures T_1 et T_2. Avec les propriétés physiques constantes du milieu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Dans les limites de chaque cellule tourbillonnaire le nombre local de Nüsselt diminue à mesure que l'épaisseur de la couche limite thermique croît.

L'information détaillée sur la structure locale de l'écoulement tourbillonnaire est obtenue grâce aux résolutions numériques des équations de Navier-Stokes publiées ces derniers temps. Les solu-

tions de cette sorte se sont avérées possibles par suite du développement des méthodes numériques et de l'apparition des ordinateurs rapides à grand volume de mémoire opératoire.

Les formules décrites précédemment sont validées pour des couches horizontales longues chauffées d'en bas. Pour les couches d'étendue limitée la présence des parois latérales conduit à l'augmentation du nombre de Rayleigh critique qui détermine les conditions de l'apparition de la convection.

Les parois latérales interviennent en diminuant l'intensité du transfert. Ceci devient particulièrement apparent avec de petits Rayleigh près de la limite de stabilité.

2. Couches verticales

Dans une couche verticale de fluide délimitée par des parois planes solides portées à des températures différentes, la différence des températures engendre une stratification instable de la densité rendant impossible l'existence de l'équilibre hydrostatique. Le mouvement convectif apparaît dès que le nombre de Rayleigh devient différent de zéro et s'intensifie progressivement avec son augmentation.

Une couche verticale devient le siège d'une circulation à courant ascendant le long de la paroi verticale chauffée jusqu'à une température plus élevée, et à courant descendant le long de la paroi à température plus basse.

Examinons la convection dans les enceintes verticales rectangulaires dont les frontières horizontales sont rendues calorifuges.

D'après les données disponibles, on peut indiquer les limites approchées suivantes des régimes d'écoulement et d'échange de chaleur. Pour la convection naturelle de l'air, une couche verticale à rapport de la hauteur à l'épaisseur égal à 10, dans la marge $0 < \mathrm{Gr} < 2{,}8\cdot10^3$ donne lieu au régime de pseudo-conductivité sous lequel l'intensité du transfert de chaleur reste au niveau de la conductivité pure, bien que dans le champ de l'écoulement les vitesses soient différentes de zéro. (Ici le nombre Gr est établi suivant la largeur δ de la fente.) Pour $2{,}8\cdot10^3 < \mathrm{Gr} < 2{,}5\cdot10^4$ il existe un certain régime transitoire qui précède à l'apparition des couches limites thermiques aux parois verticales maintenues aux températures constantes mais différentes. Dans la marge $2{,}5\cdot10^4 < \mathrm{Gr} < 3{,}2\cdot10^5$ se forme le régime de la convection laminaire développée. On peut l'appeler aussi régime de la couche limite. Dans le domaine $3{,}2\cdot10^5 < \mathrm{Gr} < 10^6$ on observe à l'intérieur de la couche des courants secondaires sous la forme de gros tourbillons isolés qui se superposent sur la circulation essentielle. A peu près à partir de $10^6 < \mathrm{Gr} < 10^7$ on enregistre des phénomènes précurseurs du régime turbulent: formation de petits tourbillons et des pulsa-

tions non stationnaires. Un écoulement turbulent évolué survient avec $Gr > 10^7$ *).

Les limites de ces régimes dépendent du nombre Pr et des rapports entre les côtés du domaine.

Pour calculer l'intensité du transfert de chaleur par de longues couches verticales de l'air on peut utiliser la formule empirique suivante:

$$Nu = 0{,}119\ Gr^{0,3}\ (h/\delta)^{-0,1}, \qquad \text{(VII.46)}$$

où h est la hauteur de l'enceinte rectangulaire: δ, la distance entre les parois chauffées.

La formule est justifiée pour $10^3 < Gr < 5 \cdot 10^6$ et $2{,}3 < h/\delta < < 47$.

Pour les fluides aqueux, la formule empirique est la suivante

$$Nu = 0{,}28\ Ra^{1/4}\ (h/\delta)^{-1/4}, \qquad \text{(VII.47)}$$

qu'on peut utiliser pour $10^3 < Ra < 10^7$ et $5 < h/\delta < 20$. Les expériences dont les résultats ont permis d'établir cette formule ont été réalisées avec de l'alcool, l'huile, la glycérine, ainsi qu'avec d'autres liquides, et couvrent une large marge des nombres de Prandtl.

Dans les formules (VII.46), (VII.47) les propriétés physiques du caloporteur doivent être rapportées à la température moyenne de la couche. Pour définir les nombres caractéristiques Gr et Ra, on retient comme dimension déterminante la distance δ entre les parois chauffées; $\Delta T = T_2 - T_1$, où T_1 et T_2 sont les températures des frontières verticales du domaine ($T_2 > T_1$). Le nombre de Nüsselt moyen, qui détermine l'intensité du transfert de chaleur, est établi exactement de la même façon que pour les couches horizontales, c'est-à-dire $\overline{Nu} = \lambda_{\text{é}}/\lambda$.

En régime de la convection laminaire évoluée les Nüsselt locaux changent sensiblement le long des frontières verticales de la couche. Sur la plus grande partie de la paroi chauffée le Nüsselt local diminue dans le sens du courant ascendant. Sur la paroi froide il diminue dans le sens du courant descendant. Certains écarts de cette loi s'observent seulement dans les zones initiales des parois verticales, c'est-à-dire là où se forme la couche limite.

Il s'est avéré que le transfert de chaleur le plus intense a lieu dans une enceinte à rapport de la hauteur h à la largeur δ valant à peu près 1,5. Ces données sont obtenues avec $10^4 < Ra < 5 \cdot 10^4$.

Le rapport de Nu à h/δ est visualisé sur la figure VII.7.

*) C'est-à-dire avec $Gr_h > 10^{10}$, où le nombre Gr_h est établi suivant la hauteur (h) de la fente ($h/\delta = 10$).

Pour le régime turbulent de l'écoulement dans une couche verticale il existe l'équation de similitude suivante

$$\mathrm{Nu} = 0{,}046\ \mathrm{Ra}^{1/3}. \tag{VII.48}$$

Elle est obtenue pour des conditions aux limites mixtes, c'est-à-dire pour le cas où sur l'une des parois verticales est maintenue

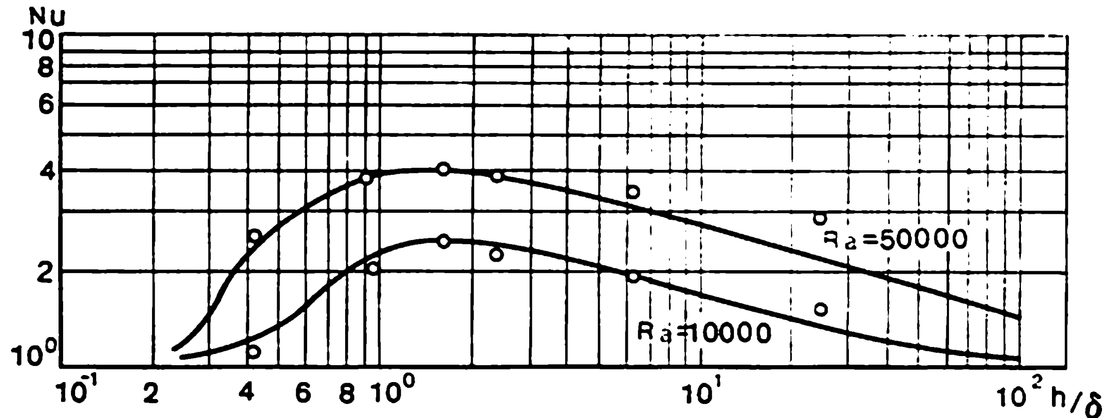


Fig. VII.7. Relation entre le transfert de chaleur et le rapport des côtés d'une cavité rectangulaire:
———— — théorie; O — expérience

la densité constante du flux thermique q_p = const, alors que sur l'autre est donnée la température T_p = const. Cette équation est validée pour $10^6 < \mathrm{Ra} < 10^9$; $1 < \mathrm{Pr} < 20$ et $1 < h/\delta < 40$. Le nombre de Rayleigh est établi ici d'après la différence moyenne des températures sur les frontières verticales. (A la frontière à q_p = = const la température change suivant la hauteur de la paroi.) Pour la dimension caractéristique on a adopté la largeur de la couche δ. Les propriétés physiques du milieu sont rapportées à la température imposée T_p.

CHAPITRE VIII

TRANSFERT DE CHALEUR AVEC CHANGEMENT DE PHASE

§ VIII.1. Cas de la condensation des vapeurs

Le transfert de chaleur dans la condensation des vapeurs à une surface refroidie et dans l'ébullition d'un liquide s'accompagne des changements de phase de la matière.

La condensation de la vapeur et l'ébullition du liquide influent sensiblement sur l'intensité des échanges de chaleur.

La formation d'une phase nouvelle à la surface d'échange complique le processus d'échange par convection et rend plus difficile l'application des approches analytiques de la résolution des problèmes.

1. Généralités

Dans le cas de la condensation des vapeurs l'échange de chaleur est un phénomène compliqué associé simultanément au transfert de chaleur et de masse (de matière) et au changement de phase qui se traduit par la transformation du gaz en liquide ou solide.

La masse transportée est définie par la quantité de la vapeur condensée, et la chaleur transférée (sous la condition de la vapeur saturée), par la chaleur de vaporisation.

Le nombre de facteurs qui interviennent dans le transfert de chaleur en présence de la condensation est sensiblement plus grand que lorsque la phase ne change pas. Ceci est à l'origine des difficultés supplémentaires. Par exemple, si pour l'échange de chaleur sans changement de phase la surface ne doit être caractérisée que par sa géométrie, dans le cas de la condensation tout aussi importantes sont les propriétés physiques et chimiques envisagées dans leur combinaison avec les propriétés physiques et chimiques du milieu (liquide, gaz).

La prise en compte de tous les facteurs qui interviennent dans ce processus et leur analyse sont très difficiles non seulement sur le plan théorique, mais aussi expérimental.

Le plus souvent les travaux entrepris dans ce sens ont un caractère d'évaluations globales et ne revèlent pas toute la complexité

de la marche de l'échange de chaleur. Il est vrai que ces derniers temps paraissent des ouvrages dont les auteurs, en recourant à des appareils de mesure modernes et des procédés de laboratoire originaux, rendent de plus en plus clair le phénomène de changement de phase.

La condition nécessaire de la condensation de la vapeur, si cette dernière se trouve à l'état subcritique, est la présence soit d'une zone, soit d'une surface (paroi) à température inférieure à celle de la vapeur saturée.

A l'instant initial du contact de la vapeur avec la surface (paroi) froide, cette dernière se couvre d'une couche adsorbée monomolé-



Fig. VIII.1. Condensation en film

culaire qui au cours de la condensation soit croît et se densifie, soit, en atteignant une épaisseur définie (de l'ordre d'un micron), se rompt en formant un grand nombre de gouttes. Ensuite, la croissance de gouttes se poursuit et il s'en forme de nouvelles.

La première forme de la condensation, lorsque il se forme à la surface un film continu stable (fig. VIII.1), s'appelle *condensation en film* ou *pelliculaire.* La deuxième forme, lorsque le processus s'accompagne de la formation de gouttes, s'appelle *condensation en gouttelettes* (fig. VIII.2).

La différence dans l'interaction entre la surface et le condensat est conditionnée, comme on se l'imagine facilement, par la différence des propriétés physico-chimiques des milieux.

Si à la surface d'un corps solide une goutte prend la forme telle que l'angle marginal α est un angle aigu (fig. VIII.3, *a*), on dit que le liquide *mouille* le corps.

La tension superficielle d'un corps solide est plus grande que la somme des tensions aux frontières de la goutte avec ce corps et la vapeur:

$$\sigma_{p.v} > \sigma_{p.l} + \sigma_{l.v} \cos \alpha.$$

Dans le cas limite, lorsque $\alpha = 0$, la goutte s'étend sur la paroi en un mince film. Ce phénomène d'extension de la goutte à la surface s'appelle *mouillabilité absolue.*

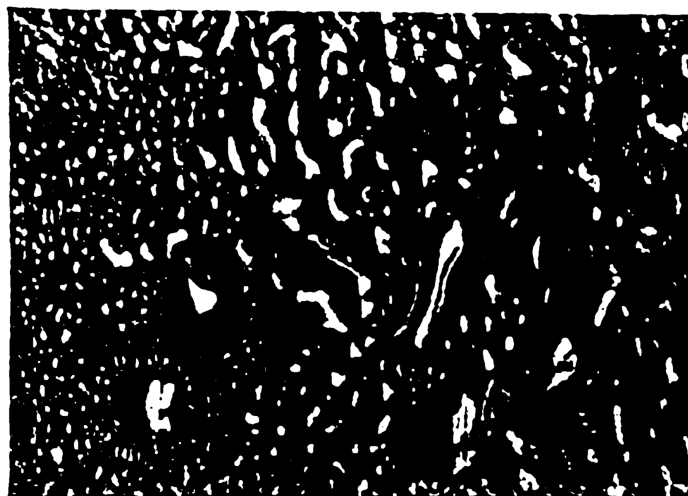


Fig. VIII.2. Condensation en gouttelettes

Avec $\alpha > 90°$ (fig. VIII.3, *b*) ce sont les forces superficielles qui dominent $\sigma_{p\,l}$, et avec $\alpha = 180°$, le liquide s'accumule en gouttelettes. Ce phénomène s'appelle *immouillabilité absolue.*

La tension superficielle à la frontière d'un corps solide (paroi) avec le liquide est plus grande que la somme des tensions du corps solide et du liquide en interaction avec la vapeur:

$$\sigma_{p.l} > \sigma_{p.v} + \sigma_{l.v} \cos \alpha.$$

La mouillabilité absolue s'observe lors de l'arrosage du verre pur par l'eau, l'alcool, le benzole. L'immouillabilité absolue, lors de l'arrosage de ce même verre par du mercure.

Le mouvement du film aussi bien que celui des gouttes à la surface est défini soit par l'effet gravifique, si la condensation se produit à partir d'une vapeur fixe, soit par celui des forces de frottement supplémentaires de la part de la vapeur coulante.

Si dans le cas de l'écoulement en film la différence de l'allure du mouvement est conditionnée seulement par l'épaisseur du film et le régime, dans celui de la condensation en gouttelettes, ces

dernières peuvent se rejoindre pour former des filets continus se transformant ensuite en courant continu qui couvre la paroi (surface) toute entière.

Dans les appareils réels, outre le phénomène noté, la condensation est influencée par l'état de surface, surtout dans la période

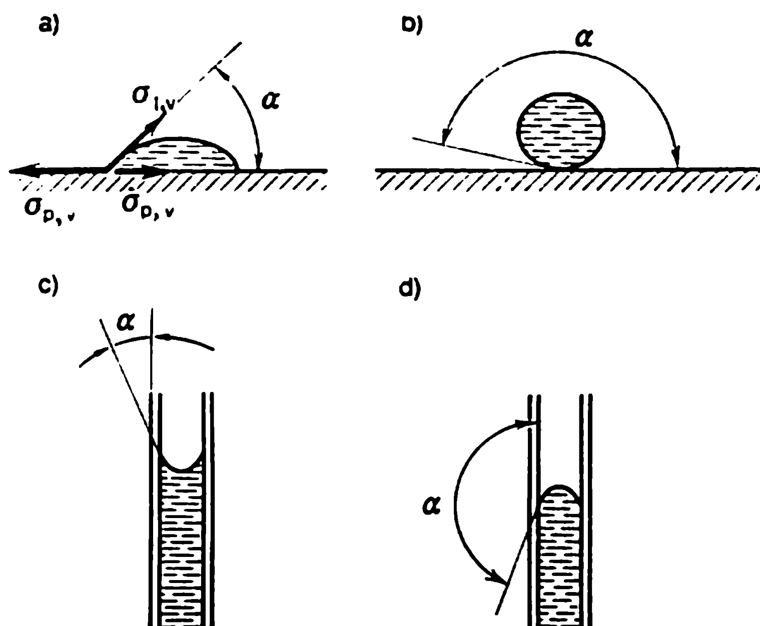


Fig. VIII.3. Mouillage par le liquide d'une surface : paroi plane (*a*) et paroi d'un tube (*c*) ; surface non mouillable par un liquide : paroi plane (*b*) ; paroi d'un tube (*d*)

initiale du fonctionnement, lorsque les parois sont encrassées par de l'huile.

Le plus souvent l'échange de chaleur de la condenstion est à affronter dans l'énergétique, lors du refroidissement de la vapeur usagée des turbines, dans les évaporateurs à distiller, l'industrie chimique, les appareils à absorption (machines), etc.

D'après les expériences, le coefficient de transmission de chaleur de la condensation en film est de 5 à 10 fois inférieur à celui de la condensation en gouttelettes. Il en est ainsi du fait que la résistance thermique du film qui sépare la vapeur de la paroi est très grande.

Bien que dans la condensation en gouttes l'échange de chaleur est plus avantageux que dans le cas en film, c'est à ce dernier que pratiquement on a le plus souvent affaire.

Pour le cas de la condensation sur une paroi froide, l'échange de chaleur dans la transformation de la vapeur en liquide peut être divisé conventionnellement en plusieurs phénomènes simples successifs dont chacun influe sur le résultat :

1. Amenée de la vapeur à la paroi ou à la surface de séparation des phases (film) par transfert moléculaire ou monomoléculaire.

2. Condensation elle-même qui se produit à la paroi ou à la surface de séparation.

3. Transfert de chaleur à la paroi refroidissante avec condensation de la vapeur.

La vitesse d'amenée de la vapeur à la surface (paroi) peut se calculer à partir de l'équation du bilan de la masse à la surface d'échange de chaleur

$$w = q/(r\rho''),$$

où q est la charge thermique de la surface; ρ'', la densité de la phase de vapeur pour les paramètres de saturation; r, la chaleur de vaporisation.

La formule est justifiée pour la condensation des vapeurs pures. Pour le cas où la vapeur est mélangée au gaz ne se prêtant pas à la condensation, le calcul de la vitesse d'amenée de la vapeur à la surface de condensation doit se faire compte tenu de la résistance du gaz incondensable.

La condensation à la surface de séparation des phases est le résultat de deux processus: condensation des molécules qui frappent la surface du liquide et sont captés par cette dernière, et évaporation des molécules de cette même surface.

La condensation *visible* s'obtient lorsque la quantité de molécules liées en un liquide dépasse la quantité de molécules émises par la phase liquide sous forme de vapeur. Ce phénomène, c'est-à-dire sa valeur quantitative, peut être caractérisé par le *coefficient de condensation* f, qui détermine la part que font les molécules maintenues à la surface du condensat par rapport au nombre total des molécules amenées à la surface.

La figure VIII.4 montre que la résistance thermique du transfert de chaleur de la vapeur à la paroi se compose de la résistance thermique du film et de la résistance thermique du changement de phase.

Lorsque le coefficient de condensation f est petit, la résistance du changement de phase devient commensurable avec la résistance thermique du film; avec l'augmentation de f, la résistance du changement de phase diminue, et, à la limite, s'annule. Donc, pour évaluer correctement la résistance totale, il faut connaître sa composante due au changement de phase, autrement dit les valeurs du coefficient de condensation.

D'après la théorie cinétique élémentaire des gaz, la résistance thermique de la transformation d'état est donnée par l'expression suivante:

$$R_{\text{ph}} = \frac{T_{\text{v}} - T_{\text{sur}}}{q} = \frac{2-f}{2f} \; \frac{\sqrt{2\pi R_{\text{v}}}}{r} \cdot \frac{T_{\text{v}} - T_{\text{sur}}}{p_{\text{v}}/\sqrt{T_{\text{v}}} - p_{\text{sur}}/\sqrt{T_{\text{sur}}}}, \quad \text{(VIII.1)}$$

où T_v et T_{sur} sont les températures de la vapeur et de la surface du condensat; p_v et p_{sur}, la pression de la vapeur saturée à T_v et T_{sur}; R_v, la constante de gaz de la vapeur.

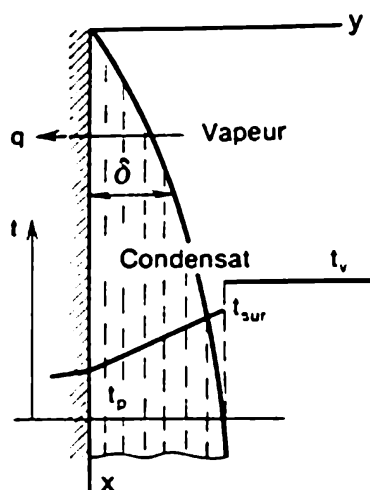


Fig. VIII.4. Schéma qualitatif de la condensation en film sur une plaque verticale

Comme le montre la courbe de la figure VIII.5, la résistance thermique du changement de phase dépend sensiblement de la pression et du coefficient de condensation. Actuellement il n'existe pas de données suffisamment sûres sur la valeur de ce dernier

A la pression $p_v > 10^4$ Pa le coefficient de condensation de la vapeur d'eau peut être pris égal à l'unité, et alors on peut négliger la résistance thermique de la transformation d'état par rapport à la résistance thermique du film de condensat. Pour calculer cette dernière $R = (t_v - t_p)/q = 1/\alpha$, c'est-à-dire pour résoudre le problème d'échange thermique lors de la condensation en film des vapeurs on doit avant tout définir l'épaisseur du film de condensat et l'allure du mouvement du liquide dans le film.

Au passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent du film correspond un nombre de Reynolds défini

$$\mathrm{Re} = \overline{w}\delta/\nu_l,$$

où δ est l'épaisseur du film dans la section considérée; $\overline{w}$, la vitesse moyenne du film dans la section considérée; ν_l, la viscosité cinématique du liquide.

Comme le montrent les expériences, un écoulement purement laminaire, stratifié, ne se conserve qu'à de très faibles valeurs du nombre Re = 3 à 8. Lorsque ces valeurs sont plus grandes, à la surface du film apparaissent des ondes. Au cas où l'écoulement laminaire du film prend une allure ondulatoire, le processus d'échange de chaleur devient assez compliqué.

Les tentatives de résoudre analytiquement le problème du mouvement ondulatoire du film ont été entreprises par P. Kapitsa. Il débutait par l'idée de l'allure sinusoïdale bidimensionnelle du mouvement ondulatoire, dont l'amplitude est sensiblement inférieure à l'épaisseur moyenne du film et la longueur d'onde, bien plus grande que cette épaisseur δ_0. Il a montré que dans le mouvement ondulatoire l'épaisseur moyenne du film est plus petite que dans le mouvement laminaire. C'est précisément par cette diminution de l'épaisseur que certains auteurs expliquent pourquoi

le coefficient de transmission de chaleur moyen devient plus grand par rapport au calcul.

L'étude analytique du mouvement non ordonné tridimensionnel réel du film d'un liquide présente, de nos jours encore, des difficultés insurmontables du point de vue mathématique. Aussi, dans

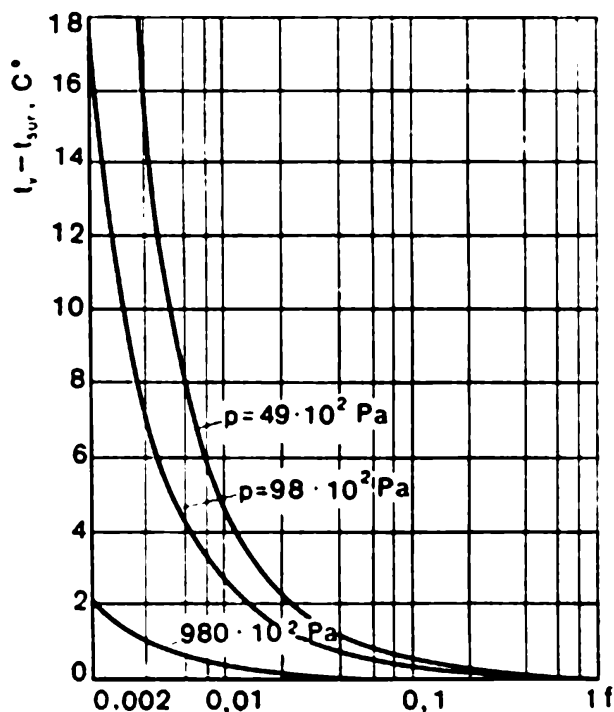


Fig. VIII.5. Influence du coefficient de condensation et de la pression de la vapeur sur le saut des températures $T_v - T_{sur}$ pour $q = 29$ kW/m²

ces conditions c'est l'expérience qui permet d'obtenir des données les plus sûres.

Pourtant, l'analyse théorique d'un modèle physique simplifié de la condensation en film permet de définir les paramètres principaux et leur influence sur l'échange de chaleur.

Pour condenser 1 kg de vapeur saturée sèche il faut évacuer de la paroi une chaleur égale à celle du changement de phase r. Mais si on tient compte que la température du condensat est inférieure à celle de saturation, il faut transmettre en plus une partie de la chaleur du condensat.

Dans de nombreux calculs pratiques on néglige la chaleur du liquide par rapport à la chaleur du changement de phase, pour adopter

$$Q = Gr. \qquad \text{(VIII.2)}$$



Si le débit G s'écrit $\rho_1 \overline{w} f$ ou $\rho_1 \overline{w} \delta l_z$, où ρ_1 est la densité du condensat; $\overline{w}$, la vitesse moyenne du film; δ, son épaisseur; f, l'aire de la section droite; l_z, la dimension de la paroi (du film) perpendiculairement au plan du dessin, alors, il vient

$$Q = \rho_1 \overline{w} \delta l_z r.$$

D'autre part, lorsque le processus est stationnaire, la chaleur transmise par le condensat à la paroi peut se calculer à l'aide du coefficient de transmission de chaleur

$$Q = \overline{\alpha} \overline{\Delta t} F = \overline{\alpha} \Delta \overline{t} x l_z, \qquad \text{(VIII.3)}$$

où $\overline{\alpha}$ est le coefficient de transmission de chaleur moyen sur la longueur x; $\Delta t = t_1 - t_p$, la différence de la température entre le condensat et la paroi. En égalant les deuxièmes membres des deux équations, il vient

$$r \rho_1 \overline{w} \delta = \overline{\alpha} \Delta t x, \qquad \text{(VIII.4)}$$

c'est-à-dire pour calculer la chaleur transmise, il faut trouver la vitesse moyenne du courant $\overline{w}$ et l'épaisseur du film δ.

2. Echange de chaleur dans la condensation en film d'une vapeur fixe lors de l'écoulement laminaire du film sur une plaque verticale

La théorie du transfert de chaleur dans la condensation en film d'une vapeur saturée pure sur une plaque verticale a été établie par Nüsselt.

Le problème se résolvait sous des hypothèses définies. On a admis que dans le film l'écoulement est laminaire. La température du liquide près de la paroi était considérée comme égale à celle de la paroi; à la surface extérieure du film, en regard de la vapeur, la température est égale à celle de saturation.

La résolution ne tenait compte de la conductivité du film que dans le sens perpendiculaire à la paroi (suivant l'épaisseur du film), le transfert par convection étant absent, les propriétés physiques du condensat étant considérées comme constantes et le processus, stationnaire. Les forces d'inertie, très petites par rapport à celles de frottement, ainsi que l'interaction entre la vapeur et la surface du film étaient négligées.

Compte tenu de ces restrictions, l'équation de l'énergie se ramène à la forme

$$\partial^2 t / \partial y^2 = 0. \qquad \text{(VIII.5)}$$

Le premier membre de l'équation (IV.17) s'annule, puisque le processus est stationnaire et dans le film le transfert de chaleur par convection n'a pas lieu. $\partial^2 t / \partial x^2$ et $\partial^2 t / \partial z^2$ du deuxième membre

s'annulent puisqu'on a adopté que la chaleur est transférée seulement dans le sens de l'axe des y (perpendiculairement à la paroi). Simplifions l'équation du mouvement du film

$$\mu_l d^2w_x/dy^2 = -\rho_l g. \qquad \text{(VIII.6)}$$

Le premier membre de l'équation (IV.50) s'annule du fait que les forces d'inertie sont négligeables et le processus stationnaire, c'est-à-dire w_x ne change pas le long de l'axe des x, et $w_z = 0$; $w_y = 0$. Dans le deuxième membre de l'équation $\partial p/\partial x \approx 0$, du fait que la pression de la vapeur est la même suivant toute la longueur de la paroi et la pression hydrostatique négligée par suite de la faible densité de la vapeur par rapport au condensat. Les dérivées secondes $\partial^2 w_x/\partial x^2$ et $\partial^2 w_z/\partial z^2$ sont également nulles. De la sorte, pour résoudre le problème de l'échange de chaleur stationnaire d'un film de condensat en mouvement avec les restrictions adoptées, on a obtenu le système de deux équations

$$\frac{d^2t}{dy^2} = 0 \text{ et } \mu_l \frac{d^2w_x}{dy^2} = -\rho_l g. \qquad \text{(VIII.7)}$$

Les simplifications adoptées pour la résolution du problème permettent d'omettre l'indice x affecté à la vitesse w et d'introduire les conditions aux limites

$$\text{pour } y = 0,\ t = t_p \text{ et } w = 0;$$
$$\text{pour } y = \delta,\ t = t_{sat} \text{ et } dw/dy = 0.$$

La condition $dw/dy = 0$ s'ensuit de l'hypothèse adoptée suivant laquelle les forces de frottement entre le film en mouvement et la vapeur fixe sont négligeables.

L'intégration des équations, compte tenu des conditions aux limites, donne

$$dt/dy = (t_{sat} - t_p)/\delta.$$

Ceci signifie que la chaleur évacuée à travers le film vers la paroi vérifie également la loi de la conductivité thermique.

L'équation de Fourier entraîne $q = -\lambda_l\, dt/dy$. En portant l'expression de dt/dy dans l'équation de Fourier, on obtient

$$q = \lambda_l (t_{sat} - t_p)/\delta.$$

D'autre part, la chaleur passée par le film est transmise à la paroi et peut être calculée d'après la formule de Newton

$$q = \alpha (t_{sat} - t_p).$$

Egalons les deuxièmes membres des équations

$$\alpha (t_{sat} - t_p) = \lambda_l \frac{t_{sat} - t_p}{\delta},$$

ou

$$\alpha = \frac{\lambda_l}{\delta} \frac{t_{sat} - t_p}{t_{sat} - t_p}; \quad \alpha = \frac{\lambda_l}{\delta}. \qquad \text{(VIII.8)}$$

Pour chaque point de la surface d'échange de chaleur envisagée le coefficient de transmission de chaleur est proportionnel à la conductivité thermique et inversement proportionnel à l'épaisseur du film de condensat.

Fig. VIII.6. Distribution de la vitesse et de la température dans l'écoulement en film de Nüsselt

Pour calculer la relation entre δ et la coordonnée x, utilisons l'équation du mouvement (VIII.6) que nous allons soumettre à l'intégration

$$w = -\frac{\rho_l g}{2\mu_l} y^2 + C_1 y + C_2.$$

Portons-y les conditions aux limites pour obtenir

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{\rho_l g}{\mu_l} \delta$$

et

$$w = -\frac{\rho_l g}{2\mu_l} (y^2 - 2\delta y). \qquad \text{(VIII.9)}$$

La distribution des vitesses suivant cette équation est visualisée sur la figure VIII.6.

Le débit massique du condensat par la section droite du film large de 1 m peut s'écrire

$$G = \rho_l \delta \overline{w} \cdot 1,$$

où

$$\overline{w} = \frac{1}{\delta} \int_{y=0}^{\delta} w \, dy.$$

Remplaçons la vitesse w par son expression (VIII.9); il vient

$$\overline{w} = \frac{1}{\delta} \int_{y=0}^{\delta} -\frac{\rho_l g}{2\mu_l} (y^2 - 2\delta y) \, dy = \frac{\rho_l g}{2\mu_l \delta} \left[\int_{y=0}^{\delta} y^2 \, dy - \int_{y=0}^{\delta} 2\delta y \, dy \right],$$

ou

$$\overline{w} = \rho_l g\delta^2/(3\mu_l), \qquad \text{(VIII.10)}$$

il s'ensuit que

$$G = g\rho^2{}_l\delta^3/(3\mu_l).$$

En dérivant par rapport à x on a

$$\frac{dG}{dx} = \frac{g\rho_l^2\delta^2}{\mu}\frac{d\delta}{dx}. \qquad \text{(VIII.11)}$$

D'autre part, l'augmentation du débit du liquide par le film est due à la condensation de la vapeur à la surface du film. Donc,

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\lambda/\delta\,(t_{\text{sat}}-t_p)\cdot 1}{r}. \qquad \text{(VIII.12)}$$

En associant les formules (VIII.11) et (VIII.12), on obtient

$$\frac{\lambda}{\delta}\frac{t_{\text{sat}}-t_p}{r} = \frac{g\rho_l^2\delta^2}{\mu_l}\frac{d\delta}{dx},$$

et après l'intégration

$$x = \frac{\rho_l^2 g r\delta^4}{4\lambda_l\mu_l\,(t_{\text{sat}}-t_p)} + C.$$

Puisque pour $x = 0$, l'épaisseur du film $\delta = 0$, on a $C = 0$. On obtient finalement

$$\delta = \sqrt[4]{4\mu_l\lambda\,(t_{\text{sat}}-t_p)\,x/(gr\rho_l^2)}. \qquad \text{(VIII.13)}$$

Maintenant la formule (VIII.8) se ramène à la forme

$$\alpha = \sqrt[4]{r\rho_l^2 g\lambda_l^3/4\mu_l\,(t_{\text{sat}}-t_p)\,x}. \qquad \text{(VIII.14)}$$

En moyennant les valeurs locales des coefficients de transmission de chaleur suivant la surface, on a

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{h}\int_0^h \alpha\,dx, \qquad \text{(VIII.15)}$$

où h est la longueur du secteur de moyennage depuis la section $x = 0$. Après l'intégration, on a

$$\overline{\alpha} = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{r\rho^2 g\lambda_l^3}{4\mu_l\,(t_{\text{sat}}-t_p)h}}, \text{ ou}$$

$$\overline{\alpha} = 0{,}943\sqrt[4]{\frac{r\rho^2 g\lambda_l^3}{\mu_l\,(t_{\text{sat}}-t_p)\,h}}. \qquad \text{(VIII.16)}$$

Ainsi, avec l'augmentation de x ou de h, le coefficient de transmission de chaleur diminue et l'épaisseur du film augmente, les équations (VIII.13), (VIII.14) entraînant que $\delta \sim x^{1/4}$; $\alpha \sim x^{-1/4}$; $\overline{\alpha} \sim h^{-1/4}$. Maintenant

$$\mathrm{Nu} = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{1}{4} \mathrm{Ga} \cdot \mathrm{Pr} \cdot \mathrm{K}}, \qquad \text{(VIII.17)}$$

où $\mathrm{Nu} = \overline{\alpha} h/\lambda_l$; $\mathrm{Ga} = gh^3/\nu_l^2$ est le nombre de Galilée; $\mathrm{Pr} = \nu_l/a$; $K = \frac{r}{c_p(t_{sat} - t_p)}$, le nombre du changement de phase.

Il convient de rappeler que l'équation de similitude (VIII.17), tout comme (VIII.13), n'est vraie que pour l'écoulement laminaire et s'obtient sous des hypothèses définies.

Le problème qui tient compte du transfert par convection et des forces d'inertie dans le film a été résolu par G. Kroujiline et D. Labountsov qui ont montré que pour

$$\mathrm{K} \equiv \frac{r}{c_p \Delta t} > 5 \text{ et } 1 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 100,$$

l'influence de ces effets n'a pas d'importance et les résultats d'une résolution plus précise coïncident pratiquement avec la formule de Nüsselt.

Pour $\mathrm{K} < 5$ et $1 \leqslant \mathrm{Pr} \leqslant 100$ le coefficient de transmission de chaleur est sensiblement supérieur à la valeur de α calculée d'après l'équation de Nüsselt, surtout pour des charges thermiques élevées, ou dans la région proche des valeurs critiques où le rapport r/c_p diminue sensiblement.

Avec de petits nombres de Prandtl (métaux liquides), dans une large marge de charges thermiques l'émission de chaleur se distingue également de celle calculée d'après la formule de Nüsselt, cette différence (diminution) pouvant atteindre 50 % et plus.

Si à ce qui vient d'être dit on ajoute encore des corrections qui rendent compte de la dépendance des paramètres physiques du condensat par rapport à la température, ainsi que la correction sur l'allure ondulatoire du mouvement du film, la formule de calcul se met finalement sous la forme

$$\overline{\alpha} = \overline{\alpha}_{\mathrm{Nu}}\, \varepsilon_{\psi} \varepsilon_{t} \varepsilon_{v}, \qquad \text{(VIII.18)}$$

où α_{Nu} est le coefficient de transmission de chaleur calculé d'après la formule de Nüsselt; ε_{ψ}, la correction qui rend compte de la présence des forces d'inertie et du transfert de chaleur par convec-

tion; ε_t, la correction qui rend compte de la dépendance des paramètres physiques par rapport à la température (tableau VIII.1); ε_v, la correction qui rend compte de la formation des ondes à la surface du film.

Tableau VIII.1

Influence des propriétés physiques variables du liquide sur la condensation

$\Delta T = (T''_{sat} - T^0_p)$, °C	ε_t			
	$p = 10$ Pa	$p = 50$ Pa	$p = 100$ Pa	$p = 1000$ Pa
10	0,975	0,990	0,990	1,01
20	0,965	0,985	0,985	1,01
50	0,900	0,935	0,960	1,02

D'après D. Labountsov

$$\varepsilon_t = \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_{sat}}\right)^{3/8}\left(\frac{\mu_{sat}}{\mu_p}\right)^{1/8}. \quad \text{(VIII.19)}$$

L'indice « sat » signifie que λ du condensat est prise à la température de la saturation; « p », à la température de la paroi.

La formule (VIII.19) est justifiée pour

$$0,5 < \lambda_{sat}/\lambda_p < 2 \text{ et } 0,1 < \mu_{sat}/\mu_p < 1.$$

D'après D. Labountsov

$$\varepsilon_v = \mathrm{Re}^{0,04}. \quad \text{(VIII.20)}$$

Souvent pour la condensation en film, on introduit dans les formules de calcul d'échange de chaleur comme critère déterminant le nombre de Reynolds. L'égalité (VIII.4) entraîne

$$\overline{w}\delta = \alpha\Delta\, tx/(r\rho_l).$$

En portant $\overline{w}\delta$ dans l'expression du nombre Re, on a

$$\mathrm{Re} = \frac{\overline{w}\delta}{\nu_l} = \frac{\overline{\alpha}\,\Delta tx}{r\rho_l\nu_l}. \quad \text{(VIII.21)}$$

Substituons à $\overline{\alpha}$ l'expression (VIII.16)

$$\mathrm{Re} = 0,943\left(\frac{g^{1/3}h\lambda_l\,\Delta t}{\nu_l^{5/3}r\rho_l}\right)^{3/4}. \quad \text{(VIII.22)}$$

Sous cette forme le nombre de Reynolds sera non seulement hydrodynamique, mais aussi déterminant l'intensité d'échange de chaler.

Le plus souvent, pour le cas de l'écoulement laminaire, le nombre de Reynolds s'écrit

$$\mathrm{Re} = 0{,}943\ Z^{0{,}75}, \tag{VIII.23}$$

où

$$Z = \mathrm{Ga}^{1/3} \frac{\lambda_l\, \Delta t}{r \nu_l \rho_l}\ ; \quad \mathrm{Ga} = \frac{g h^3}{\nu^2}\ ;$$

les paramètres physiques retenus appartiennent au condensat et sont déterminés d'après la température de saturation.

En ramenant (VIII.18) à la forme sans dimensions, on obtient

$$\mathrm{Re} = 0{,}95\ Z_{sat}^{0{,}78} \varepsilon_t\ ; \tag{VIII.24}$$

qui plus est $\varepsilon_\psi = 1$; $\varepsilon_t^{1{,}04} \approx \varepsilon_t$; $\varepsilon_v = \mathrm{Re}^{0{,}04}$.

Les résultats fournis par cette formule s'accordent assez bien avec ceux obtenus par d'autres auteurs pour le mouvement ondulatoire d'un film laminaire.

La figure VIII.7 compare les calculs effectués d'après la formule (VIII.24) avec les données expérimentales.

3. Ecoulement turbulent du film de condensat

On admet que cet écoulement survient avec $\mathrm{Re} > 400$, alors que jusque-là il est laminaire, ou laminaire avec présence des ondes à la surface du film. En réalité, les lois de l'échange thermique s'écartent des relations de l'écoulement laminaire d'un film dès les $\mathrm{Re} \approx 100$.

Pour le domaine de l'écoulement turbulent du film, en vertu de l'équation (VI.206), on peut écrire

$$q = (\lambda + \rho c_p \varepsilon_q)\, dt/dy\ ; \tag{VIII.25}$$

$$\tau = (\mu + \rho \varepsilon_\tau)\, dw/dy, \tag{VIII.26}$$

où ε_q et ε_τ sont les conductivité thermique et viscosité turbulentes.

Ainsi, les équations (VIII.25), (VIII.26) rendent compte du transfert de chaleur et de la quantité de mouvement non seulement par la voie moléculaire, mais aussi sous l'effet des pulsations turbulentes. En adoptant que le nombre turbulent de Prandtl ($\mathrm{Pr_t} = \varepsilon_\tau c_p/\varepsilon_q$) vaut l'unité, ce qui correspond à la restriction de l'analogie totale des processus de transfert turbulent de la chaleur et de la quantité de mouvement, on obtient

$$q = \lambda\, (1 + \mathrm{Pr_t} \varepsilon_\tau/\nu)\, dt/dy\ ; \tag{VIII.27}$$

$$\tau = \mu (1 + \varepsilon_\tau/\nu)\, dw/dy. \tag{VIII.28}$$

En intégrant l'équation (VIII.27) sous la restriction que $dq/dy = 0$ et $q = \text{const}$, on a

$$\int_0^\delta dt = t_{\text{sat}} - t_p = q \int_0^\delta \frac{dy}{\lambda_l (1 + \Pr \varepsilon/\nu)} .$$

Donc,

$$\alpha_x = \frac{1}{\int_0^\delta \frac{dy}{\lambda_l (1 + \Pr \varepsilon_\tau/\nu)}} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha_x \delta}{\lambda} = \left(\int_0^1 \frac{dy}{(1 + \Pr \varepsilon/\nu)} \right)^{-1} . \qquad \text{(VIII.29)}$$

Ainsi, pour obtenir la formule de calcul il faut adopter une rela-

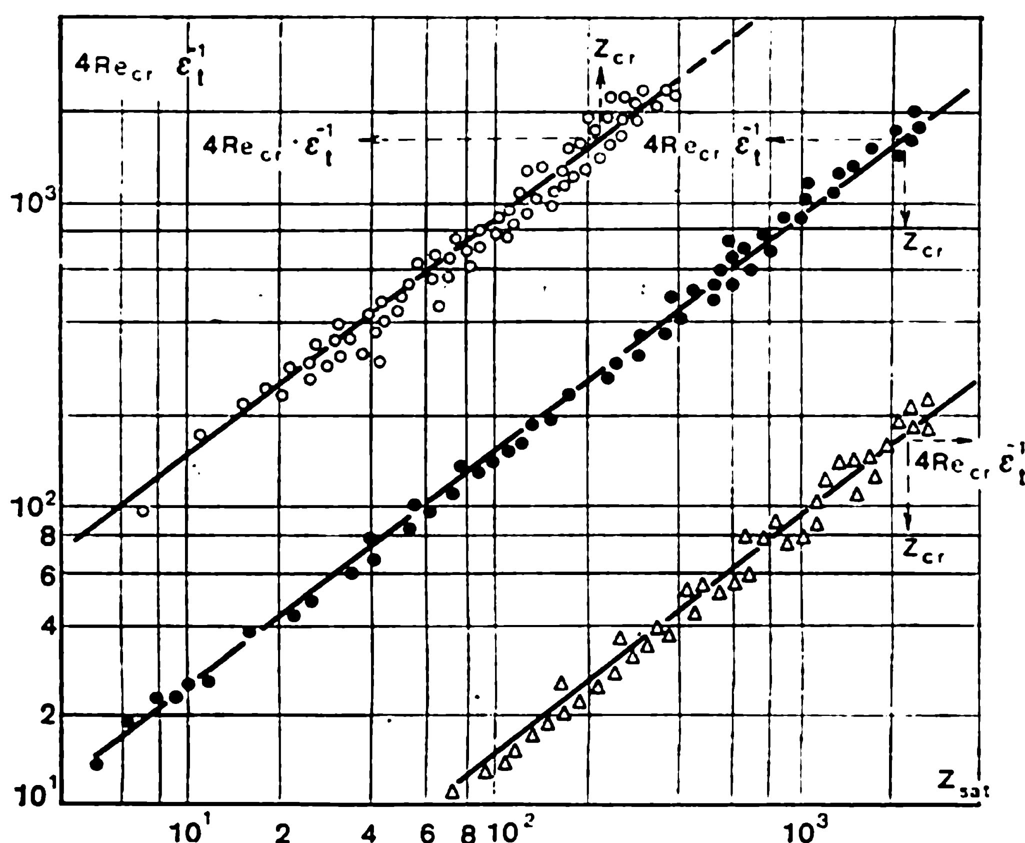


Fig. VIII.7. Comparaison de la formule (VIII.24) avec les données expérimentales

tion définie de la viscosité turbulente ε et calculer l'épaisseur du film.

L'équation (VIII.6) entraîne que

$$\tau = g (\delta - y) \rho. \qquad \text{(VIII.30)}$$

Ainsi,

$$v_p^* = \sqrt{\tau_p/\rho} = \sqrt{g\delta},$$

d'où

$$\delta = \left[\frac{\nu^2}{g}\right]^{1/3} \eta_\delta^{2/3}, \qquad \text{(VIII.31)}$$

où $\eta_\delta = v_p^*\delta/\nu$ est l'épaisseur sans dimensions du film.

Compte tenu de (VIII.29) et (VIII.31), on obtient

$$\frac{\alpha_x}{\lambda}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3} = \eta_\delta^{1/3}\left(\int_0^{\eta_\delta} \frac{d\eta}{1+\Pr\varepsilon_{0\nu}}\right)^{-1}. \qquad \text{(VIII.32)}$$

Les calculs de D. Labountsov qui a utilisé l'équation proposée par Line et Schlinger pour le coefficient d'échange turbulent ε_τ et la valeur constante des paramètres physiques du condensat, ont abouti au résultat suivant:

$$\mathrm{Nu} = 0{,}0325\ \mathrm{Ga}^{1/3}\,\mathrm{Re}^{0,25}\,\mathrm{Pr}^{0,5}; \qquad \text{(VIII.33)}$$

pour $1 \leqslant \Pr \leqslant 25$; $1{,}5\cdot 10^3 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 6{,}9\cdot 10^4$.

En calculant la valeur des nombres, on obtient

$$\alpha = \lambda g^{0,333}\nu^{-0,417}a^{-0,5}w^{-0,25}h^{0,25}. \qquad \text{(VIII.34)}$$

Les formules (VIII.32), (VIII.34) donnent les valeurs locales des coefficients de transmission de chaleur en écoulement turbulent du film. Or, puisque l'allure de l'écoulement du film dans la partie amont de la surface de condensation est laminaire, pour calculer la moyenne des coefficients de transmission de chaleur dans le cas turbulent général il faut introduire dans les formules de calcul une correction. Son importance est essentielle lorsque la surface de l'écoulement laminaire du film est commensurable avec celle de l'écoulement turbulent. Dans le cas général, la moyenne du coefficient de transmission de chaleur est fournie par la formule

$$\bar\alpha = \bar\alpha_{lam}x_{cr}/L + \bar\alpha_t\,(1 - x_{cr}/L), \qquad \text{(VIII.35)}$$

où x_{cr} est la coordonnée de la frontière conventionnelle de la transformation du courant laminaire en courant turbulent; α_{lam}, la moyenne du coefficient de transmission de chaleur dans la région laminaire de l'écoulement; $\bar\alpha_t$, la moyenne du coefficient de transmission de chaleur dans la région turbulente de l'écoulement.

Pour la zone laminaire, $\mathrm{Re} = 0{,}95\ Z^{0,78}$.

La définition de Re (VIII.22) conduit à

$$\frac{d\,\mathrm{Re}}{dZ} = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\nu^2}{g}\right)^{1/3}, \qquad \text{(VIII.36)}$$

donc

$$d\,\mathrm{Re}/dZ = 0{,}0325\ \mathrm{Re}^{0,25}\ \mathrm{Pr}^{0,5}. \qquad \text{(VIII.37)}$$

En intégrant de Z_{cr} à Z et de Re_{cr} à Re on obtient

$$\frac{4}{3}(\mathrm{Re}^{3/4} - \mathrm{Re}_{cr}^{3/4}) = 0{,}0325\ \mathrm{Pr}^{0,5}\,(Z - Z_{cr}). \qquad \text{(VIII.38)}$$

Adoptons $\mathrm{Re}_{cr} = 400$ et $Z_{cr} = 2300$ pour obtenir la formule de Labountsov

$$\mathrm{Re} = [89 + 0{,}024\ \mathrm{Pr}^{0,5}\,(Z - 2300)]^{4/3}, \qquad \text{(VIII.39)}$$

vraie pour les paramètres physiques constants ($\varepsilon_t = 1$) et qui décrit la moyenne du transfert de chaleur suivant toute la surface.

Pour tenir compte de la relation entre les paramètres physiques et la température, on introduit dans les formules de calcul (VIII.33) et (VIII.39) la correction $(\mathrm{Pr}_{sat}/\mathrm{Pr}_p)^{0,25}$, où les indices « sat » et « p » signifient que le nombre de Prandtl Pr_{sat} est pris à la température de saturation, et Pr_p, à la température de la paroi. Compte tenu de la correction introduite, la formule (VIII.39) devient

$$\mathrm{Re} = \left[89 + 0{,}024\left(\frac{\mathrm{Pr}_{sat}}{\mathrm{Pr}_p}\right)^{0,25} \mathrm{Pr}_{sat}^{0,5}\,(Z - 2300)\right]^{4/3}. \qquad \text{(VIII.40)}$$

L'indice « sat » signifie que tous les paramètres du condensat correspondent à la température de saturation.

Si la pression de la vapeur est grande et sa densité est commensurable avec celle du condensat, il faut remplacer dans la formule ρ_l (densité du condensat) par la différence $(\rho_l - \rho_v)$. Dans ce cas le nombre $\mathrm{Ga} = gh^3/\nu^2$ qui figure dans le groupement Z, $Z = \mathrm{Ga}^{1/3}\lambda_l\Delta t\ (r\nu_l\rho_l)$, est remplacé par le nombre d'Archimède d'après la relation

$$\mathrm{Ar} = \frac{gh^3}{\nu_l^2}\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right).$$

Après une telle substitution dans le groupement Z, ce dernier acquiert la forme suivante

$$Z = \mathrm{Ar}^{1/3}\frac{\lambda_l\,\Delta t}{r\nu_l\rho_l} = \left[\frac{gh^3}{\nu_l^2}\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right)\right]^{1/3}\frac{\lambda_l\,\Delta t}{r\nu_l\rho_l}.$$

Les indices « l » et « v » indiquent que le paramètre donné se rapporte à la phase liquide ou à celle de vapeur respectivement.

La figure VIII.8 compare les calculs d'après la formule (VIII.40) et les données d'expérience.

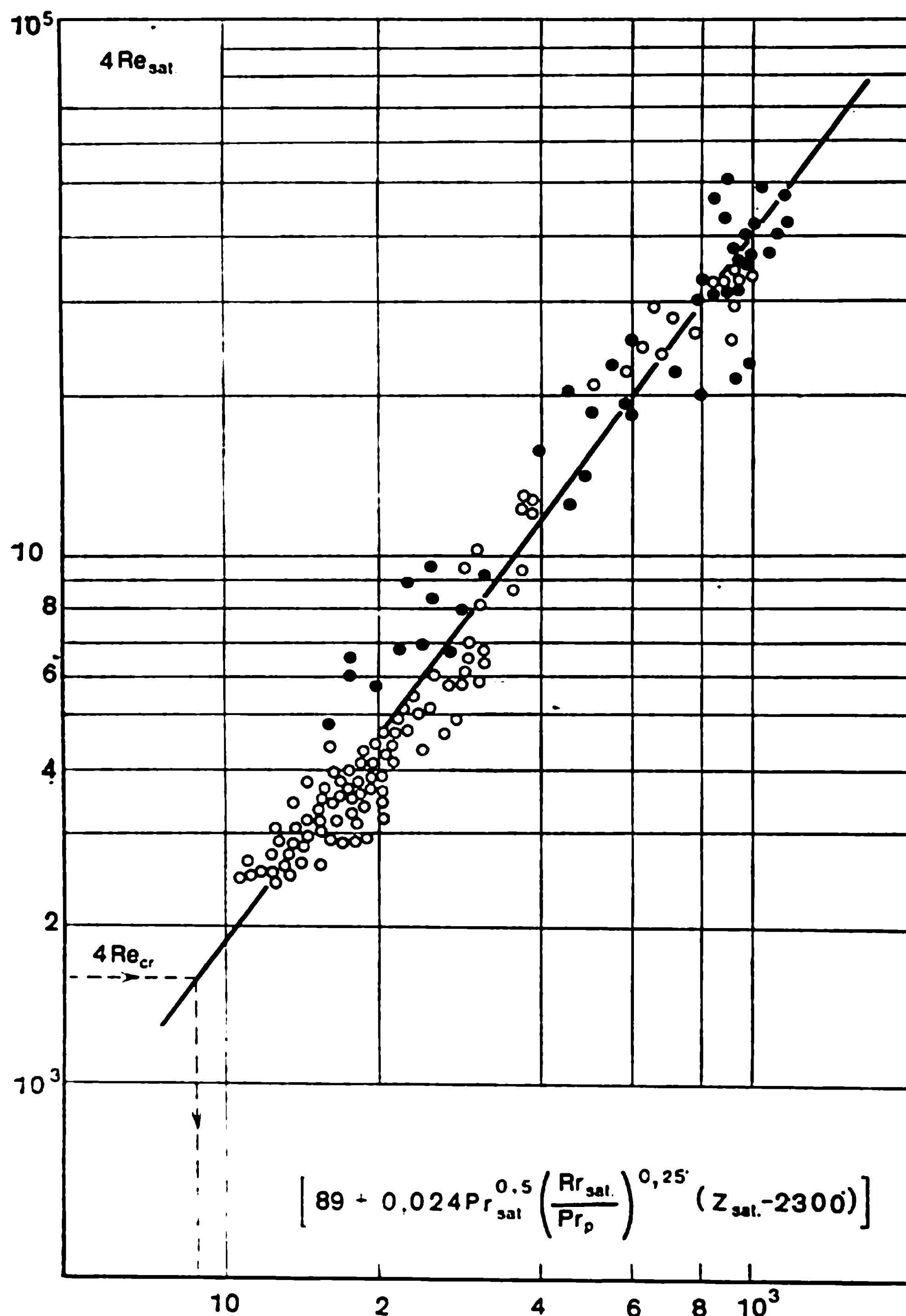


Fig. VIII.8. Transfert de chaleur dans la condensation en film d'une vapeur fixe sur une surface verticale lors d'un écoulement mixte (laminaire et turbulent) du film d'un condensat

○ — eau; ● — diphényle

4. Echange de chaleur dans la condensation en film sur un tube horizontal

Toutes les conclusions et formules précédentes sont vraies pour le cas de l'écoulement en film dirigé dans le même sens que l'accélération de la pesanteur.

Pour le cas d'une paroi inclinée à un angle fixe entre le vecteur de la pesanteur et l'axe des x (direction du déplacement du film), dans l'équation du mouvement initiale (VIII.6) il faut remplacer g par $g_x = g \cos (\widehat{g, x})$. En désignant l'angle entre g et x par φ, on a $g_x = g \cos \varphi$.

Il en résulte que pour les parois inclinées le coefficient de transmission de chaleur se calcule d'après la formule

$$\alpha_{\text{incl}} = \alpha_{\text{vert}} \sqrt[4]{\cos \varphi}. \qquad \text{(VIII.41)}$$

Pour une surface curviligne (angle φ variable) le problème se résout soit en moyennant l'angle, soit en partitionnant la surface dans le sens d'écoulement du film en zones, établissant $\bar{\alpha}$ pour chaque zone et calculant ensuite sa moyenne. Un tube ou un cylindre horizontal pouvant être considéré comme une surface à angle φ variable, dans ce cas-là aussi il faut raisonner de la même façon.

Retenons que $\delta \ll D$ et posons:

$$dx = (D/2)\, d\beta\varphi. \qquad \text{(VIII.42)}$$

Compte tenu de l'équation (VIII.11), on obtient en portant (VIII.42) dans (VIII.12)

$$\delta d\,(\delta^3 \sin \varphi) = \frac{3\mu\lambda\, \Delta t\, D}{2g^2\,(\rho - \rho'')\,\rho r}\, d\varphi. \qquad \text{(VIII.43)}$$

Introduisons la notation

$$\delta^* = 2g^2\,(\rho - \rho'')\,\rho\delta r/(3\mu\lambda\Delta t D),$$

pour obtenir l'équation

$$\frac{3}{4} \sin \varphi \frac{dz}{d\varphi} + z \cos \varphi - 1 = 0, \qquad \text{(VIII.44)}$$

dont l'intégrale est

$$\delta^* = \sin^{-4/3} \varphi \left(\frac{4}{3} \int_0^{\varphi} \sin^{1/3} \varphi\, d\varphi \right). \qquad \text{(VIII.45)}$$

En portant cette expression de l'épaisseur du film dans la formule (VIII.8), Nüsselt a obtenu pour la condensation en film sur

un tube unitaire horizontal l'expression suivante de la moyenne du coefficient de transmission de chaleur

$$\bar{\alpha} = 0{,}725 \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho^2 g r}{\mu (t_{sat} - t_p) D}} \qquad \text{(VIII.46)}$$

ou

$$\text{Nu} = 0{,}725\ (\text{Gr. Pr}_l)^{0{,}25} \vartheta^{0{,}25}, \qquad \text{(VIII.47)}$$

où ϑ est la température sans dimensions.

La formule (VIII.48) diffère de la formule (VIII.16) pour une paroi verticale par le fait que la dimension caractéristique retenue est le diamètre (et non pas la hauteur h) et le coefficient devant la racine vaut 0,725 au lieu de 0,943.

La formule (VIII.46) est déduite sous les mêmes restrictions simplificatrices que la formule (VIII.16).

Si la densité du flux thermique q est donnée et le nombre de Reynolds mis sous la forme $\text{Re} = \frac{\bar{\alpha} \Delta t d}{r \nu \rho} = \frac{\bar{q} d}{r \nu \rho}$, alors, (VIII.46) entraîne

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda} \left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{1/3} = 0{,}95\ \text{Re}^{-1/3}. \qquad \text{(VIII.48)}$$

L'expression $\left(\frac{\nu^2}{g} \right)^{1/3}$ ayant la dimension de la longueur, formellement le premier membre de l'équation (VIII.48) est le nombre de Nüsselt.

Les équations déduites sont justifiées pour le mouvement continu du film de condensat (égouttement) depuis la génératrice inférieure du tube. En fait, cet égouttement (décollement) se produit à mesure que la quantité de condensat augmente et lorsque la masse devient supérieure à la tension superficielle définie par la courbure de la surface. Cette allure de l'évacuation du condensat à partir de la surface n'influe pas sensiblement sur la moyenne suivant le tube du coefficient de transmission de chaleur. S'il est nécessaire de tenir compte de la relation entre les paramètres physiques et la température, ceci peut se faire en introduisant le facteur ε_t. Dans les formules (VIII.46), (VIII.47) et (VIII.48) les valeurs des constantes physiques doivent alors correspondre à la température de la vapeur saturée. La correction ε_ψ qui rend compte de l'influence du transfert de chaleur par convection et des forces d'inertie dans le domaine $K > 5$ et $\text{Pr} > 1$ peut être omise. On peut également négliger la correction sur l'allure ondulatoire de l'écoulement du film, du fait du petit parcours suivant la génératrice du tube (le diamètre du tube étant petit). Il convient de l'introduire lorsque

$$\alpha > 20 \left(\frac{\sigma}{\rho_l g} \right)^{0{,}5}.$$

Dans le calcul des faisceaux de tubes il faut tenir compte de l'influence du condensat s'écoulant des tubes supérieurs. En première approximation cette influence peut être prise en considération d'après les recommandations de S. Koutatéladzé et F. Mintchenko

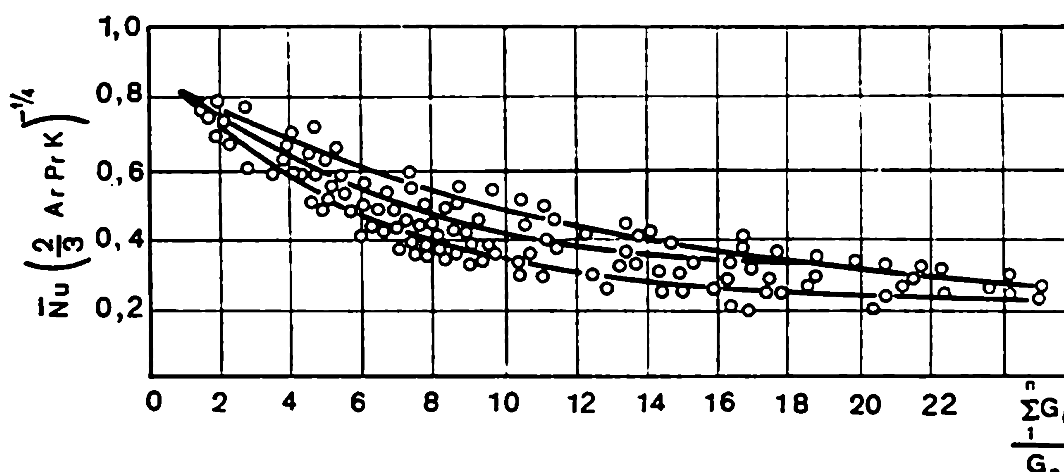


Fig. VIII.9. Valeur du groupement Nu $(2/3\ \mathrm{Ar}\cdot\mathrm{Pr}\cdot K)^{-1/4}$, d'après les expériences avec la condensation de la vapeur, la rangée de tubes placés librement l'un sur l'autre

à l'aide des courbes de la figure VIII.9. En abscisse on porte le paramètre $\sum_{1}^{n} G_i/G_n$, où G_i est la quantité du condensat formé par unité de temps sur le tube de i-ième rangée du faisceau de tubes en interaction hydrodynamique; G_n, la quantité du condensat formé sur le tube donné.

Lorsque la vapeur se condense à la surface inférieure d'une plaque horizontale, l'évacuation du condensat de la surface se produit par détachement des gouttes isolées. L'épaisseur du film et les dimensions des gouttes isolées sont déterminées par les relations entre la tension superficielle et la pesanteur.

Pour ces conditions, V. Popov a proposé l'équation suivante de similitude de l'échange thermique

$$\frac{\bar{\alpha}}{\lambda}\left[\frac{\sigma}{g(\rho-\rho'')}\right]^{1/2}=0{,}15\sqrt[4]{\frac{V}{a}\frac{g}{\nu^2}\left[\frac{\sigma}{g(\rho-\rho'')}\right]^{3/2}(1-\tilde{\rho}'')\frac{r}{c\,\Delta t}}. \tag{VIII.49}$$

5. Echange de chaleur dans la condensation en film d'une vapeur en mouvement

Dans ces conditions, le processus d'échange thermique est plus compliqué par rapport à la condensation d'une vapeur fixe.

Sous l'effet de la différence des vitesses du mouvement des

phases du condensat liquide et de la vapeur condensée on observe l'apparition d'une force de frottement. Ce frottement peut soit contribuer au mouvement du film, soit présenter pour lui un obstacle. Lorsque la vapeur se déplace dans la même direction que le film du condensat, le frottement crée une force supplémentaire et le film s'écoule plus vite; lorsque les directions du mouvement du film et de la vapeur ne coïncident pas, le frottement crée une force qui contrarie l'écoulement.

L'augmentation de la vitesse du film diminue l'épaisseur de ce dernier et augmente le coefficient de transmission de chaleur.

Dans le cas du freinage du flux de condensat, l'épaisseur du film croît et le coefficient de transmission de chaleur diminue. Dans le cas limite du freinage, la vitesse du film est nulle. Dès que la force de frottement dépasse celle de la pesanteur, le film commence à se déplacer en haut. Le coefficient de transmission de chaleur, en passant par le minimum (à la vitesse nulle du film), recommence à croître.

L'action dynamique de la vapeur sur le film modifie les conditions aux limites par rapport à la condensation d'une vapeur fixe.

Au système d'équations principal, qui décrit l'échange de chaleur dans la condensation en film d'une vapeur fixe, il convient d'ajouter l'équation qui détermine les contraintes tangentielles à la surface du condensat, dues à l'interaction avec le courant de vapeur

$$\mu\,(\partial w/\partial y)_{fr} = \pm C_f w_{rel}^{''2} \rho''/2, \qquad \text{(VIII.50)}$$

où w''_{rel} est la vitesse relative de la vapeur; pratiquement on la prend égale à la vitesse moyenne de la vapeur w''; C_f, le coefficient de frottement de la vapeur contre le film.

Alors, pour un écoulement laminaire du film, le gradient de la vitesse

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{g}{\mu}\,y + C_1,$$

ou, après y avoir porté les conditions aux limites pour $y = \delta$, on a

$$C_f\,\frac{w''^2\rho''}{2\mu} = \frac{\rho g}{\mu}\,\delta + C_1.$$

D'où

$$C_1 = \frac{C_f w''^2 \rho}{2\mu} + \frac{\rho g}{\mu}\,\delta.$$

Puisqu'avec $y = 0$ $w = 0$, C_2, calculé par une deuxième intégration, est également nulle, et le profil de la vitesse d'écoulement du condensat est donné par l'équation

$$w = \left(\frac{C_f w''^2 \rho''}{|2\mu} + \frac{g\rho\delta}{\mu}\right) y - \frac{g\rho}{|2\mu}\,y^2. \qquad \text{(VIII.51)}$$

Dans la section x la moyenne de la vitesse d'écoulement

$$\bar{w}=\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} w_x\,dy=\frac{C_f w''^2\rho''\delta}{4\mu}+\frac{\rho g\delta^2}{3\mu}. \qquad \text{(VIII.52)}$$

En portant cette vitesse moyenne dans (VIII.12) on obtient

$$\frac{\lambda\,\Delta t}{\rho r}\,dx=\left(\frac{C_f w''^2\rho''\delta^2}{2\mu}+\frac{\rho g\delta^3}{\mu}\right)d\delta. \qquad \text{(VIII.53)}$$

Si la contrainte de frottement dépasse sensiblement la pesanteur, c'est-à-dire si $\frac{C_f w''^2\rho''}{2g\delta\rho_1}\gg 1$ (vapeur animée d'une grande vitesse), et $\Delta t=\text{const}$, on a en négligeant le deuxième terme du deuxième membre de (VIII.53)

$$\delta=\sqrt[3]{\frac{6\lambda\,\Delta t\,\mu_1 x}{C_f w''^2\rho''\rho_1 r}}. \qquad \text{(VIII.54)}$$

En portant la valeur de δ dans l'expression $\alpha=\lambda/\delta$, on obtient l'expression du coefficient de transmission de chaleur local

$$\alpha_x=\sqrt[3]{\frac{\lambda^2 C_f w''^2\rho''\rho_1 r}{6\mu_1\,\Delta t\,x}}; \qquad \text{(VIII.55)}$$

en le moyennant suivant la surface h, on a

$$\bar{\alpha}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\lambda^2 C_f w''^2\rho''\rho_1 r}{6\mu\,\Delta t\,h}}. \qquad \text{(VIII.56)}$$

Donc,

$$\bar{\alpha}=(3/2)\,\alpha_{x=h}. \qquad \text{(VIII.57)}$$

Considérons le problème d'échange de chaleur dans la condensation de la vapeur en mouvement rapide lorsque $q=\text{const}$ pour obtenir

$$\alpha_x=\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{C_f w''^2\rho''\rho_1 r}{\mu_1 q x}}, \qquad \text{(VIII.58)}$$

$$\bar{\alpha}=2\alpha_{x=h}. \qquad \text{(VIII.59)}$$

En comparant les coefficients de transmission de chaleur α d'un écoulement laminaire du condensat pour la vapeur en mouvement et fixe, Koutateladzé a obtenu les relations suivantes:

pour $\Delta t=\text{const}$

$$\frac{\alpha}{\alpha_0}=1{,}08\left(\frac{v^{*\prime\prime}}{[g\nu(1-\tilde{\rho}'')]^{1/3}}\,\text{Re}^{-1/6}\right)^{2/3}, \qquad \text{(VIII.60)}$$

pour q = const

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 0{,}96 \frac{v^{*''}}{[g\nu(1-\tilde{\rho}'')]^{1/3}} \mathrm{Re}^{-1/6}, \qquad \text{(VIII.61)}$$

où $\tilde{\rho}'' = \frac{\rho''}{\rho_1}$ est la densité relative; α_0, la valeur du coefficient de transmission de chaleur pour $w'' = 0$; $v^{*''} = w'' \sqrt{\tilde{\rho}'' C_f/2}$, la vitesse de la contrainte tangentielle dans le film à la frontière de la vapeur; $\mathrm{Re} = qh/(r\mu)$, le nombre de Reynolds du film au bout de la surface de refroidissement.

Les solutions de l'équation (VIII.53) pour les vitesses constantes d'écoulement de la vapeur obtenues par Nüsselt sont réunies dans le tableau VIII.2, où α_0 est la moyenne du coefficient de transmission de chaleur à w'' = const.

Tableau VIII.2

Valeurs de $\bar{\alpha}/\bar{\alpha}_0$ pour l'écoulement laminaire du film

Mouvement de la vapeur de haut en bas		Mouvement de la vapeur de bas en haut		Mouvement de la vapeur de haut en bas		Mouvement de la vapeur de bas en haut	
$\frac{C_f'' w''^2 \rho'' \bar{\alpha}_0}{2g\rho\lambda}$	$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}_0}$	$\frac{C_f'' w''^2 \rho'' \bar{\alpha}_0}{2g\rho\lambda}$	$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}_0}$	$\frac{C_f'' w''^2 \rho'' \bar{\alpha}_0}{2g\rho\lambda}$	$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}_0}$	$\frac{C_f'' w''^2 \rho'' \bar{\alpha}_0}{2g\rho\lambda}$	$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\alpha}_0}$
0	1	0	1	—	—	1,753	1,144
0,144	1,06	0,0147	0,995	—	—	2,30	1,35
0,577	1,19	0,0590	0,982	3,61	1,78	3,61	1,65
1,290	1,38	0,1327	0,950	8,11	2,30	8,11	2,24
2,308	1,59	0,2353	0,914	14,43	2,75	14,43	2,70
—	—	0,3690	0,875	22,50	3,19	22,50	3,18
—	—	0,830	0,731	32,47	3,59	32,47	3,59
—	—	1,475	0,910				

De la sorte, pour calculer le coefficient de transmission de chaleur compte tenu de l'influence des forces de frottement entre la vapeur et le film, il faut connaître la valeur des coefficients de frottement C_f. D'après la solution automodèle des équations de la couche limite laminaire, on a sur une plaque perméable à aspiration uniforme du gaz

$$C_f''/2 = j_p/\rho'' w''. \qquad \text{(VIII.62)}$$

I. Chekriladzé a proposé d'utiliser cette formule pour le cas de la condensation de la vapeur à la surface du film.

L'absorption régulière du gaz sur la longueur de la plaque correspond au cas de q_p = const.

Il vient

$$j_p = q_p/r;\ C_f''/2 = q_p/(r\rho''w'');\ v_*'' = w''\sqrt{q_p/(r\rho w_0)}.$$

Donc,

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 0{,}96\,\frac{w_0''\sqrt{q/(r\rho w'')}}{[g\nu(1-\tilde{\rho}'')]^{1/3}}\,\mathrm{Re}^{-1/6} \qquad \text{(VIII.63)}$$

ou

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 0{,}96\,\frac{w''}{[g\nu(1-\tilde{\rho}'')]^{1/3}}\sqrt{\frac{\nu}{\nu''\,\mathrm{Re}''}}\,\mathrm{Re}^{1/3}, \qquad \text{(VIII.64)}$$

où $\mathrm{Re}'' = \rho''w''h/\mu''$.

Les autres conditions étant les mêmes, la formule (VIII.64) entraîne que le coefficient de transmission de chaleur par le film

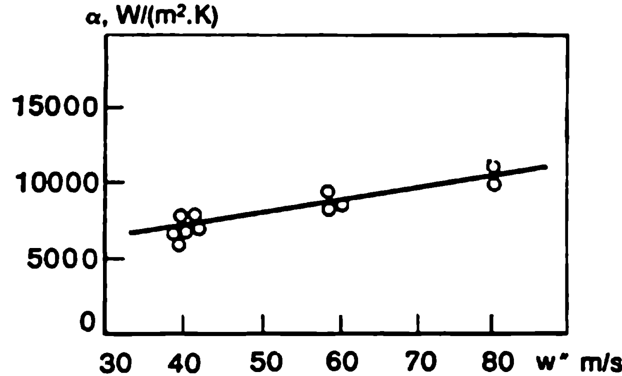


Fig. VIII.10. Comparaison de la formule (VIII.65) avec les données expérimentales

contourné par un courant de vapeur dans le sens d'écoulement du film, est proportionnel à $(w'')^{1/2}$.

En portant dans l'équation (VIII.64) l'expression de $\bar{\alpha}_0$ tirée de la formule (VIII.16), on obtient

$$\mathrm{Nu} = 0{,}91\sqrt{\nu''/\nu}\sqrt{\mathrm{Re}}, \qquad \text{(VIII.65)}$$

où $\mathrm{Nu} = \bar{\alpha}h/\lambda$.

Il est intéressant de noter que le coefficient de transmission de chaleur du film à la surface ne dépend pas (sous une forme explicite) de la charge thermique. La figure VIII.10 compare les données d'expérience avec la formule (VIII.65). Il convient de rappeler que dans la couche limite la solution asymptotique de l'absorption ($C_f/2 = j_p/(\rho''w'')$) est justifiée aussi bien pour l'écoulement laminaire que turbulent de la vapeur.

Pour l'écoulement turbulent du film, lorsque le liquide et la vapeur se déplacent dans la même direction (de haut en bas), la contrainte tangentielle se calcule d'après la formule

$$\tau = \rho g (\delta - y) + C_f'' \rho'' w_p''^2 / 2. \qquad \text{(VIII.66)}$$

Pour le cas de grandes vitesses d'écoulement de la vapeur on peut adopter

$$\tau = C_f / 2\rho'' w''^2 = \tau_p = \text{const},$$

alors que la viscosité turbulente $\mu_l = 0{,}4\ \mu\eta$, où μ est la viscosité dynamique; $\eta = wy/\nu$, la distance adimensionnelle jusqu'à la paroi.

Pour $\eta_\delta \gg 11{,}6$ et $C_f \rho'' w''^2 \gg g\delta\rho$, on a

$$\frac{\alpha_x}{c\rho v^*} = \left(2{,}5 \ln \frac{\eta_\infty}{11{,}6} + 11{,}6 \text{ Pr}\right)^{-1}, \qquad \text{(VIII.67)}$$

où $v^* = w'' \sqrt{\rho'' C_f'' (2\rho_l)}$.

6. Transfert de chaleur dans la condensation de la vapeur à l'intérieur d'un tube

Lors de la condensation de la vapeur dans des tubes, le volume de la vapeur en mouvement est délimité par les parois. La vapeur amenée dans le tube se déplace suivant sa longueur et se condense. A mesure que la vapeur se condense, une partie de la section droite du tube se remplit de liquide. Les vitesses du liquide et de la vapeur sont différentes, tout comme la vitesse de la vapeur qui varie de l'amont à l'aval. Ainsi, à la vitesse de la vapeur d'eau de 5 à 10 m/s peut survenir dans le cas du contre-courant l'inondation qui s'accompagne d'une forte augmentation de la résistance hydraulique dans les tubes.

P. Kapitsa a donné la formule pour le calcul de la vitesse qui déclenche l'inondation

$$w_{cr} = 3{,}5 \left(\frac{\mu_l g^{1/2}}{\rho_l \Gamma^2}\right)^{1/3} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g} + c}, \qquad \text{(VIII.68)}$$

où Γ est la densité linéaire de l'arrosage égale à $G/(\pi d_{in})$; σ, la tension superficielle; c, la vitesse de phase.

Si la vitesse atteint 15 à 40 m/s, le liquide se détache de la surface pour être emporté sous la forme de gouttelettes. Un courant descendant stable se déplaçant sous forme de sillage peut exister si la vitesse du gaz (de la vapeur) ne dépasse pas 15 à 30 m/s, des vitesses plus grandes entraînant l'évacuation par gouttelettes.

La condensation complète de la vapeur annule la vitesse de cette dernière à la sortie du tube.

Lorsque dans un tube long la condensation est assez intense, la partie terminale du tube dans le sens du déplacement du condensat peut se remplir complètement de liquide. L'écoulement du

condensat suivant les parois du tube peut être aussi bien laminaire que turbulent. Le régime dépend de nombreux facteurs et peut changer plusieurs fois suivant la longueur du tube: en amont, par exemple, la grande vitesse de la vapeur fait que l'écoulement est turbulent. Au cours de la condensation, la vitesse de la vapeur diminue et l'écoulement devient laminaire, pour redevenir turbulent sous l'effet de la croissance de l'épaisseur du film et de sa vitesse.

Tous ces facteurs compliquent encore le problème d'échange thermique dans la condensation de la vapeur lors de son déplacement dans un tube.

Avec les restrictions adoptées dans ce qui précède, le coefficient de transmission thermique local se calcule d'après la formule

$$\frac{\alpha_x d}{\lambda} = 2\left(\int_{\sqrt{\varphi}}^{1} \frac{d\xi}{\left(1+\Pr\frac{\mu_T}{\mu}\xi\right)}\right)^{-1}. \qquad \text{(VIII.69)}$$

Ici $\xi = R/R_0$; R, le rayon courant; R_0, le rayon interne du tube; φ, la part de la section remplie de vapeur.

En adoptant $\mu_t = 0{,}4\ \rho v_p^* y$ et en divisant le courant en noyau turbulent et sous-couche laminaire, on obtient

$$\mathrm{Nu} \cong 0{,}4 \Pr \mathrm{Re}_* / \left(\ln \frac{1-\sqrt{\varphi}}{11{,}6\sqrt{\varphi}} \mathrm{Re}_* + 4{,}65 \Pr\right), \qquad \text{(VIII.70)}$$

où $\mathrm{Re}_* = v_0^* d/(\nu\rho)$.

L'hydraulique enseigne que pour les mélanges gaz-liquide où la part de masse du gaz est x

$$\mathrm{Re}_* \approx \mathrm{Re}\left[\frac{C_{f0}}{2}\left(1+\frac{1-\tilde{\rho}''}{\tilde{\rho}''}x\right)\right]^{1/2}; \quad \varphi \cong 1-\left(1+\frac{1-\tilde{\rho}''}{\tilde{\rho}''}x\right)^{-1/2}.$$

La formule (VIII.70) montre qu'en première approximation, compte tenu de la valeur de φ, la relation entre Nu et Re est la même que lors de la transmission de chaleur dans un flux homogène.

En interpolant la relation obtenue pour la ramener à la forme (VI.467), on obtient

$$\mathrm{Nu} = 0{,}023 \Pr^{0,4} \mathrm{Re}^{0,8}\sqrt{1+(\rho/\rho''-1)x}, \qquad \text{(VIII.71)}$$

où $\mathrm{Re} = 4G/\pi\mu d$; G est le débit de masse du mélange.

Si on prend la moyenne de Nu par rapport à $x_1 < x < x_2$, il vient

$$\mathrm{Nu} = 0{,}023 \Pr^{0,4} \mathrm{Re}^{0,8}. \qquad \text{(VIII.72)}$$

La formule est proposée par E. Ananiev, G. Kroujiline et L. Boïko.

7. Echange de chaleur de la condensation de la vapeur dans les conditions d'une gravitation affaiblie

L'intérêt de cet échange ou de celui observé dans les conditions d'une impondérabilité complète est devenu particulièrement grand lorsqu'on a abordé l'assimilation de l'espace cosmique. La création des vaisseaux circumterrestres ou circumlunaires a imposé la conception des échangeurs de chaleur susceptibles d'assurer le passage du caloporteur de l'état liquide à l'état de gaz et inversement; on sait que ces appareils sont les plus économiques par rapport aux échangeurs fonctionnant à partir d'un caloporteur ne changeant pas de phase.

Le domaine d'application de tels appareils est assez large; ce sont aussi bien des installations énergétiques que celles qui assurent la vie et les systèmes de régulation.

A ce jour on a accumulé une certaine expérience théorique, expérimentale et pratique dans la conception des évaporateurs et condensateurs qui fonctionnent dans les conditions de l'impondérabilité aussi bien partielle que complète.

Condensation en film à une surface verticale. Dans la formule (VIII.16) figure à titre de paramètre l'accélération de la chute libre qui, pour la condensation d'une vapeur fixe dans les conditions de l'attraction terrestre, est la force motrice principale.

En régime laminaire l'épaisseur du film en une section x quelconque est inversement proportionnelle à $g^{1/4}$. On imagine sans peine que l'affaiblissement du champ gravifique, c'est-à-dire la diminution de g, entraîne la croissance de l'épaisseur du film. Lorsque l'impondérabilité est complète, $g = 0$ (le film ne se déplace plus sous l'action de la pesanteur), la quantité δ tend vers l'infini.

L'augmentation de l'épaisseur du film fait croître sa résistance thermique et diminue le coefficient de transmission thermique.

La formule (VIII.16) est déduite pour le cas de l'épaisseur du film extrêmement petite par rapport à sa surface et la chaleur se propageant seulement suivant la normale au film. Etant donné que dans un champ de gravitation affaiblie l'épaisseur du film de condensation devient commensurable avec la surface, cette hypothèse devient inadmissible.

Régimes transitoire et turbulent de l'écoulement du film. Le passage du régime laminaire au régime turbulent dans le champ d'une gravitation affaiblie est aussi déterminé par la valeur du nombre de Reynolds du film

$$\mathrm{Re}_{x\delta} = w\delta/\nu.$$

En régime laminaire, la vitesse moyenne du film $\bar{w}$ est proportionnelle à $g^{1/2}$, et son épaisseur est inversement proportionnelle à $g^{1/4}$. Ceci fait qu'en régime laminaire le nombre de Reynolds du film est proportionnel à $g^{1/4}$; alors, des transformations permettent d'obtenir

$$\mathrm{Re}_\delta = 0{,}943\,[\lambda_l \rho_l^{2/3} (\rho_l - \rho_n)^{1/3} g^{1/3} \Delta T_x/(\mu^{5/3} r)]. \qquad \text{(VIII.73)}$$

En adoptant pour le régime transitoire $\mathrm{Re} = 350$, on peut écrire

$$(T_{\mathrm{sat}} - T_{\mathrm{p}})\, x\, (g/g_e)^{1/3} = \frac{2680 \mu_l^{5/3} r}{\lambda_l \rho_l^{2/3} g^{1/3}}. \qquad \text{(VIII.74)}$$

Pour la condensation de la vapeur d'eau à la paroi sous 0,1 MPa et à la température de 17 °C

$$x\,(g/g_e)^{1/3} = 1{,}67\ \mathrm{m},$$

où g_e est l'accélération de la chute libre au niveau de la Terre.

Par conséquent, dans les conditions de l'attraction terrestre à la distance de 1,67 m du bout amont de la surface de condensation le film de condensat est laminaire.

Si le champ gravifique est affaibli, c'est-à-dire si on prend $g = 0{,}001 g_e$, la longueur de la tranche laminaire augmente jusqu'à 16,7 m.

Dans cet exemple, les constantes physiques du condensat étaient prises à la température moyenne du film.

La comparaison des coefficients de transmission de chaleur en régimes laminaire et turbulent montre que dans le cas turbulent ce coefficient dépend bien plus de la gravitation, ce qui est certifié par la relation

$$\bar{\alpha} = 0{,}30 \cdot 10^{-2} \, [\lambda_1^3 \rho_1^2 g \, (T_{sat} - T_p) \, h/(\mu_1^3 r)]^{1/2}. \qquad \text{(VIII.75)}$$

En effet, pour un écoulement laminaire, $\bar{\alpha} \sim g^{1/4}$, et pour le cas turbulent, $\bar{\alpha} \sim g^{1/2}$.

Condensation de la vapeur sous la convection forcée. Lorsque la condensation s'accompagne du déplacement du condensat et de la vapeur seulement sous l'effet d'une gravitation affaiblie, l'échange de chaleur est limité. Pour l'intensifier, il faut forcer le déplacement aussi bien de la vapeur que du film, ou, autrement dit, créer un champ gravifique artificiel.

De tels systèmes imposent des frais d'énergie supplémentaires et, par suite, une justification rigoureuse.

Du point de vue de l'hydrodynamique, le processus de condensation est défini par de nombreux facteurs, dont les principaux sont: les conditions d'amenée de la vapeur en condensation à la surface et l'évacuation du condensat à partir de la surface, qui, dans les conditions d'impondérabilité, peuvent s'obtenir par les artifices suivants:

1. Condensation d'une vapeur fixe ou animée d'un mouvement lent à une surface de rotation. Le film de condensat se déplace alors sous l'action des forces centrifuges.
2. Film subissant simultanément l'action des forces centrifuges, le frottement de la vapeur animée d'un mouvement rapide et la variation de la pression statique de la vapeur en condensation.
3. Condensation sur un plan fixe, le film se déplaçant sous l'action du frottement contre la vapeur en mouvement et de la variation de la pression statique dans cette dernière.

Y. Joulev a trouvé la relation entre l'épaisseur du film et les paramètres déterminants pour la condensation de la vapeur sur un disque en rotation:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3q\,(1-\beta/y)}{2Rw^2\rho\,[1-2g/(wR\rho y)]}} \left(\sqrt[3]{1+\sqrt{1-\psi}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{1-\psi}}\right), \qquad \text{(VIII.76)}$$

où β est la distance entre le centre du disque (origine des coordonnées) et le point où l'épaisseur du film commence à croître

$$\psi = \left[\frac{0{,}238 q^2\,(1-\beta/y)^2}{wR^2\rho^2\nu\,\sqrt{1-2g/(wR\rho y)}}\right]^2.$$

Pour le coefficient de transmission de chaleur on a obtenu la formule

$$\alpha = \frac{\lambda}{\left(1 - \frac{A\delta^2}{3!} + \frac{3A^2\delta^4}{5!} - \frac{55A^3\delta^6}{7!}\right)\delta}. \qquad \text{(VIII.77)}$$

L'exploration expérimentale du transfert de chaleur pendant la condensation de l'eau sur un disque d'un diamètre de 210 mm animé d'une rotation

a permis d'établir la relation entre le coefficient de transmission moyen et les paramètres déterminants:

$$\bar{\alpha}=0{,}78\left(\frac{\lambda^3\rho^2 r\,(120\pi)^2}{\mu\overline{\Delta t}}\right)^{0{,}25} n^{0{,}43}. \qquad \text{(VIII.78)}$$

Cette relation est justifiée pour le cas où $n > 700$ mn^{-1} et la surface du disque est complètement mouillée.

8. Condensation de la vapeur à partir d'un mélange vapeur-gaz

D'après les expériences, lors de la condensation en film, le coefficient de transmission de chaleur est influencé surtout par l'addition dans la vapeur des gaz incondensables. D'après les données de la figure VIII.11, lorsque la concentration de l'air dans la vapeur

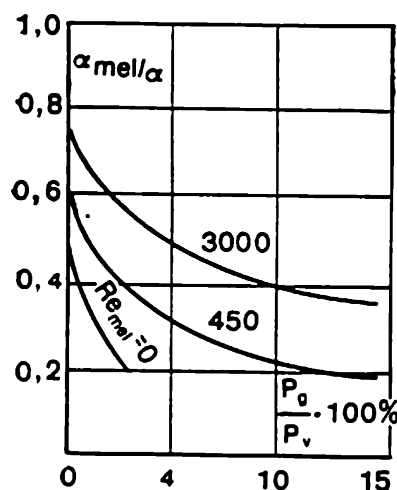


Fig. VIII.11. Transfert de chaleur dans la condensation de la vapeur à partir d'un mélange vapeur-gaz sur un tube horizontal ($p \approx 0{,}8\cdot 10^5$ Pa; $\Delta t = 10$ °C)

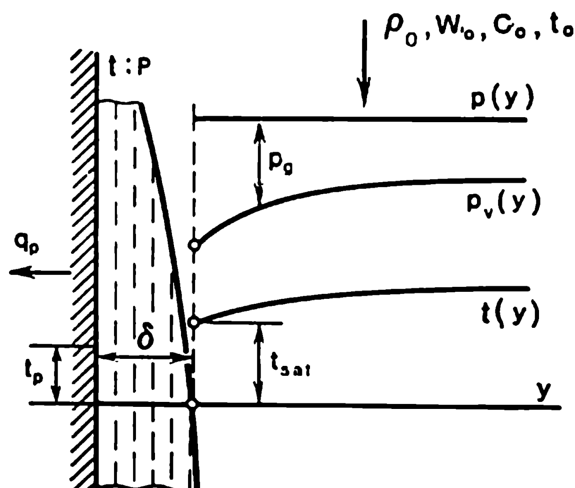


Fig. VIII.12. Distribution des pressions partielles et des températures près de la surface de condensation

n'atteint que 2 %, le coefficient de transmission de chaleur devient presque trois fois plus faible. Une diminution si brusque en présence dans la vapeur de gaz incondensable s'explique par la résistance thermique et diffusionnelle de la couche limite à la surface du film. La vapeur en condensation doit diffuser vers la surface du film à travers la couche limite comportant du gaz incondensable qui est précisément à l'origine d'une résistance thermique supplémentaire. Dans de nombreux cas pratiques, cette résistance thermique de la couche limite est l'élément essentiel qui détermine l'intensité des processus de condensation. Ces conditions se présentent lorsqu'il faut concevoir des condensateurs des turbines à vapeur, des installations frigorifiques, des dispositifs de transmission de chaleur, du *life sustaining system*, etc. Le problème de la condensation de

la vapeur à partir d'un mélange vapeur-gaz peut être résolu en recourant aux méthodes de la théorie de la couche limite.

Considérons le processus stationnaire de la condensation de la vapeur à la surface d'une plaque verticale, lors de son contournement longitudinal par un courant de mélange vapeur-gaz. Admettons que l'écoulement du film et du mélange vapeur-gaz est laminaire (fig. VIII.12). On donne T_p, ρ_0, w_0, C_0 qui sont les paramètres physiques du liquide, de la vapeur et du gaz incondensable. Il faut calculer l'intensité de la condensation j_p. Puisque $T_p < T_\delta < T_0$, la vapeur se condense à la surface du film. A cet effet il faut évacuer en permanence de la surface de la paroi une quantité de chaleur q_p.

Le bilan thermique à la surface du film peut s'écrire

$$q_l = q_{\Sigma\delta} + j_p (h_\delta - h_{l\delta}), \qquad \text{(VIII.79)}$$

où q_l est le flux thermique de la surface du film vers le liquide; $q_{\Sigma\delta}$, le flux d'énergie global du mélange vapeur-gaz vers la surface du film liquide; h_δ, l'enthalpie du mélange vapeur-gaz à la surface du film; $h_{l\delta}$, l'enthalpie du liquide.

Dans le cas général,

$$q_{\Sigma\delta} = [-\lambda dT/dy - \rho D_{12} \Sigma h_i \partial C_i/dy]_\delta, \qquad \text{(VIII.80)}$$

pour $\rho D c_p/\lambda = 1$ on a $q_{\Sigma\delta} = -\frac{\lambda}{\bar{c}_{p\delta}} \left(\frac{dh}{dy}\right)_\delta$.

En introduisant le nombre global de Stanton

$$\mathrm{St}_{T\Sigma} = -\frac{\lambda}{\bar{c}_{p\delta}} \left(\frac{dh}{dy}\right)_\delta \Big/ [\rho_0 w_0 (h_0 - h_\delta)], \qquad \text{(VIII.81)}$$

on obtient

$$q_l = \rho_0 w_0 \mathrm{St}_{T\Sigma} [h_0 - h_\delta + b_{T1} (h_\delta - h_{l\delta})], \qquad \text{(VIII.82)}$$

où $b_{T1} = \frac{j_p}{\rho_0 w_0} \frac{1}{\mathrm{St}_{T\Sigma}}$.

Le bilan de la masse du courant de la vapeur vers la surface du film donne

$$j_p = | j_p C_\delta - \rho_\delta D \left(\frac{dC}{dy}\right)_\delta, \qquad \text{(VIII.83)}$$

où C_δ est la concentration massique de la vapeur dans le mélange vapeur-gaz à la surface du film

On en tire

$$j_p = \frac{-\rho_\delta D (dC/dy)_\delta}{1 - C_\delta}. \qquad \text{(VIII.84)}$$

En introduisant le nombre de diffusion de Stanton

$$\mathrm{St}_{D\Sigma 1} = \frac{-\rho_\delta D (dC/dy)_\delta}{(C_0 - C_\delta) \rho_0 w_0}, \qquad \text{(VIII.85)}$$

on obtient

$$b_{D1} = (C_0 - C_\delta/(1 - C_\delta)). \qquad \text{(VIII.86)}$$

Transformons l'expression entre crochets du deuxième membre de l'expression (VIII.82), en admettant que le mélange vapeur-gaz est un gaz parfait

$$h_0 - h_\delta + b_{T1}(h_\delta - h_{1\delta}) = h_0 - [(1 - b_{T1})\bar{c}_{p\delta} + b_{T1}\, c_{pv}]\, T_\delta + b_{T1}\, r,$$

où $r = h_{v\delta} - h_{1\delta}$ est la chaleur spécifique de vaporisation; $c_{p\delta}$, la chaleur spécifique du mélange à la surface du film.

Compte tenu de l'équation (VIII.86), on a

$$(1 - b_1)\,\bar{c}_{p\delta} + b_1 c_{pv} = \frac{(1 - C_0)\,\bar{c}_{p\delta} + (C_0 - C_\tau)\, c_{pv}}{1 - C_\delta}.$$

En retenant que $\bar{c}_{p\delta} = C_\delta c_{pv} + (1 - C_\delta)\, c_{pb}$, on obtient

$$\frac{(1 - C_0)\, C_\delta c_{pv} + (1 - C_0)\,(1 - C_\delta)\, c_{pb} + (C_0 - C_\delta)\, c_{pv}}{1 - C_\delta} =$$

$$= C_0 c_{pv} + (1 - C_0) c_{pb} = \bar{c}_{p0}.$$

Par conséquent,

$$h_0 - h_\delta + b_{T1}\,(h_\delta - h_{1\delta}) = \bar{c}_{p0}\,(T_0 - T_\delta) + b_{T1} r, \qquad \text{(VIII.87)}$$

et en portant dans cette expression (VIII.79), il vient

$$q_1 = \rho_0 w_0 \mathrm{St}_{T\Sigma}\, [c_{p0}\,(T_0 - T_\delta) + b_{T1} r]. \qquad \text{(VIII.88)}$$

D'où

$$b_{T1} = \left[\frac{q_1}{\rho_0 w_0\, \mathrm{St}_{T\Sigma}} - c_{p0}\,(T_0 - T_\delta) \right] / r. \qquad \text{(VIII.89)}$$

L équation (VIII.89) peut s'obtenir également d'une autre façon. Le flux thermique à la surface du film, dû à la conductivité thermique $q_\delta = -\lambda \left(\frac{dT}{dy}\right)_\delta$ et le nombre de Stanton

$$\mathrm{St}_T = \frac{-\lambda\,(dT/dy)_\delta}{\rho_0 w_0 \bar{c}_{p0}\,(T_0 - T_\delta)}. \qquad \text{(VIII.90)}$$

Le flux thermique transmis par la surface du film liquide et la paroi refroidie

$$q_1 = q_\delta + j_p r.$$

Compte tenu de l'équation (VIII.90), on a

$$q_1 = \rho_0 w_0 \mathrm{St}_T\, [\bar{c}_{p0}\,(T_0 - T_\delta) + b_{T1} r]. \qquad \text{(VIII.91)}$$

Au chapitre VI nous avons montré que $\mathrm{St}_t = \mathrm{St}_{t\Sigma}$ et $b_{T1} = b_{T\Sigma 1}$.

Avec une approximation suffisante on peut adopter

$$b_{D1} = b_{T1}\,\mathrm{Le}^{2/3},$$

où $\mathrm{Le} = \rho D c_p/\lambda$ est le nombre de Lewis-Sémionov.

Alors, compte tenu de l'équation (VIII.86), on a

$$b_{T1} = \mathrm{Le}^{-2/3}\,(C_0 - C_\delta)/(1 - C_\delta). \qquad \text{(VIII.92)}$$

En égalant les deuxièmes membres des équations (VIII.89) et (VIII.92), on obtient

$$\mathrm{Le}^{2/3} = \frac{\bar{c}_{p0}\,(T_0 - T_\delta) - q_1/(\rho_0 w_0\,\mathrm{St}_\Sigma)}{r} = \frac{C_0 - C_\delta}{C_\delta - 1}.$$

La concentration de la vapeur à la surface du film est liée à la pression partielle de la vapeur à la surface par la relation

$$C_\delta = \frac{\rho_{v\delta}}{\rho_\delta} = \frac{R_\delta}{R_v}\,\frac{p_{v\delta}}{p}. \qquad \text{(VIII.93)}$$

En tenant compte que $R_\delta = R_v C_\delta - (1 - C_\delta)\,R_g$, on a

$$C_\delta = 1\Big/\left[\frac{p}{p_{v\delta}}\,\frac{R_v}{R_g} - \left(\frac{R_v}{R_g} - 1\right)\right], \qquad \text{(VIII.94)}$$

où $p_{v\delta}$ est la pression partielle de la vapeur à la surface du film; R_v, R_g, les constantes de gaz de la vapeur et du gaz incondensable.

En particulier, pour un mélange vapeur d'eau-air

$$C_\delta = 1\Big/\left[\frac{29}{18}\,\frac{p}{p_{H_2O\delta}} - \frac{11}{18}\right]. \qquad \text{(VIII.95)}$$

Pour le domaine des pressions normales on peut admettre que le coefficient de condensation est proche de l'unité. Dans ce cas la température de la vapeur à la surface du film est égale à la température de saturation sous la pression partielle de la vapeur à la surface du film. Pour les matières différentes, la valeur de la condensation de la vapeur à la surface du film peut être déterminée d'après la figure VIII.13.

On peut adopter avec une précision suffisante que $q_t = q_p$ alors

$$q_t = \alpha\,(T_\delta - T_p).$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Le}^{2/3}\,\frac{\bar{c}_{p0}\left[\left(T_0 - \frac{\alpha_1}{\rho_0 w_0\,\mathrm{St}_\Sigma}\,T_p\right) - T_\delta\left(1 + \frac{\alpha_1}{\rho_0 w_0\,\mathrm{St}_\Sigma}\right)\right]}{r} = \frac{C_0 - C_\delta}{C_\delta - 1}. \qquad \text{(VIII.96)}$$

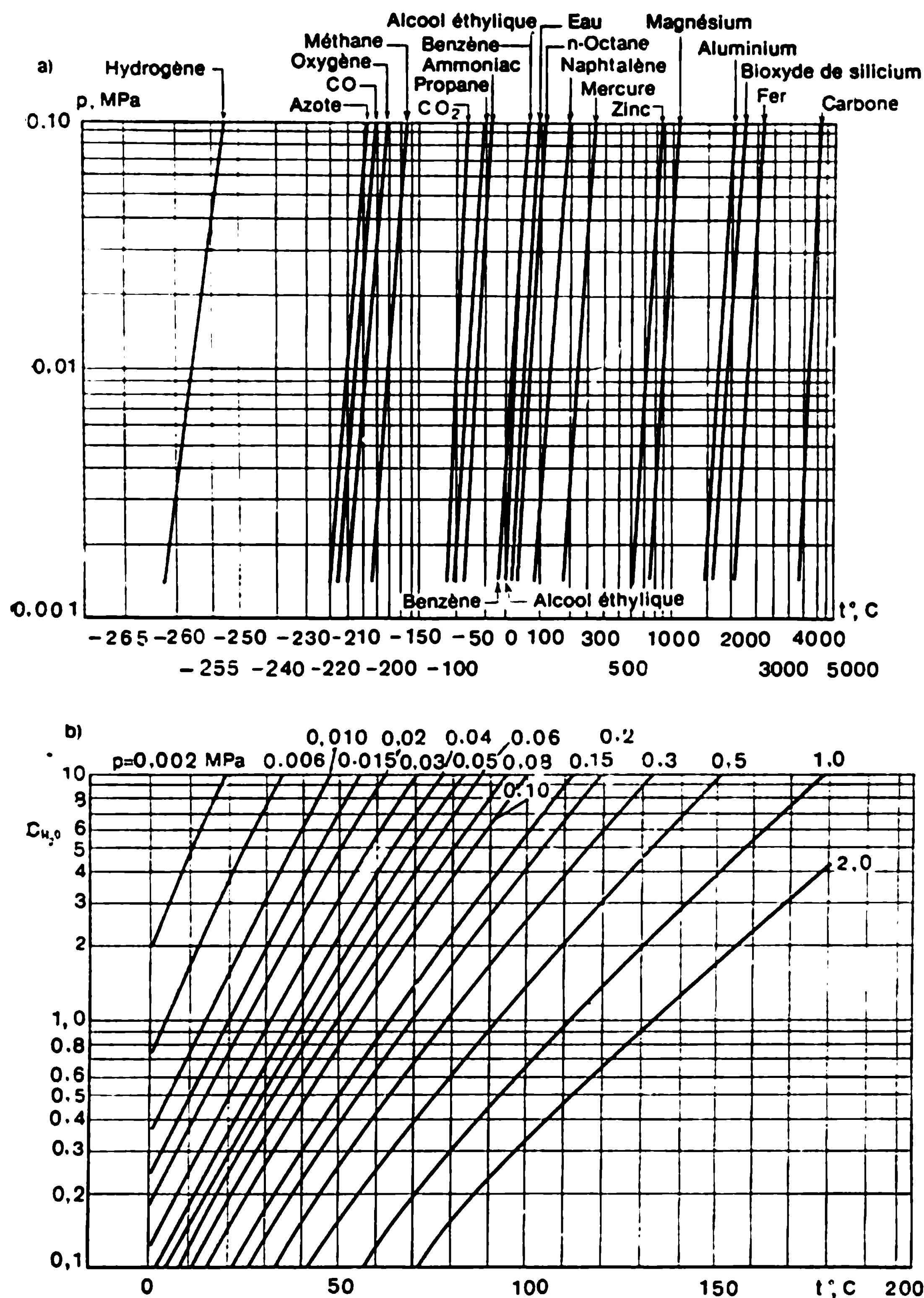


Fig. VIII.13. Relations entre la pression et la température sur la ligne de saturation pour des matériaux différents (*a*) et entre la concentration de la vapeur d'eau et la température pour le mélange vapeur-air sous des pressions différentes (*b*)

Si en première approximation on calcule α_1 d'après la théorie pelliculaire de Nüsselt, on obtient, compte tenu de l'équation (VIII.16),

$$\mathrm{Le}^{2/3}\frac{\bar{c}_{p0}}{r}\left[\left(T_0+\frac{\sqrt[4]{\dfrac{r\rho_1^2 g\lambda_1^3}{4\mu_1 x(T_\delta-T_p)T_p}}}{\rho_0 w_0\,\mathrm{St}_\Sigma}\right)-T_\delta\left(1+\frac{\sqrt[4]{\dfrac{r\mu_1 g\lambda_1^3}{4\mu_1 x(T_\delta-T_p)}}}{\rho_0 w_0\,\mathrm{St}_\Sigma}\right)\right]=\frac{C_0-C_\delta}{C_\delta-1}. \quad \text{(VIII.97)}$$

La résolution graphique de (VIII.97), compte tenu de (VIII.93), permet d'établir la température à la surface du film et le paramètre de perméabilité (fig. VIII.14).

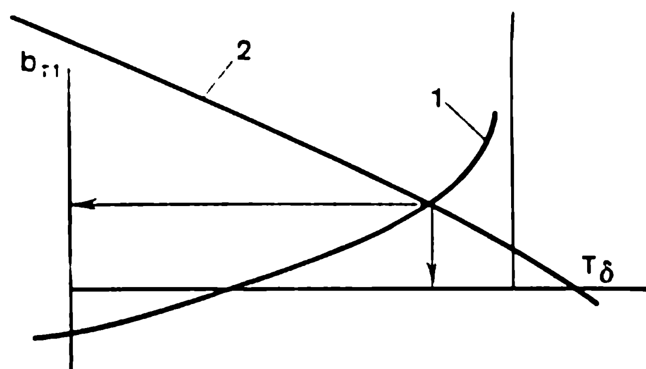


Fig. VIII.14. Température à la surface du film de condensat et paramètre de perméabilité:
1 — deuxième membre de l'équation (VIII.97); *2* — premier membre de l'équation (VIII.97)

L'intensité de la condensation se calcule d'après la formule

$$j_p=\rho_0 w_0 b_{T1}\mathrm{St}_0\Psi_S. \quad \text{(VIII.98)}$$

Compte tenu des formules (VIII.98) et (VIII.92), on a

$$j_p=\rho_0 w_0\frac{0{,}332}{\mathrm{Re}_x^{1/2}\,\mathrm{Pr}^{2/3}}\Psi_S b_{T1}. \quad \text{(VIII.99)}$$

9. Condensation en gouttelettes

Si la surface d'échange n'est pas mouillée par le condensat, il s'agit de la *condensation de la vapeur sous forme de gouttelettes*. Les observations de visu montrent que les gouttelettes du condensat s'accumulent à la surface d'échange thermique d'une façon explosive. En grossissant les gouttelettes fusionnent jusqu'à la dimension à laquelle la pesanteur, les fait glisser sur la surface refroidie et

entraîner toutes les gouttelettes qu'elles rencontrent en chemin. Sur la trace qui se forme ainsi apparaissent de nouvelles gouttelettes et le processus reprend (fig. VIII.2). Ainsi, la condensation sous forme de gouttelettes est, en toute rigueur, un processus non stationnaire; mais en opérant avec des paramètres moyennés dans le temps on peut l'envisager comme quasi stationnaire.

La pression de la vapeur saturée étant plus grande au-dessus de la surface de séparation des phases convexe qu'à la surface plane, la condensation de la vapeur sur une goutte sphérique de rayon R ne peut avoir lieu que dans le cas du sous-refroidissement de la vapeur au-dessous de la température de saturation. La valeur de ce sous-refroidissement se calcule d'après l'équation de Thomson connue

$$T_{sat} - T_{sup} = 2\sigma T_{sat}/(r\rho_l R). \qquad \text{(VIII.100)}$$

La formule (VIII.100) montre que pour déclencher le processus de condensation, plus le rayon de la goutte est petit, plus la vapeur doit être sous-refroidie.

Dans le cas général, il est possible que lors de la condensation sous la forme de gouttelettes, à la surface d'échange thermique existent simultanément des gouttes isolées et un film mince, dont l'épaisseur est sensiblement inférieure (de l'ordre de 1 μ) à celle du cas de la condensation en film. La rupture du film contracte le condensat en gouttes, la place ainsi libérée se couvrant de nouveau d'un microfilm de condensat. La résistance thermique dans ces conditions n'étant pas grande, les coefficients de transmission de chaleur de la condensation sous forme de gouttelettes atteignent de grandes valeurs (jusqu'à 10^5). Actuellement il n'existe pas de théorie rigoureuse pour l'échange de chaleur dans la condensation en gouttelettes; pour les calculs techniques on utilise donc les équations de similitude.

Les plus usitées sont les formules de V. Issatchenko [14]. D'après cet auteur, dans ces conditions le coefficient de transmission de chaleur moyen de la vapeur fixe est donné par les équations

pour $Re_* = 8\cdot10^{-4}$ à $3{,}3\cdot10^{-3}$

$$Nu = 3{,}2\cdot10^{-4}\, Re_*^{-0{,}84}\,\Pi_K^{1{,}16}\,Pr^{1{,}3}; \qquad \text{(VIII.101)}$$

pour $Re_* = 3{,}3\cdot10^{-3}$ à $1{,}8\cdot10^{-2}$,

$$Nu = 5\cdot10^{-6}\, Re_*^{-1{,}57}\,\Pi_K^{1{,}16}\,Pr^{1{,}3}, \qquad \text{(VIII.102)}$$

où

$$Nu = \frac{\bar{\alpha}R}{\lambda_l} = \frac{\bar{\alpha}2\sigma T_{sat}}{\lambda_l r\rho_l (t_{sat}-t_p)}; \quad Re_* = \frac{w_* R}{\nu_l} = \frac{\lambda_l (t_{sat}-t_p)}{\nu_l \rho_l};$$

$$\Pi_K = \frac{\xi\sigma R (t_{sat}-t_p)}{\rho_l \nu_l^2} = \frac{2\xi\sigma^2 T_{sat}}{r\rho_l^2\nu_l^2}; \quad Pr = \nu_l/a_l.$$

Dans les formules (VIII.101) et (VIII.102) les paramètres physiques sont choisis d'après la température de saturation. La figure VIII.15 compare les formules (VIII.101) et (VIII.102) avec les données

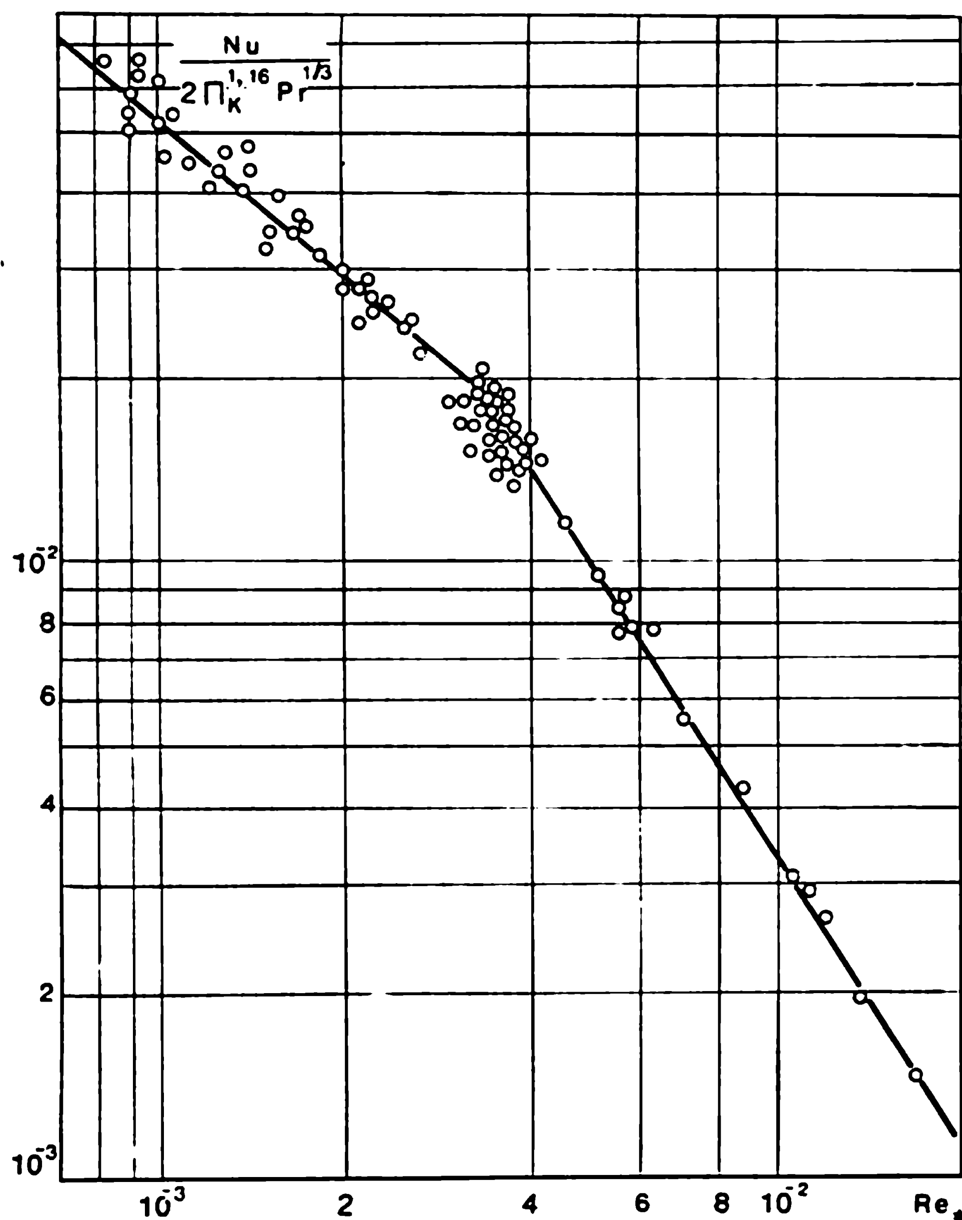


Fig. VIII.15. Transfert de chaleur dans la condensation en gouttelettes de la vapeur

d'expérience. Ces formules entraînent que pour de faibles pressions thermiques le coefficient de transmission de chaleur croît avec la croissance de Δt ($\alpha \sim \Delta t^{0,16}$), et pour de grands Δt ($\alpha \sim \Delta t^{-0,57}$), diminue. La loi change avec $\mathrm{Re} \cong 3{,}3 \cdot 10^{-3}$. Dans le domaine $\mathrm{Re}_* < 3{,}3 \cdot 10^{-3}$, la vitesse de la condensation est définie par la

sursaturation de la vapeur. Plus Δt est grand, plus la condensation est intense. Avec $Re_* > 3{,}3 \cdot 10^{-3}$ la résistance thermique du condensat commence à exercer une action décisive sur l'intensité de la condensation.

§ VIII.2. Echange de chaleur dans l'ébullition d'un liquide

Lorsque les processus d'échange de chaleur entre un liquide et la surface d'un corps ont lieu à la température proche de celle de saturation, ils peuvent s'accompagner de la formation de la phase de vapeur, de l'*ébullition du liquide.* Ce processus est particulièrement intense et trouve une large application dans les différents domaines de la technique actuelle.

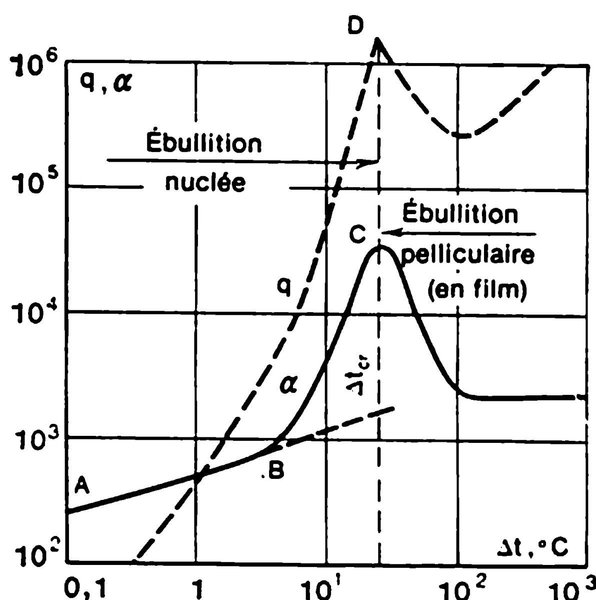


Fig. VIII.16. Allure de la variation de q et α en fonction de la pression thermique dans l'ébullition de l'eau

Pour faire apparaître l'ébullition, il faut au moins deux conditions: la température du liquide doit dépasser celle de saturation et il doit y avoir des centres de vaporisation.

On distingue l'*ébullition à la surface de chauffe* et *l'ébullition dans le volume du liquide.* Dans le premier cas que nous examinerons dans ce qui suit les bulles de vapeur naissent à la surface d'échange de chaleur, où la surchauffe un liquide est la plus forte.

La figure VIII.16 visualise la relation la plus typique obtenue expérimentalement entre le coefficient de transmission de chaleur et la pression thermique lors de l'ébullition du liquide dans un grand volume. Dans la région AB la surchauffe du liquide près de la surface est insuffisante pour former une phase de vapeur active; c'est pourquoi l'intensité d'échange est déterminée par les lois d'échange de chaleur par convection naturelle (cf. chapitre VII). Pour des nombres $Ra = Gr \cdot Pr < 10^9$, conformément à la formule (VII.13), le coefficient de transmission de chaleur $\alpha \sim \Delta t^{1/4}$. Dans la région de la convection turbulente, lorsque $Ra > 10^9$, $\alpha \sim \Delta t^{1/3}$. En particulier, pour l'eau, à la pression atmosphérique, la région AB

est limitée par la pression thermique $\Delta t = 5°C$ et, respectivement, par la charge thermique $q = 5{,}8 \cdot 10^3$ W/m².

Avec l'augmentation ultérieure de la charge thermique et de la pression thermique, à la surface de chauffe, dans de différentes cavités isolées, apparaissent des bulles de vapeur en croissance, le coefficient de transmission de chaleur croît brusquement. Avec l'augmentation de la charge thermique et de la pression thermique le nombre de germes de vaporisation à la surface de chauffe augmente, ce qui s'accompagne de la croissance du coefficient de transmission de chaleur. Cette région des valeurs de Δt (tranche *BC* de la figure VIII.16) s'appelle *ébullition nuclée*. D'après l'expérience, dans la région de l'ébullition nuclés le coefficient de transmission de chaleur

$$\alpha \backsim \Delta t^{2/3}.$$

En particulier, lors de l'ébullition de l'eau à la pression atmosphérique cette région est délimitée par les valeurs de la pression thermique de 5 à 25 °C, et de la charge thermique spécifique, de 10^5 à $9 \cdot 10^5$ W/m²; le coefficient de transmission de chaleur peut atteindre alors $3 \cdot 10^4$ W/(m²·K). En *C* on observe sa valeur maximale, qui correspond au maximum de la charge thermique spécifique (point *D*).

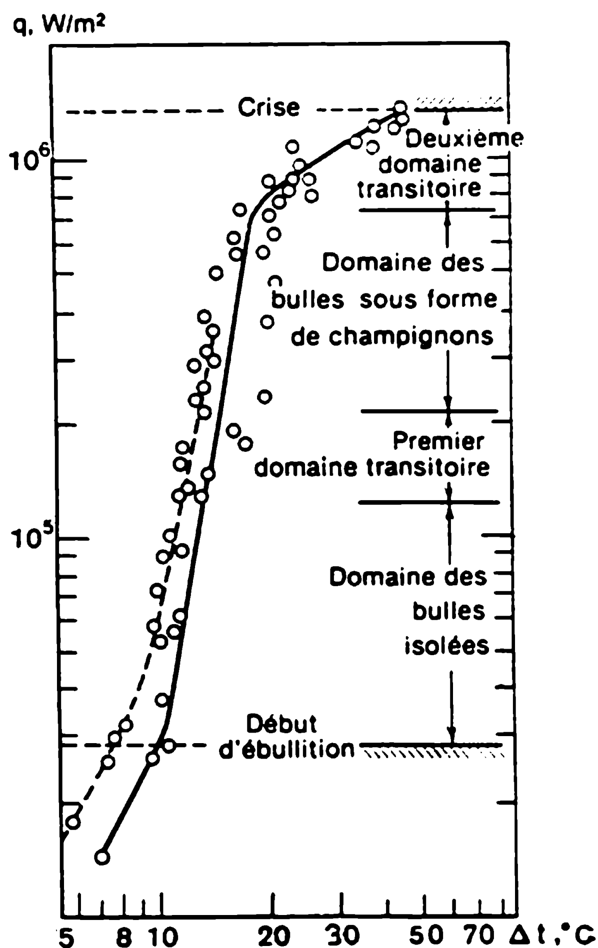


Fig. VIII.17. Relation entre la densité du flux thermique et la pression thermique

L'analyse des cinogramms de l'ébullition nuclée dans un grand volume de liquide montre que ce régime subit plusieurs changements en fonction de la pression thermique, associés aux régions suivantes: celle des bulles isolées; première région transitoire; région où les bulles à la surface de chauffe fusionnent en formations provisoires analogues aux champignons; et, enfin, la deuxième région transitoire (fig. VIII.17). L'augmentation ultérieure de la différence des températures réduit brusquement le coefficient de

transmission de chaleur. Les observations de visu montrent que ce phénomène est dû à la formation à la surface d'échange d'un film de vapeur continu. Le liquide est séparé de la surface par un film de vapeur dont la conductivité thermique est sensiblement plus faible, ce qui fait décroître le coefficient de transmission de chaleur. Ce régime d'ébullition est dit *en film* ou *pelliculaire*. Le passage

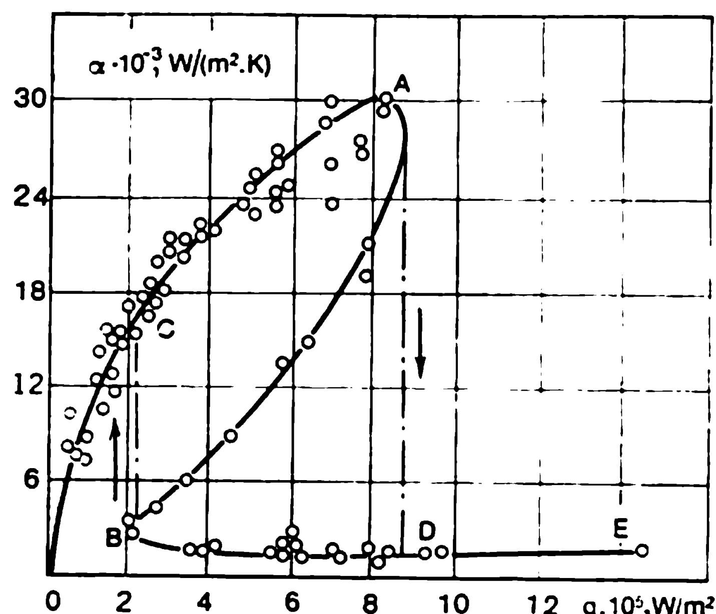


Fig. VIII.18. Relation entre le coefficient de transmission de chaleur α et la densité du flux thermique lors de l'ébullition de l'eau dans un grand volume

du régime nuclé au régime en film (et inversement) est d'un grand intérêt pratique pour le choix des régimes thermiques optimaux du fonctionnement des échangeurs de chaleur.

D'après l'usage, les valeurs de la pression thermique, du coefficient de transmission et de la charge thermique spécifique qui correspondent à l'instant du passage du régime nuclé au régime pelliculaire et inversement sont dites *critiques*.

L'échange de chaleur dans l'ébullition nucléée est très intense et permet d'évacuer de la surface de chauffe des flux thermiques importants, la chute des températures entre la paroi et le liquide étant relativement peu grande.

La figure VIII.18 visualise la relation entre le coefficient de transmission de chaleur de l'ébullition d'un liquide et la charge thermique spécifique. La courbe OA correspond au régime nuclé, et la courbe BE, au régime pelliculaire. Le point A détermine les paramètres critiques. Si la charge thermique dépasse la valeur critique, on observe le passage brusque de l'ébullition nucléée à l'ébullition en film, alors que le transfert de chaleur diminue (courbe AD).

Pourtant, le retour à l'ébullition nuclée après le régime pelliculaire à lieu sous des charges thermiques sensiblement inférieures (point B et ligne BC), c'est-à-dire lors du passage du régime nuclé au régime pelliculaire les expériences enregistrent un certain hystérésis.

Le changement du mécanisme (des lois) de transfert de chaleur au début du passage de la forme nuclée à la forme en film, ou de cette dernière à la forme nuclée, s'appelle *crise de transmission de chaleur* lors de l'ébullition. Dans les conditions données, la densité maximale du flux thermiques s'appelle *première densité critique* du flux thermique. Si la densité du flux thermique dépasse la valeur de la première densité critique, l'ébullition purement nuclée devient impossible. Sous les conditions données, la densité minimale du flux thermique lors de l'ébullition en film s'appelle *deuxième densité critique*. Lorsque la densité du flux thermique est inférieure à cette dernière, l'ébullition purement pelliculaire est impossible.

Les régimes envisagés des échanges thermiques correspondent aux conditions d'un liquide saturé. Dans la pratique, il arrive que le liquide bout lorsque sa température hors de la couche adhérente à la surface de chauffe est inférieure à la température de saturation. Ce processus s'appelle *ébullition du liquide sous-chauffé* ou *ébullition superficielle*; il a lieu le plus souvent dans le cas d'un écoulement forcé du liquide dans des canaux.

Examinons l'échange de chaleur par convection lors de l'écoulement d'un liquide dans un canal cylindrique, dont les parois sont chauffées. Supposons que la température du liquide t_1 est sensiblement inférieure à la température de saturation t_{sat} à la pression donnée. Tant que la température de la paroi est inférieure à celle de saturation, l'échange de chaleur est évalué par l'équation de similitude de la forme (cf. chapitre VI)

$$\alpha d/\lambda = C\,(\omega\rho d/\mu)^m\,(\mu g c_p/\lambda)^n.$$

D'où $q = \alpha\Delta t = C\frac{\lambda}{d}\,\mathrm{Re}^m\mathrm{Pr}^n\Delta t$, où $\Delta t = t_p - t_1$.

A partir d'un certain dépassement de la température de la paroi par rapport à celle de saturation, à la surface de chauffe apparaît une phase de vapeur active et le processus d'ébullition s'amorce. L'intensité du transfert de chaleur, c'est-à-dire le coefficient de transmission de chaleur, augmente brusquement.

Pour les conditions envisagées, la dépendance du flux thermique par rapport à la chute de température est visualisée sur la figure VIII.19, *a*. Ces courbes montrent que la surchauffe des parois nécessaire pour produire une ébullition superficielle augmente avec la croissance de la sous-chauffe du liquide jusqu'à la température de saturation.

L'analyse des données expérimentales montre que lorsque s'amorce l'ébullition superficielle, le processus d'ébullition à la surface de chauffe exerce l'influence décisive sur l'intensité d'échange de chaleur. Cette conclusion est confirmée par les figures VIII.19, *b*, *c* qui traduisent la dépendance du flux thermique spécifique par rapport à la température de saturation (t_p — t_{sat}). Les courbes

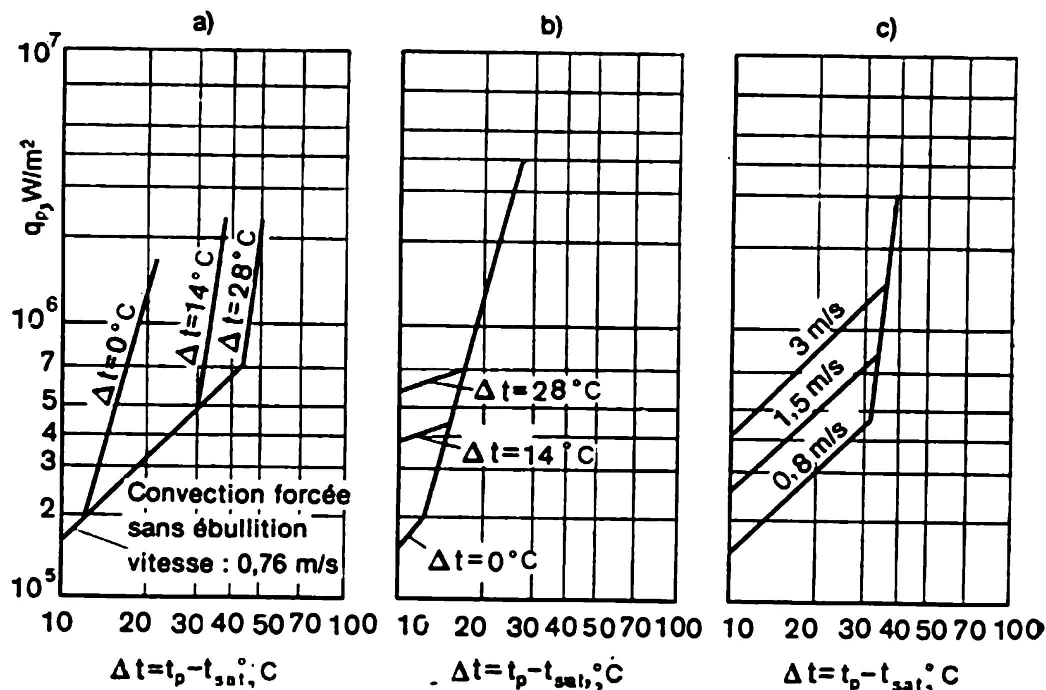


Fig. VIII.19. Variation de la densité du flux thermique:

a – convection forcée et ébullition avec sous-chauffage de degrés différents du liquide à pression atmosphérique; *b* — en fonction de Δt_{sat}; *c* — sous convection forcée et ébullition avec sous-chauffage de 14 °C pour vitesses différentes et pression atmosphérique

montrent que la sous-chauffe du liquide et la vitesse de ce dernier dans le canal n'influent pas d'une façon perceptible sur l'intensité d'échange de chaleur dans le domaine d'ébullition superficielle évoluée.

Les courbes représentées ne délimitent pas le domaine transitoire où l'influence sur l'échange de chaleur de la convection forcée et de l'ébullition superficielle sont équivalentes. D'autre part, la sous-chauffe et la vitesse du liquide interviennent dans la valeur des charges thermiques critiques.

Pour établir les méthodes de calcul de l'échange de chaleur par convection pendant l'ébullition d'un liquide, il faut déterminer:

1) les conditions sous lesquelles s'amorce le processus d'ébullition à la surface de chauffe donnée;

2) l'intensité d'échange par convection lors de l'ébullition;

3) la condition d'apparition de la crise de transmission de chaleur.

1. Particularités thermodynamiques du processus

Voici ce qui de ce point de vue distingue le problème. Les changements de phase simplifient tout dans cette optique, du fait que le système comporte deux phases, une composante et possède un degré de liberté. L'établissement de sa thermodynamique se ramène à composer des tableaux où toutes les fonctions sont données d'après la pression ou la température.

Or, même si on admet que le déséquilibre est faible, le système possède plus d'un degré de liberté, la nouvelle phase se trouvant à l'état dispersé : l'évaporation marche non pas à partir d'une surface ouverte, mais à partir de la surface d'ébullition. La vapeur existe sous la forme de bulles, la dimension géométrique des bulles est une caractéristique d'un nouveau degré de liberté, du fait que pour des bulles de diamètres différents les conditions d'équilibre diffèrent.

La différence des propriétés de la matière sous des conditions analogues est l'indice principal d'une phase. En fait, il existe encore un état de la matière (en plus de l'eau et de la vapeur), celui à la surface de séparation des phases liquide et du gaz.

Les forces intermoléculaires, brusquement influencées par la distance entre les molécules, se manifestent avec force à l'état condensé et faiblement à l'état de gaz.

Pour une particule d'un volume de liquide la résultante des forces d'interaction moléculaire est nulle. Mais lorsque la particule atteint la surface du liquide, la symétrie se trouve violée, puisque là elle ne subit presqu'aucune action de la part du gaz, et la résultante qui agit sur elle est dirigée suivant la normale à la surface vers l'intérieur du liquide. Cette résultante est la cause première des propriétés de la couche superficielle des molécules. Toute molécule tend à se déplacer à l'intérieur, comme si elle subissait l'action d'une pression extérieure (qui en fait est une pression intérieure: la cohésion). La pression due à la cohésion est très forte. Il est impossible de la mesurer directement, mais les calculs montrent qu'à la pression atmosphérique et à $t = 100$ °C elle vaut environ 580 MPa. Il en résulte que le liquide ne subit pas de pression extérieure.

La couche superficielle d'une épaisseur de quelques molécules présente une phase à propriétés spéciales, dont la principale est la tendance à faire passer ses molécules dans le volume du liquide; il s'ensuit que son état d'équilibre impose le nombre minimal de ses molécules.

Pour augmenter la surface, il faut fournir un travail contre les forces qui la diminuent. Ce champ des forces est la cause de l'existence d'une énergie particulière (superficielle). Il est impossible de l'attribuer au volume, celui-ci ne pouvant pas servir de paramètre d'état de la phase superficielle.

Pour deux phases principales toutes modifications de la configuration du système doivent s'accompagner d'un travail proportionnel à la variation du volume, accompagnée de la modification simultanée de $d\Omega$ de la surface de séparation. De la sorte, le rôle relatif des effets énergétiques dans la couche superficielle peut être mesuré par le rapport $d\Omega/dV$. Pour une sphère, la part de la surface est minimale

$$\frac{d\Omega}{dV}=\frac{d\Omega}{dR}\frac{dR}{dV}.$$

Si $\Omega = 4\pi R^2$, $V = (4/3)\,\pi R^3$, alors $d\Omega/dR = 8\pi R$, $dR/dV = 1/4\pi R^2$ et finalement

$$d\Omega/dV = 2/R. \qquad \text{(VIII.103)}$$

Si le corps n'est pas sphérique, ce rapport sera encore plus grand, mais il sera toujours de l'ordre $2/R$. Cette grandeur joue, probablement, un rôle décisif dans toutes les relations propres aux phénomènes superficiels.

Maintenant il faut choisir une fonction caractéristique en fonction des conditions de coexistence de deux phases considérées comme essentielles. Sans aucun doute, en premier lieu c'est la température, la condition $T =$ idem étant déterminante pour l'équilibre physique des phases, quelles que soient les circonstances. Par conséquent, la fonction caractéristique doit être soit l'énergie libre, soit l'enthalpie libre. Dans notre cas il est impossible d'utiliser l'énergie interne ou l'enthalpie, du fait que leur paramètre thermique indépendant est l'enthropie et non pas la température.

L'expérience montre que la couche superficielle se distingue non seulement par des propriétés mécaniques dues à la pression interne, mais aussi par des propriétés thermiques bien nettes. Par exemple, une expansion adiabatique rapide du film entraîne le refroidissement. Pour maintenir permanente la température, il faut qu'il existe un échange de chaleur. Puisque les conditions maintenues dans l'ambiance sont isothermes, l'augmentation de la surface s'accompagne de l'apport de chaleur qui se poursuit jusqu'à l'égalisation de la température.

Ainsi, pour les phases: $F_l\,(V_l,\ T)$ est l'énergie libre du liquide; $F_v\,(V_v,\ T)$, l'énergie libre de la vapeur; $F\,(\Omega,\ T)$, l'énergie libre de la surface.

Si nous voulons trouver la variation de l'énergie libre de la phase superficielle, il vient

$$dF = (\partial F/\partial\Omega)_T\, d\Omega + (\partial F/\partial T)_\Omega dT.$$

Examinons les variations de la surface dans les conditions d'une température constante : évaporation ou condensation dans les conditions isothermes

$$dF = (\partial F/\partial\Omega)_T \, d\Omega = \sigma d\Omega, \qquad \text{(VIII.104)}$$

où $\sigma = (\partial F/\partial\Omega)_T$ est la tension superficielle, constante physique du matériau. On peut admettre que σ dépend seulement de la température. Il est établi que pour la plupart des matériaux

$$d\sigma/dT < 0. \qquad \text{(VIII.105)}$$

Ceci s'explique sans peine du point de vue de la théorie moléculaire-cinétique. Avec l'augmentation de la température l'énergie cinétique des molécules croît, ce qui rend possible leur pénétration dans la couche superficielle ; par conséquent, l'énergie superficielle diminue, puisque la tendance à la contraction des dimensions du film s'affaiblit elle aussi. L'expression (VIII.104) montre que si on envisage Ω comme une coordonnée généralisée, dans l'analyse thermodynamique des phénomènes superficiels δ peut être considérée comme potentiel.

Lorsqu'à l'intérieur d'un grand volume de liquide il y a une surface plane, siège de l'ébullition, le transfert de chaleur au liquide est plus intense que celui à la vapeur (le coefficient de conductivité thermique du liquide est plus grand). La chaleur se déplace de toutes les directions du liquide vers les bulles générées à la surface. Il faut établir quelles sont les conditions qui caractérisent les deux phases au voisinage de la surface, lorsque la phase de vapeur est sous une forme dispersée. On peut admettre que les grandeurs connues sont la pression et la température du système. Dans ce cas la fonction caractéristique est l'enthalpie libre

$$\Phi = F_\Sigma + pV; \; d\Phi = dF_\Sigma + d\,(pV),$$

où $F_\Sigma = F_1 + F_v + F$; $dF_1 = -s_1 \, dT - p_1 \, dV_1$, $dF_v = -s_v \, dT - - p_v \, dV_v$; $dF = \sigma \, d\Omega + \Omega \, d\sigma$.

Associons l'aire Ω à la vapeur, puisque la dimension de la surface est définie par la quantité de bulles de vapeur, alors que le liquide peut avoir également d'autres surfaces.

L'équilibre impose que la température soit constante (certains termes disparaissent alors, $d\sigma$, y compris du fait qu'à la température constante $\sigma = \text{const}$), alors que $d\Phi = 0$ et $dp = 0$, de sorte que

$$d\,(pV) = pdV = p\,(dV_1 + dV_v).$$

Maintenant on peut écrire

$$d\Phi = -p_1 \, dV_1 - p_v \, dV_v + \sigma \, d\Omega \div p \, dV_1 + p \, dV_v,$$

ou

$$d\Phi = (p - p_l)\, dV_l + (p - p_v + \sigma\, d\Omega/dV_v)\, dV_v = 0.$$

dV_l et dV_v n'ont pas de rapport direct, puisque le volume change et la relation entre eux ne peut être établie que si l'on connaît les quantités p_l, p_v et la relation entre V_l et V_v d'une part, et la pression de l'autre. Admettons que dV_l et dV_v ne sont pas liés. Alors, $d\Phi = 0$ seulement dans le cas où chacune des expressions entre parenthèses est nulle

$$p - p_l = 0, \text{ c'est-à-dire } p = p_l.$$

Compte tenu de (VIII.103),

$$\sigma\, d\Omega/dV_v = \sigma 2/R, \text{ donc } p - p_v + 2\sigma/R = 0.$$

La pression dans la deuxième phase est égale à la pression extérieure additionnée à une certaine grandeur

$$p_v = p_l + 2\sigma/R. \qquad \text{(VIII.106)}$$

La relation (VIII.106) montre que la pression à l'intérieur d'une bulle peut être bien plus élevée que dans le liquide (pour de petits R).

Sur la nature physique de la correspondance entre la pression et la température à l'état d'équilibre il faut faire la remarque suivante. Seulement celles des molécules peuvent passer à l'état de vapeur, qui possèdent une énergie cinétique suffisante pour franchir la couche superficielle en effectuant le travail de sortie. Dans l'espace au-dessus du liquide la densité numérique des molécules croît, ce qui fait croître la pression. Enfin s'établit l'équilibre: la quantité de molécules qui heurtent la surface et sont entraînées à l'intérieur s'égalise avec celle de molécules qui s'échappent à l'extérieur. Par conséquent, pour la température donnée, la pression de la vapeur est déterminée par le travail de sortie: pour un travail moindre, les molécules s'échapperont en plus grand nombre et la pression sera plus grande. Il convient de souligner que le travail de sortie dépend de la géométrie de la surface. La courbure de la surface modifie les distances entre les molécules, et une molécule à la surface est sollicitée par un plus grand nombre de molécules. Quand la surface est convexe, l'interaction des molécules diminue, tout comme le travail de sortie. Ceci fait que la pression d'équilibre au-dessus d'une goutte est plus grande qu'au-dessus d'une surface plane dans une bulle, au-dessus d'une surface concave elle est plus basse qu'au-dessus d'un plan.

Pour calculer la diminution de la pression, considérons l'effet du mouvement ascendant capillaire. Le liquide monte dans un capillaire justement parce que le ménisque est concave.

Là où la surface est plane le rayon de courbure est infini et

$$p_{l\infty} = p_{v\infty}.$$

Ecrivons les conditions d'équilibre séparément pour les phases du liquide.

$$p_{l\infty} - p_{lR} = h\rho_l;$$

et de la vapeur

$$p_{v\infty} - p_{vR} = h\rho_v.$$

Dans le premier cas la différence des pressions est équilibrée par la colonne du liquide h; dans le deuxième, par la colonne de vapeur. Retranchons de la première équation la deuxième: $p_{vR} - p_{lR} = h(\rho_l - \rho_v)$. En même temps $p_{vR} - p_{lR} = 2\sigma/R$. Par conséquent, la hauteur de la montée capillaire

$$h = \frac{2\sigma}{R} \frac{1}{(\rho_l - \rho_v)}.$$

Maintenant on trouve facilement la pression à la surface incurvée

$$p_{lR} = p_\infty - \frac{2\sigma}{R} \frac{\rho_l}{\Delta\rho}; \quad p_{vR} = p_\infty - \frac{2\sigma}{R} \frac{\rho_v}{\Delta\rho}. \qquad \text{(VIII.107)}$$

Résumons: on a établi que la vapeur à l'intérieur d'une bulle subit non seulement la pression du liquide, mais aussi l'action de compression exercée par la tension superficielle. Cette conclusion a été tirée par Laplace en partant de l'expérience et des considérations physiques. Si on considère non pas une bulle, mais une goutte, alors p_l et p_v changent de place.

Il s'est avéré que l'incurvation de la surface de séparation des phases modifie la pression aussi bien dans le liquide que dans la vapeur. Mais la courbure intervient d'une façon différente dans le liquide et la vapeur: la grandeur retranchée est soit ρ_l, soit ρ_v. Dans les conditions courantes, $\rho_l \gg \rho_v$. De cette façon l'action de l'incurvation de la surface est très forte pour la phase liquide et très faible pour la vapeur: la production d'une bulle de vapeur impose la surchauffe du liquide.

2. Formation de la phase de vapeur active

Bien que l'échange de chaleur soit un processus de déséquilibre typique, pour déterminer l'instant de départ de l'ébullition il est commode d'utiliser les conditions d'équilibre thermodynamique d'un système biphasé eau-vapeur:

1) égalité des températures du liquide et de la vapeur;
2) égalité des potentiels chimiques du liquide et de la vapeur;

3) dans le cas d'une surface de séparation sphérique les pressions du liquide et de la vapeur sont liées par l'équation de Laplace (VIII.106):

$$p_v = p_l = 2\sigma/R.$$

Supposons que la vapeur occupe une partie de la microcavité à la surface de chauffe et le rayon de courbure initial de la surface de séparation des phases soit R_0, alors que l'angle marginal entre la paroi et la surface de séparation des phases soit de 90° (fig. VIII.20).

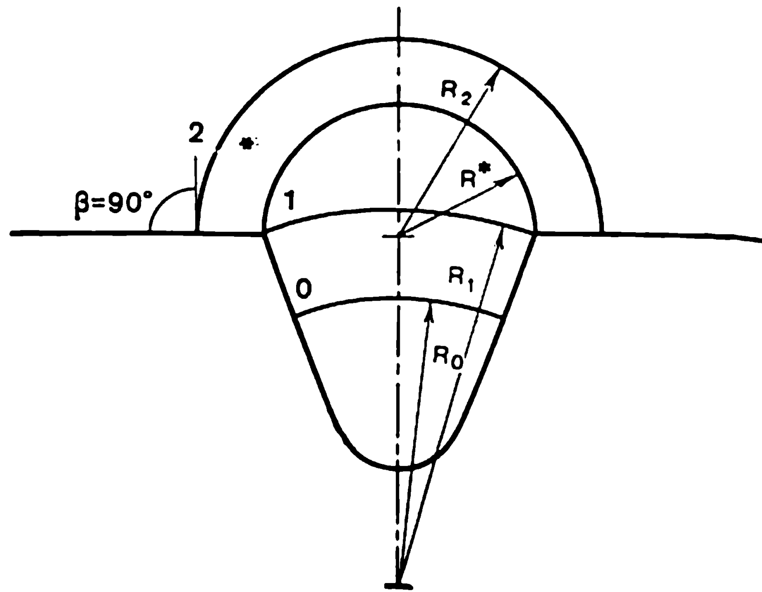


Fig. VIII.20. Creux conique idéalisé à angle de contact de 90°

Supposons également que le système se trouve en équilibre thermodynamique. Pour déséquilibrer le système dans le sens de la croissance de la bulle, il faut soit diminuer la pression du liquide, soit renforcer son échauffement. Admettons que nous augmentons progressivement la température du liquide et de la vapeur en conservant à chaque instant les conditions d'équilibre thermodynamique. Ceci déterminera la croissance de la phase de vapeur. La figure VIII.21 illustre la relation entre le rayon de la surface de séparation sphérique et le volume de la vapeur. Après l'état *1*, lorsque la surface de séparation atteint l'embouchure de la microcavité, la croissance ultérieure du volume de la vapeur s'accompagne de la diminution du rayon de courbure de la surface de séparation (fig. VIII.21) tant que l'angle marginal n'atteigne sa valeur caractéristique (dans notre cas 90°). La croissance ultérieure de la phase de vapeur fait augmenter le rayon de courbure et diminue la surchauffe du liquide, imposée par l'équilibre thermodynamique. Ainsi, il existe un rayon de courbure minimal de la surface de séparation des phases, qui

correspond aux surchauffes maximales du liquide. Ce rayon est dit *critique*. Si on adopte que le rayon critique de la germe est lié sans ambiguïté au rayon de la microcavité (dans notre exemple, ils sont tout simplement égaux), alors pour une surface de chauffe rugueuse on peut calculer celles des surchauffes du liquide près de la paroi, c'est-à-dire celles des températures de la paroi, qui assurent la formation d'une phase de vapeur active. Lorsque la surchauffe est inférieure à la valeur relative au rayon critique. les bulles de vapeur (germes) peuvent remplir les microcavités, mais resteront fixes. Une surchauffe supérieure à la valeur critique déclenche la croissance continue des bulles de vapeur jusqu'à ce qu'elles atteignent le diamètre qui détermine leur détachement, c'est-à-dire le processus d'ébullition.

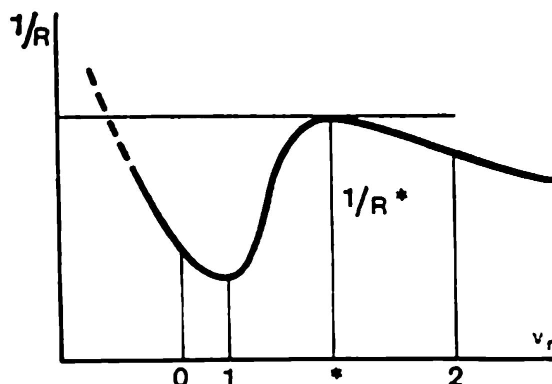


Fig. VIII.21. Variation de la grandeur $1/R$ en fonction du volume de la vapeur (R^* est la valeur critique),

A mesure que la surchauffe se renforce, la quantité de germes de vapeur actifs augmente du fait que des microcavités plus petites interviennent dans le processus.

Pour calculer l'excédent de la température de la paroi par rapport à celle de saturation nécessaire pour produire une phase de vapeur active, utilisons l'équation de Laplace (VIII.106) et celle de Clapeyron-Clausius:

$$dp/dT = \frac{r\rho_l\rho_v}{T_{sat}(\rho_l - \rho_v)}. \qquad \text{(VIII.108)}$$

En passant des dérivées aux différences finies et en admettant que la température du liquide est égale à celle de la paroi, on obtient

$$\Delta p = \frac{r(T_p - T_l)\rho_v}{T_{sat}(1 - \rho_v/\rho_l)}. \qquad \text{(VIII.109)}$$

En admettant que $\rho_v/\rho_l \ll 1$, la résolution des équations (VIII.106) et (VIII.109) entraîne

$$T_p - T_{sat} = 2\sigma T_{sat}/(r\rho_v R). \qquad \text{(VIII.110)}$$

La relation obtenue implique que plus le rayon de la microcavité est petit, plus la surchauffe de la paroi nécessaire pour déclencher l'ébullition doit être forte. L'augmentation de la pression diminue la surchauffe nécessaire. Ces conclusions sont confirmées par l'expérience. D'autre part, la formule (VIII.110) amène qu'avec l'augmentation du rayon des microcavités, l'intensité de la surchauffe

nécessaire diminue. Pourtant, l'expérience montre qu'il existe pour la surchauffe donnée une marge définie des dimensions des microcavités, de R_{min} à R_{max}, qui constituent des centres actifs de la formation de la vapeur. La formule (VIII.110) détermine seulement les dimensions minimales des microcavités. Ceci est dû au fait qu'en déduisant la formule on a supposé que la température du terme de la vapeur est égale à celle de la paroi. Or, au voisinage de la surface de chauffe il existe une couche mince de liquide où la température change de sa valeur à la paroi jusqu'à celle du volume principal (dans le cas d'un grand volume, jusqu'à la température de saturation.

Les germes de vapeur dans les microcavités à rayon relativement grand peuvent entrer dans la couche thermique. Il en résulte que la température moyenne de la vapeur dans la bulle sera inférieure à celle de la paroi, et ce germe ne sera pas actif.

3. Dynamique de la croissance des bulles de vapeur à la surface de chauffe

Comme nous l'avons montré dans ce qui précède, si la surchauffe de la paroi est supérieure à la valeur critique, les bulles de vapeur qui se forment dans les microcavités commencent à croître et, lorsque leur diamètre atteint une certaine valeur, se détachent de la surface de chauffe.

Une bulle de vapeur croît à la surface en deux étapes. A l'étape initiale, une bulle formée à la surface de chauffe se trouve dans une couche de liquide surchauffé et pratiquement croît dans des conditions isothermes à la température égale à celle du liquide surchauffé. La vitesse de sa croissance est alors définie par l'action des forces d'inertie du liquide qui entoure la bulle, et de la tension superficielle.

En particulier, la croissance de la bulle dans un volume infiniment grand de liquide dans des conditions isothermes peut être calculée d'après le système d'équations différentielles suivant :

équation du mouvement du liquide qui entoure la bulle

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}; \qquad \text{(VIII.111)}$$

équation de la continuité

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u) = 0. \qquad \text{(VIII.112)}$$

En intégrant la dernière équation de $r = R$ (où R est le rayon de la bulle) à r, on obtient

$$r^2 u = \text{const}, \qquad \text{(VIII.113)}$$

pour $r = R$, $u = dR/d\tau$; donc

$$R^2\, dR/d\tau = \text{const.} \qquad \text{(VIII.114)}$$

Les équations (VIII.113), (VIII.114) entraînent

$$u = \frac{dR}{d\tau}\left(\frac{R}{r}\right)^2. \qquad \text{(VIII.115)}$$

En portant la valeur de u de la formule (VIII.115) dans (VIII.111), on obtient

$$r^{-2}\left[2R\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + R^2\frac{d^2R}{d\tau^2}\right] - r^{-5}2R^4\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}. \qquad \text{(VIII.116)}$$

L'intégration de cette équation de $r = R$ à $r \to \infty$, compte tenu de (VIII.106), permet d'obtenir

$$R\frac{d^2R}{d\tau^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + \frac{2\sigma}{\rho R} = \frac{1}{\rho}\Delta p, \qquad \text{(VIII.117)}$$

où $\Delta p = p_v - p_l$ est la valeur initiale de la chute de pression déterminée à l'aide de la surchauffe du liquide et la dimension primaire de la bulle dépassant la valeur critique.

(VIII.117) s'appelle *équation de Rayleigh.* Elle compte plusieurs solutions déterminées par des restrictions différentes. En particulier, Rayleigh a résolu le problème de la destruction de la bulle de dimension initiale R_m susceptible de subir brusquement une pression excédentaire Δp qui reste ensuite constante.

Négligeons la tension superficielle et la pression du gaz dans la bulle pour récrire l'équation (VIII.117) sous la forme

$$\frac{d}{d\tau}R^3\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = \frac{2p_l}{\rho_l}R^2\frac{dR}{d\tau}. \qquad \text{(VIII.118)}$$

L'intégration de cette équation sous les conditions initiales $R(0) = R_m$ et $\frac{dR}{d\tau}(0) = 0$ donne

$$\frac{\tau}{R_m} = \sqrt{\frac{3\rho_l}{2p_l}}\int_1^{R^+}\frac{R^{+2/3}\,dR^+}{\sqrt{1-R^{+3}}}, \qquad \text{(VIII.119)}$$

où $R^+ = R/R_m$.

On en tire le temps de destruction de la bulle

$$\tau/\tau_m \cong 0{,}915\sqrt{\rho_l/(6p_l)}. \qquad \text{(VIII.120)}$$

Un résultat analogue a été obtenu par d'autres chercheurs qui ont envisagé la condensation de la bulle de vapeur dans un liquide sous-chauffé. L'observation a permis d'établir qu'à partir d'un certain instant, la différence des pressions $\Delta p = p_v - p_l = 2\sigma/R$

reste constante. En utilisant les mêmes conditions initiales que dans le problème de Rayleigh, on a obtenu la solution sous la forme

$$\frac{\tau}{R_m}\sqrt{\frac{2}{3}\frac{(-\Delta p)}{\rho_l}}=\int_0^{R^+}\frac{R^{+2/3}\,dR^+}{\sqrt{1-R^+}}. \qquad \text{(VIII.121)}$$

La figure VIII.22 compare les données expérimentales avec les résultats fournis par les formules (VIII.119) et (VIII.121).

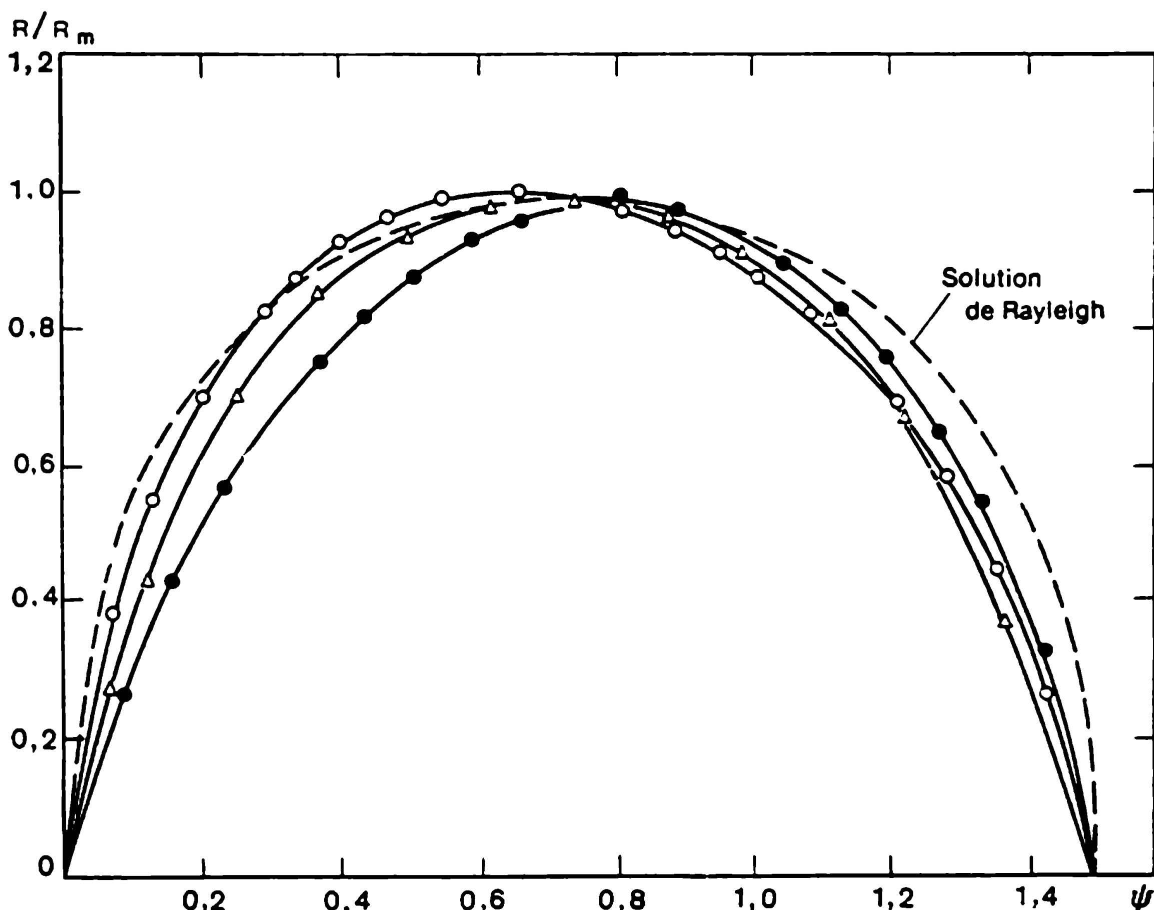


Fig. VIII.22. Comparaison de la solution de Rayleigh avec les données expérimentales d'Ellion (○, △) et de Günter (●).

La première étape de la croissance d'une bulle de vapeur prend relativement peu de temps, et déjà quelques millisecondes après le début de la croissance on peut négliger les forces d'inertie du liquide ambiant, ainsi que la tension superficielle, et admettre que la croissance de la bulle se poursuit dans les conditions isobares. Dans ce cas cette croissance est déterminée par l'intensité de la vaporisation, c'est-à-dire par le flux thermique vers la surface de séparation des phases.

L'équation de l'énergie du liquide surchauffé qui entoure un volume de vapeur sphérique peut s'écrire

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}+u\,\frac{\partial T}{\partial r}=a_l\,\frac{1}{r^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial I}{\partial r}\right). \qquad \text{(VIII.122)}$$

Obtenons la solution de cette équation sous les conditions aux limites et initiales suivantes

$$T\,(r,\,0)=T_{\text{surch}};\; T\,(R,\,\tau)=T_{\text{sat}};\; T\,(\infty\tau)=T_{\text{surch}}. \qquad \text{(VIII.123)}$$

La vitesse radiale du liquide à la surface de séparation est associée à la vitesse du déplacement de la surface $dR/d\tau$ elle-même par l'équation du bilan de masse à la surface

$$-\rho_v\,\frac{dR}{d\tau}=\left[u\,(R)-\frac{dR}{d\tau}\right]\rho_l. \qquad \text{(VIII.124)}$$

Par conséquent,

$$u=\frac{\rho_l-\rho_v}{\rho_l}\,\frac{dR}{d\tau}\left(\frac{R}{r}\right)^2. \qquad \text{(VIII.125)}$$

Le bilan thermique à la surface de séparation permet de tirer

$$\lambda_l dT\,(R,\;\tau)/dr=\rho_v r dR/d\tau. \qquad \text{(VIII.126}$$

La solution exacte de (VIII.126) sous les conditions d'univalence (VIII.123), obtenue par Scrywen, Birkhoff et autres, est de la forme

$$R\,(\tau)=2C_1\sqrt{a_l\tau}, \qquad \text{(VIII.127)}$$

où la constante C_1 pour des états pas très proches de la valeur critique, est égale à

$$C_1=\sqrt{\frac{3}{\pi}}\,(T_{\text{surch}}-T_{\text{sat}})\,\frac{\rho_l c_l}{\rho_v r}. \qquad \text{(VIII.128)}$$

On connaît également d'autres solutions de (VIII.122) où l'expression de la vitesse se calcule à partir de l'équation de Rayleigh (par exemple, dans les travaux de Forster et Zouber). Toutes ces solutions donnent des résultats quantitativement identiques qui peuvent être généralisées par la formule

$$\sqrt{\frac{3}{\pi}}>\frac{r\rho_v\,\sqrt{a\tau}}{\lambda\,\Delta T}\,\frac{dR}{d\tau}>\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad \text{(VIII.129)}$$

Cette formule correspond assez bien aux données expérimentales obtenues pour l'ébullition de l'eau à la pression atmosphérique dans un grand volume.

Pourtant, lors de l'ébullition nuclée évoluée les conditions d'amenée de la chaleur à la surface de séparation des phases peuvent différer sensiblement de celles qui accompagnent le processus décrit ci-dessus.

D'après D. Labountsov. dans ces conditions il existe près de la surface de chauffe une couche très mince de liquide surchauffé d'une épaisseur de l'ordre $\Delta = \frac{\lambda \Delta T}{q_p}$. L'enthalpie $c\rho\Delta T$ en excès du liquide n'est pas grande, surtout sous des pressions élevées, où elle est sensiblement inférieure à la chaleur du changement de phase $r\rho_v$. Labountsov considère que dans ce cas la chaleur déterminante pour la croissance de la bulle de vapeur à la surface de chauffe est celle qui est amenée à la base de la bulle à travers une couche mince de liquide.

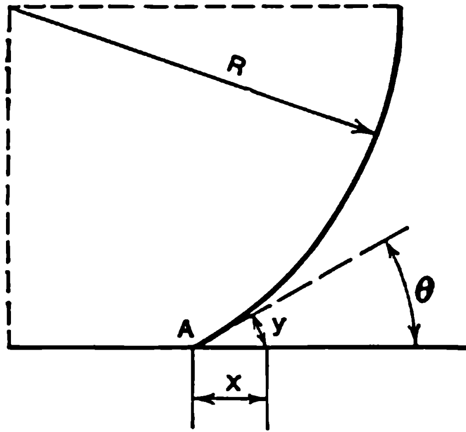


Fig. VIII.23. Grandeurs exprimant la relation |de la densité locale du flux thermique

Conformément au modèle adopté, le flux thermique spécifique vers un élément de surface de la bulle près de sa base (fig. VIII.123) est

$$q = (\lambda/y)\,\Delta T. \qquad \text{(VIII.130)}$$

La période envisagée étant celle de la croissance isobare de la bulle, la température à sa surface est égale à celle de saturation.

Le flux thermique vers la base de la bulle fait

$$Q_A = \int_S q\,dS_A = 2\pi R \cos\frac{\theta_0}{2}\,\lambda\Delta T \int_{y_A} \frac{dy}{y},$$

ou

$$Q_A = 2\pi R \cos\frac{\theta_0}{2}\,\lambda\Delta T \ln\frac{\Delta}{y_A}. \qquad \text{(VIII.131)}$$

Dans cette équation y est l'épaisseur minimale de la couche de liquide au voisinage du point A, qui justifie la loi de Fourier (cette valeur est de l'ordre des distances intermoléculaires dans le liquide, c'est-à-dire 10^{-6} à 10^{-7} mm).

L'équation du bilan énergétique conduit à

$$r\rho_v\,dV/d\tau = \int_S q\,dS.$$

Etant donné que

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 (1+\cos\theta_0)^2 (2-\cos\theta_0),$$

il vient

$$dR/d\tau = \beta\lambda\Delta T/(r\rho_v R), \qquad \text{(VIII.132)}$$

où

$$\beta = \frac{2\cos\theta_0/2}{(1+\cos\theta_0)^2(2-\cos\theta_0)} \ln\frac{\Delta}{y_A}.$$

Pour les conditions $0 < \theta_0 < \pi/2$ et $\Delta \backsim 10^{-1}$ mm, l'ordre de β est 10. En intégrant (VIII.132) à condition initiale $R=0$ avec $\tau=0$, on a

$$R = \sqrt{2\beta\lambda\Delta T/(r\rho_v)}. \qquad \text{(VIII.133)}$$

Les résultats de la vérification expérimentale de cette dernière équation sont visualisés sur la figure VIII.24. La ligne 1 correspond

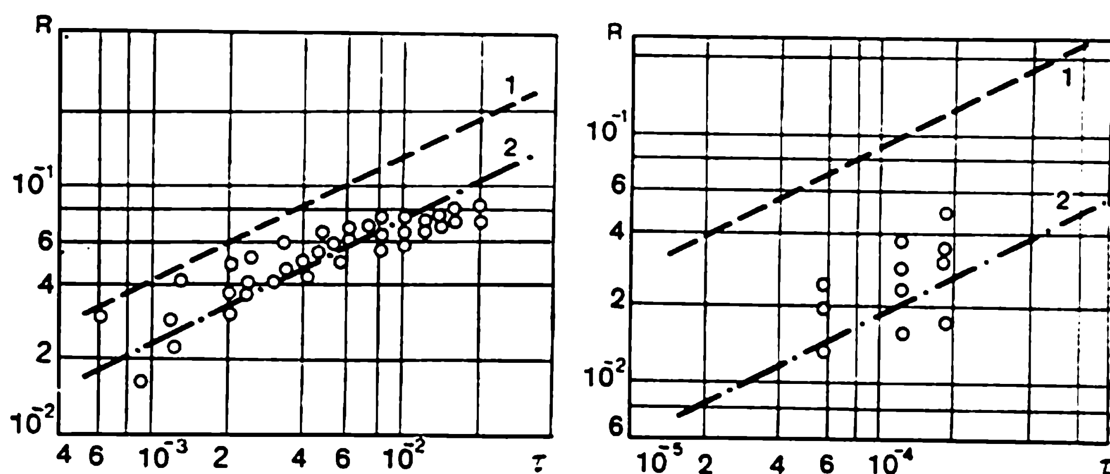


Fig. VIII.24. Comparaison des données expérimentales et des relations de calcul en fonction de la vitesse de la croissance d'une bulle:
lignes 1 et 2 — calculs d'après les formules (VIII.127), (VIII.133); ○ — expérience

au calcul d'après la formule (VIII.127), et la ligne 2, d'après la formule de Labountsov (VIII.133). Malgré la différence peu grande entre ces formules, la relation proposée par Labountsov correspond mieux aux données expérimentales (sur la courbe, ce sont des ronds isolés). Avec la croissance de la pression, la différence entre les relations envisagées croît. Ces formules rendent différemment compte de l'influence de la surchauffe du liquide sur la vitesse avec laquelle la bulle croît. D'après la formule (VIII.127), $R \backsim \Delta T$, et d'après (VIII.133), $R \backsim \Delta T^{0,5}$.

La croissance réelle d'une bulle à la surface de chauffe est bien plus compliquée que celle du modèle de Labountsov, mais ce modèle décrit correctement ses lois principales.

En général, la plupart des calculs proposés de la vitesse de la croissance d'une bulle de vapeur peuvent se ramener à la formule suivante:

$$R(\tau) = C\,\mathrm{Ja}^n\,(a_l\tau)^{0,5}B, \qquad \text{(VIII.134)}$$

où $\mathrm{Ja} = \frac{c_l\rho_l\Delta T}{r\rho_v}$ est le nombre de Jacob; C, n, des constantes (tableau VIII.3).

Tableau VIII.3

Valeurs des constantes C, n et B de la formule (VIII.134)

Auteurs des calculs	n	C	B
Labountsov	0,5	12	1,0
Bochniakovitch	1,0	2,0	1,0
Cooper	1,0	2,5	$\mathrm{Pr}^{-0,5}$
Plesset et Zwick	1,0	$2/\sqrt{\pi}$	1,0
Scrywen	1,0	2,0	1,0

Une bulle de vapeur croît à la surface de chauffe jusqu'à une dimension définie, à laquelle elle se détache de la surface. Le diamètre de détachement de la bulle peut se calculer d'après la condition d'équilibre des forces qui lui sont appliquées à l'instant du détachement. Ici il convient de tenir compte des forces de tension superficielle qui maintiennent les bulles à la surface, les forces d'Archimède, les forces d'inertie du liquide ambiant et les forces de viscosité engendrées par la croissance de la bulle. Pour le moment ce problème n'a pas été résolu en toute rigueur pour rendre compte de toutes les forces appliquées à la bulle.

Lorsque la bulle croît sur une surface horizontale placée dans un grand volume, l'équation de l'équilibre des forces à l'instant de détachement s'écrit en première approximation

$$\frac{\pi}{6}D_0^3 g(\rho_l - \rho_v) = \frac{\pi}{8}\zeta D_0^2\rho_l\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2_{R_0} + \varphi(\Theta)\,\pi D_0\sigma, \qquad \text{(VIII.135)}$$

où $D_0 = 2R_0$ est le diamètre de détachement de la bulle; R, son rayon courant; ζ, le coefficient de résistance hydrodynamique à la croissance de la bulle; $\varphi(\Theta)$, une fonction de l'angle marginal de mouillage.

Le premier terme de cette équation est la force d'Archimède qui détache la bulle de la paroi; le deuxième, la résistance hydrodynamique au déplacement de la bulle. Il convient de noter que dans le cas général cette force peut aussi bien entraver que favoriser le

détachement de la bulle de la surface de chauffe. Le troisième terme caractérise la tension superficielle qui maintient la bulle à la surface de chauffe.

L'équation (VIII.135) amène

$$\overline{D}_0=\frac{D_0}{\sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_l-\rho_v)}}}=\frac{3\zeta}{16}\,\mathrm{Fr}+\sqrt{\frac{9\zeta^2}{256}\,\mathrm{Fr}^2+6\varphi(\Theta)},\qquad \text{(VIII.136)}$$

où

$$\mathrm{Fr}=\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2_{R_0}\sqrt{\frac{\rho_l}{g\sigma(1-\rho_v/\rho_l)}}.$$

Si on ne considère que les conditions d'équilibre des forces d'Archimède et de la tension superficielle (c'est-à-dire le cas où $\mathrm{Fr}\to 0$), l'équation (VIII.136) conduit à la formule de Fritz bien connue

$$\overline{D}_0\sqrt{6\varphi(\Theta)}.\qquad \text{(VIII.137)}$$

D'après les calculs de Fritz, si l'angle Θ est exprimé en degrés, on peut adopter

$$\sqrt{6\varphi(\Theta)}\simeq 0{,}02\Theta.\qquad \text{(VIII.138)}$$

La figure VIII.25 compare les résultats expérimentaux avec ceux fournis par la formule (VIII.138) pour le cas de l'ébullition de l'eau

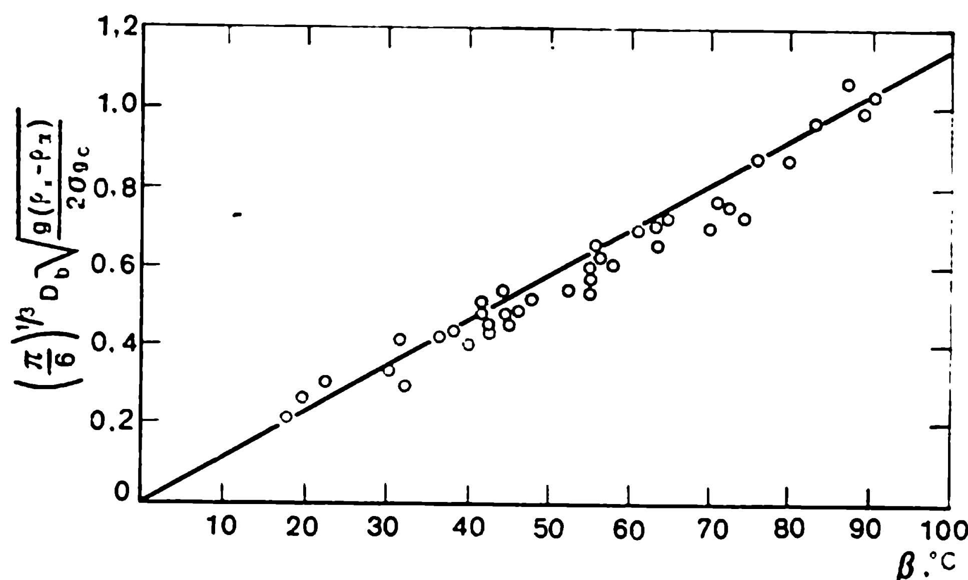


Fig. VIII.25. Relation entre le diamètre d'une bulle et l'angle de mouillage marginal

et de l'hydrogène sous pression atmosphérique. L'augmentation de la pression et de la charge thermique altère la correspondance des données d'expérience à la formule de Fritz. D'après les données de

N. Mamontova, l'accélération de la croissance des bulles entraîne l'augmentation du diamètre de leur détachement. Le résultat de ces expériences est visualisé sur la figure VIII.26. Ici la vitesse

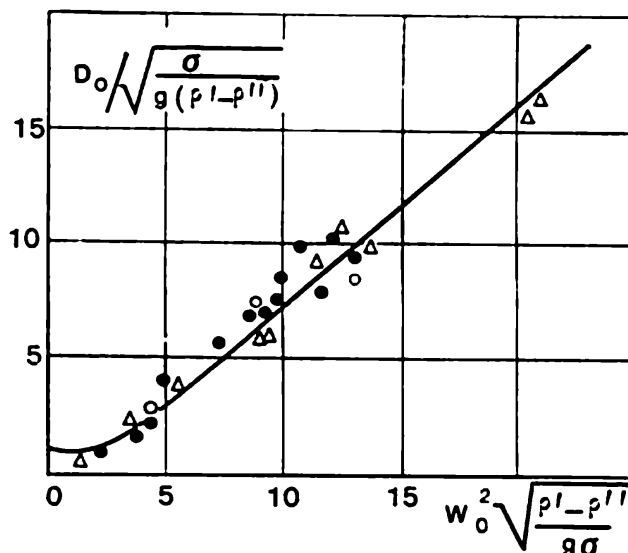


Fig. VIII.26. Relation entre D_0 et Fr d'après les données expérimentales de N. Mamontova:
● — eau; Δ — alcool; O — benzène

moyenne de la croissance des bulles figure dans le nombre de Froude sous la forme

$$w_0 = D_0 f/(1 - \psi), \tag{VIII.139}$$

où f est la fréquence de la formation des bulles dans le centre donné; Ψ, le coefficient qui rend compte du temps de contournement de la surface de chauffe par le liquide lorsqu'elle ne porte pas de bulles. La figure VIII.26 implique que la relation entre $\bar{D}_0$ et Fr est linéaire pour des nombres de Froude assez grands. Il convient de noter que le diamètre de détachement de la bulle est essentiellement une grandeur statistique. Les résultats des observations doivent donc être analysés à la lumière de ce fait.

La fréquence de détachement des bulles de la surface de chauffe s'écrit

$$f = 1/(\tau_{cr} + \tau_{cont}), \tag{VIII.140}$$

où τ_{cr} est la durée de la croissance da la bulle à la surface de chauffe; τ_{cont}, la durée du contournement de la surface par le liquide entre le détachement d'une bulle et la naissance de la bulle suivante.

D'après les dernières données expérimentales, la grandeur $D_0 f$ ne dépend pas de la charge thermique, de la viscosité du liquide, du matériau de la surface de chauffe, et diminue avec l'augmentation de la pression. En particulier, pour l'utilisation de l'eau à la

pression atmosphérique, d'après les données de A. Toloubinski, la grandeur $D_0f = 560$ m/h.

Il existe deux lois limites qui décrivent la remontée d'une bulle de vapeur unitaire dans un grand volume de liquide:

a) avec le nombre $\mathrm{Re} = \frac{2Rw_v}{\nu} < 2$ pour un liquide soigneusement purifié, d'après la formule d'Adamard-Rybtchinski,

$$w_v = \frac{2g(\rho_l - \rho_v)R^2}{3\mu} \frac{1 + \mu_v/\mu_l}{2 + 3\mu_v/\mu_l}, \qquad \text{(VIII.141)}$$

pour un liquide techniquement pur, d'après la formule de Stokes,

$$w_v = \frac{2g(\rho_l - \rho_v)}{9\mu} R^2; \qquad \text{(VIII.142)}$$

b) avec $\mathrm{Re} > 3\ \mathrm{Ar}$, où

$$\mathrm{Ar} = \frac{g}{\nu^2}\left[\frac{\sigma}{\rho_l - \rho_v}\right]^{3/2}\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right),$$

d'après la formule de Frank-Kaménetski

$$w_v = 1{,}18\left[\frac{g\sigma(\rho_l - \rho_v)}{\rho_l^2}\right]^{0,25}. \qquad \text{(VIII.143)}$$

Si on admet que la vitesse de la croissance d'une bulle à la surface de chauffe est égale à la vitesse de la remontée de la bulle dans un grand volume, alors pour ce domaine d'ébullition d'un liquide on a

$$D_0f = \frac{\tau_{cont}}{\tau_{cr} + \tau_{cont}} 1{,}18\left[\frac{\sigma g(\rho_l - \rho_v)}{\rho_l^2}\right]^{0,25}. \qquad \text{(VIII.144)}$$

Jacob a admis que $\tau_{cr} = \tau_{cont}$; donc

$$D_0f = 0{,}59\left[\frac{\sigma g(\rho_l - \rho_v)}{\rho_l^2}\right]^{0,25}. \qquad \text{(VIII.145)}$$

Dans le domaine des surchauffes relativement peu grandes les expériences confirment cette relation.

4. Mécanisme de l'échange de chaleur dans l'ébullition nucléée d'un liquide

L'ébullition d'un liquide à la surface de chauffe est un processus très compliqué et pour l'échange de chaleur dans ces conditions il n'existe pas actuellement de théorie rigoureuse. L'intensité de cet échange de chaleur est influencée par un grand nombre de facteurs variés (pression, surchauffe de la paroi, rugosité de la surface, angle marginal de mouillage, hauteur de la couche du liquide bouillonnant, tension superficielle, propriétés thermophysiques du matériau

de la surface de chauffe, vitesse du mouvement forcé du liquide en ébullition, etc.). Il est impossible de prendre en compte tous ces facteurs; il existe donc actuellement de nombreuses approches de la description de l'échange de chaleur par convection lors de l'ébullition d'un liquide. Ces approches sont fondées sur des modèles physiques différents, dont les auteurs ont appliqué telles ou telles restrictions et simplifications.

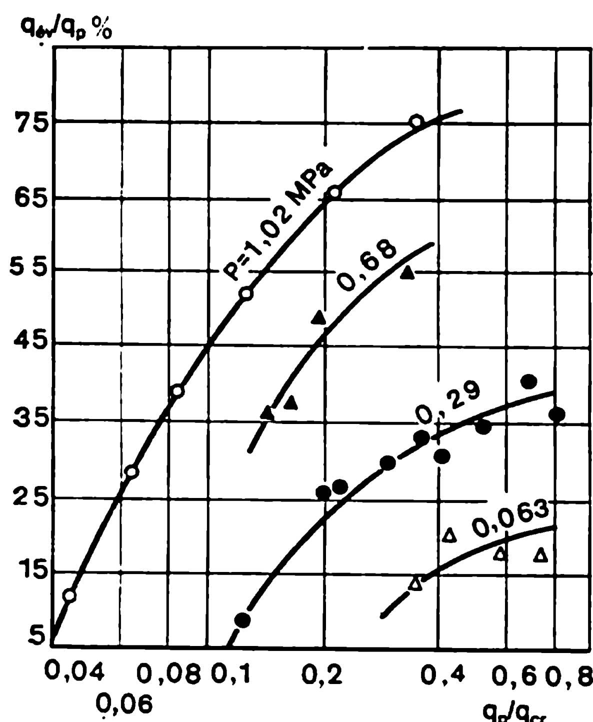


Fig. VIII.27. Relation entre la part du flux thermique absorbée par la formation de la vapeur et q_p/q_{cr}

Comme le montrent les expériences, la quantité de chaleur transmise directement aux bulles pendant leur croissance à la surface de chauffe est relativement peu grande par rapport à sa quantité totale amenée à la surface.

Cette circonstance a permis à plusieurs auteurs (Koutateladzé, Kroujiline, Foster, Jacob, etc.) d'avancer l'hypothèse suivant laquelle la cause principale de l'échange thermique intense dans l'ébullition est la turbulisation de la couche limite du liquide par les bulles qui se forment à la surface de chauffe. D'après ce schéma, les bulles qui croissent à la surface de chauffe rejettent les couches de liquide surchauffé dans le volume principal, alors que la place des bulles détachées viennent prendre des portions de liquide froid. Ces deux processus contribuent à l'intensification de l'échange de chaleur.

Toutefois, plusieurs faits d'expérience infirment le modèle physique décrit. Par exemple, la mesure de la température de la paroi directement sous le centre de vaporisation actif avec photographie simultanée de la bulle a montré que dans la période de la croissance à la surface de chauffe la température de la paroi diminue, et après le détachement de la bulle, elle augmente. Cette allure de la variation de la température de la paroi dans le temps ne s'accorde pas avec celle qui devrait avoir lieu d'après le modèle décrit ci-dessus.

La mesure directe de la part relative de la chaleur absorbée par la vaporisation, réalisée dans une large marge de la variation des paramètres (fig. VIII.27), montre que dans le bilan général de la chaleur la croissance de la chaleur et de la charge thermique défi-

nissent une augmentation importante de la part de la chaleur de vaporisation.

Une autre hypothèse expliquant l'intensité élevée de l'échange thermique lors de l'ébullition d'un liquide est fondée sur l'idée que la vaporisation de la microcouche du liquide sous la bulle pendant sa croissance est très intense. D'après cette hypothèse, la diminution de la température de la paroi sous la bulle de vapeur s'explique par la vaporisation intense et, respectivement, par le refroidissement du microfilm. Une fois la bulle détachée des couches de liquide surchauffé se déplacent vers le centre de vaporisation et la température de la paroi commence à croître jusqu'à la valeur critique, à laquelle le centre de vaporisation devient actif.

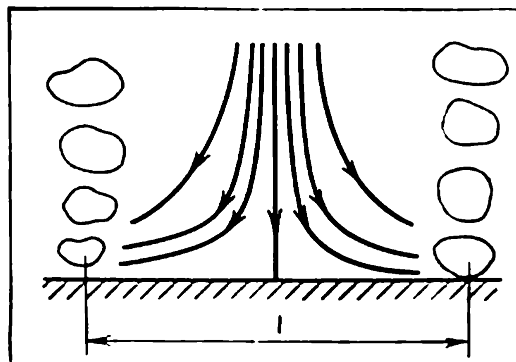


Fig. VIII.28. Echange de chaleur schématisé dans l'ébullition nuclée

Dans le domaine des charges thermiques et des pressions relativement peu grandes, la densité globale du flux thermique est proportionnelle au flux thermique absorbé par la vaporisation à la surface. Ceci est dû à la turbulisation de la couche limite, proportionnelle au volume et à la quantité des bulles de vapeur qui se forment à la surface de chauffe. D'après le modèle de S. Koutatéladzé et A. Léontiev [19], dans ces conditions l'intensité de l'échange de chaleur est définie par la circulation du liquide dans les cellules entre les centres de vaporisation en action (fig. VIII.28). Au voisinage de ces centres une partie du liquide s'évapore en bulles de vapeur, alors que la masse principale du liquide adhérente à la paroi est entraînée par les bulles croissantes à la surface de chauffe, qui montent dans le volume. A la place du liquide entraîné et vaporisé arrivent des portions fraîches à partir du volume principal, ce qui crée une circulation intense du liquide, qui détermine le renforcement du transfert de chaleur. L'écoulement du liquide entre les centres de vaporisation peut être identifié au contournement d'une partie quelconque d'un corps à bout obtus, et l'échange de chaleur par convection peut se calculer d'après les formules du chapitre VI.

Le débit du liquide sous-coulant est proportionnel à la quantité de la vapeur formée à la surface de chauffe; il est de l'ordre

$$J_1 = \frac{q_r}{r}(1+\xi), \qquad \text{(VIII.146)}$$

où q_r est le flux absorbé par la vaporisation pendant la durée de la bulle; ξ, le coefficient qui rend compte de la masse de liquide en-

traînée en circulation. Pour des bulles sous forme de champignons, $\xi = 10$.

Pour le domaine où $q_r = q_\Sigma = \text{const}$, on peut écrire

$$w_l = C_1 \frac{q_\Sigma}{\rho_l r} \frac{1+\xi}{1-\varphi}, \qquad \text{(VIII.147)}$$

où w_l est la vitesse du liquide qui se déplace vers la paroi; φ, le contenu volumique de la vapeur dans la couche biphasée ahérente à la paroi.

L'échange de chaleur par convection au voisinage d'un point d'attaque se calcule d'après l'équation (cf. chapitre VI)

$$\text{Nu} = C_2 \text{Re}^{0,5} \text{Pr}^n, \qquad \text{(VIII.148)}$$

où

$$\text{Nu} = \frac{q_\Sigma l}{(\lambda \Delta T)}; \quad \text{Re} = \frac{w_l l}{\nu_l}; \quad \text{Pr} = \frac{\nu_l}{a_l}.$$

Comme dimension caractéristique on retient la distance moyenne entre les centres de vaporisation.

La quantité moyenne des centres de vaporisation en action dans les conditions thermiques fixées doit être déterminée aussi bien pour des caractéristiques d'adhésion (mouillabilité locale θ_0), que par le relief de la surface. En imitant D. Labountsov, admettons que dans les conditions de mouillage macroscopique ($\Theta_0 < \pi/2$) le nombre de centres d'ébullition en action doit être proportionnel à la quantité moyenne des évidements et des cavités par unité de surface n_p et dont les dimensions sont commensurables avec l_0 critique. En première approximation on peut admettre que

$$n_p \sim l_0^{-2}. \qquad \text{(VIII.149)}$$

Compte tenu de la formule (VIII.110), on a

$$n_F = C \left[\frac{r \rho_v \Delta T}{\sigma T_{sat}} \right]^2. \qquad \text{(VIII.150)}$$

D'après les données expérimentales, on peut adopter $C = 7{,}5 \cdot 10^{-8}$. En posant qu'en moyenne les centres de vaporisation sont répartis régulièrement suivant la surface de chauffe, on obtient

$$l = n_F^{-0,5} \sim \left[\frac{\sigma T_{sat}}{r \rho_v \Delta T} \right]. \qquad \text{(VIII.151)}$$

Maintenant, en tenant compte de (VIII.147) et (VIII.151),

$$\frac{\alpha \sigma T_{sat}}{\lambda r \rho_v \Delta T} = C_2 \left[\frac{q_\Sigma (1+\xi) \sigma T_{sat}}{r^2 (1-\varphi) \mu \rho_v \Delta T} \right]^{0,5} \text{Pr}^n. \qquad \text{(VIII.152)}$$

Il est commode de mettre (VIII.152) sous la forme

$$\mathrm{Nu}_* = C_1 \mathrm{Re}_*^{2/3} \mathrm{Pr}^{0,6}, \qquad \text{(VIII.153)}$$

où

$$\mathrm{Nu}_* = \alpha l_*/\lambda; \ \mathrm{Re}_* = q l_*/(r\mu);$$
$$\mathrm{Pr} = \nu/a; \ l_* = \sigma T_{\mathrm{sat}} c_p/\rho_v r^2.$$

La formule (VIII.153) entraîne que

$$\alpha \sim q^{2/3} \sim \Delta T^2 \sim \sigma^{-0,33}. \qquad \text{(VIII.154)}$$

Ces relations théoriques correspondent assez bien aux données d'expérience (fig. VIII.29 à VIII.31). La figure VIII.32 généralise les données expérimentales de l'ébullition des liquides dans des conditions différentes, compte tenu de la relation proposée dans la région des pressions et charges thermiques relativement faibles. Avec la poussée de la pression et des charges thermiques la restriction principale du modèle décrit $q_n \neq q_\Sigma = \mathrm{const}$ est violée, et l'apport de la chaleur de vaporisation q_r dans le flux thermique global devient essentiel. Pour ces conditions le modèle proposé par D. Labountsov donne un résultat assez bon.

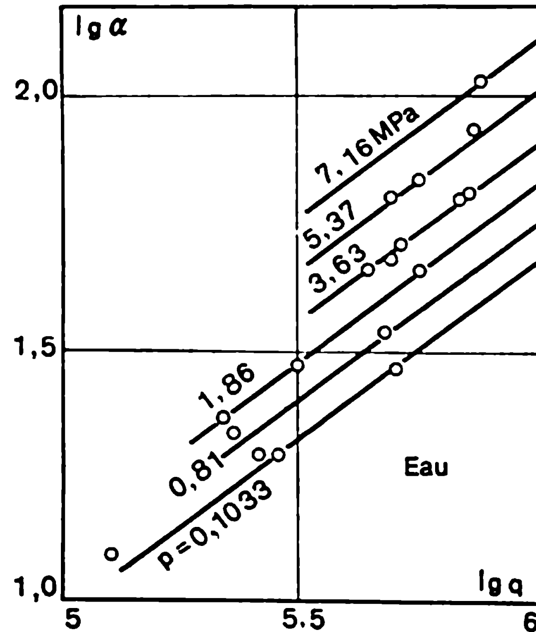


Fig. VIII.29. Relation entre le coefficient de transmission de chaleur et la densité du flux thermique sous des pressions différentes (pour l'eau)

D'après son schéma, l'évaporation du liquide dans la bulle croissante à la surface de chauffe se produit sous l'effet de la chaleur qui, par la couche de liquide adhérente à la paroi, est amenée par conductivité thermique de la surface de chauffe à la base de la bulle. Labountsov propose de donner une estimation quantitative du processus. Il considère que la densité du flux thermique est une somme de deux flux thermiques, dont l'un est transmis par conductivité à travers la microcouche, à la masse du liquide, et l'autre est débité par vaporisation dans la bulle. De la sorte

$$q = 10^{-3} \frac{\lambda^2 \Delta T^3}{\sigma T_{\mathrm{sat}} \nu} + 5 \frac{\lambda r \rho_v \Delta T^2}{\sigma T_{\mathrm{sat}}}. \qquad \text{(VIII.155)}$$

Il existe encore plusieurs autres approches pour évaluer l'intensité de l'échange de chaleur dans l'ébullition, fondées sur le traitement des critères fournis par les expériences.

G. Kroujiline avance l'hypothèse théorique suivant laquelle lors de l'ébullition la chaleur dégagée par la surface de chauffe n'est transmise qu'à la phase liquide qui s'évapore dans la bulle ascendante. Le liquide se vaporise également à partir de la surface libre.

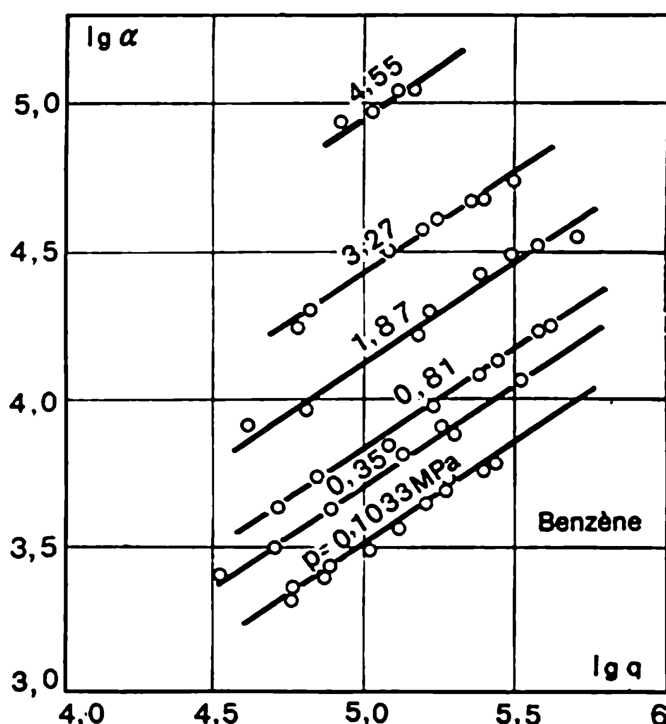


Fig. VIII.30. Relation entre le coefficient de transmission de chaleur et la densité du flux thermique sous des pressions différentes (pour le benzène)

L'efficacité du transfert de chaleur au liquide dépend de son mouvement et du brassage près de la surface de chauffe et dans le volume; elle est liée à la fréquence de détachement des bulles et à la quantité des centres de vaporisation. L'estimation quantitative du transfert de chaleur pendant l'ébullition se calcule d'abord pour une bulle, puis on prend en considération le nombre de centres de vaporisation. La formule résultante s'écrit

$$\mathrm{Nu}=0{,}082\ \mathrm{Pr}^{-0,45}\mathrm{Kq}^{0,7}\mathrm{Ku}^{1/3}, \qquad \text{(VIII.156)}$$

où $\mathrm{Kq}=\frac{q\rho_l l^2}{\lambda\sigma}\frac{\rho_l-\rho_v}{\rho_l}$ est le critère déterminé par le nombre de centres de vaporisation; $\mathrm{Ku}=\frac{c_l\sigma}{r\rho_l l}\frac{\rho_l}{\rho_v}\frac{\rho_l}{\rho_l-\rho_v}$, le critère défini par la fréquence de détachement des bulles; $l=\left[\frac{\sigma}{g(\rho_l-\rho_v)}\right]^{0,5}$.

V. Toloubinski a proposé la relation empirique de la forme

$$\mathrm{Nu} = 54\mathrm{K}^{0,6}\mathrm{Pr}^{-0,3}, \qquad \text{(VIII.157)}$$

où

$$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha}{\lambda}\left[\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_v)}\right]^{0,5}; \quad \mathrm{K} = \frac{q}{rg\rho_v D_0 f}; \quad D_0 = 2\,\frac{\theta}{f}\left[\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_v)}\right]^{0,5}$$

est le diamètre de détachement de la bulle pour des liquides différents (sauf l'eau) sous pression atmosphérique; f, la fréquence de détachement des bulles.

La littérature américaine s'adresse souvent à la formule de Rosenow, obtenue par exploration de l'échange de chaleur lors de l'ébullition de l'eau distillée sur un fil de platine

$$\mathrm{Nu}_* = \frac{1}{C_*}\,\mathrm{Re}_*^{0,667}\mathrm{Pr}_*^{-0,7}, \qquad \text{(VIII.158)}$$

où $\mathrm{Nu}_* = \alpha l_*/\lambda_l$ est le nombre de Nüsselt des bulles (rapport du flux thermique dû au transfert de chaleur par ébullition au flux

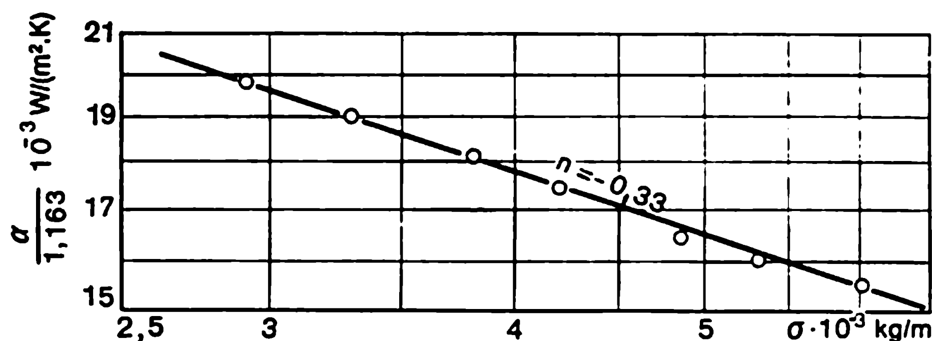


Fig. VIII.31. Influence de la tension superficielle sur le transfert de chaleur dans l'ébullition de l'eau

thermique dû à la conductivité thermique du film de liquide qui entoure la bulle); $\mathrm{Re}_* = \frac{q}{\mu_l r}\,l_*$ (le nombre de Reynolds des bulles) est le rapport de la force d'inertie de la bulle à la force de viscosité du liquide, qui définit l'intensité du brassage du liquide sous l'effet du déplacement des bulles; $l_* = \left[\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_b)}\right]^{0,5}$; Pr_l, le nombre de Prandtl du liquide; C_*, la constante empirique qui dépend de la propriété du matériau de la surface de chauffe et de la combinaison liquide-surface.

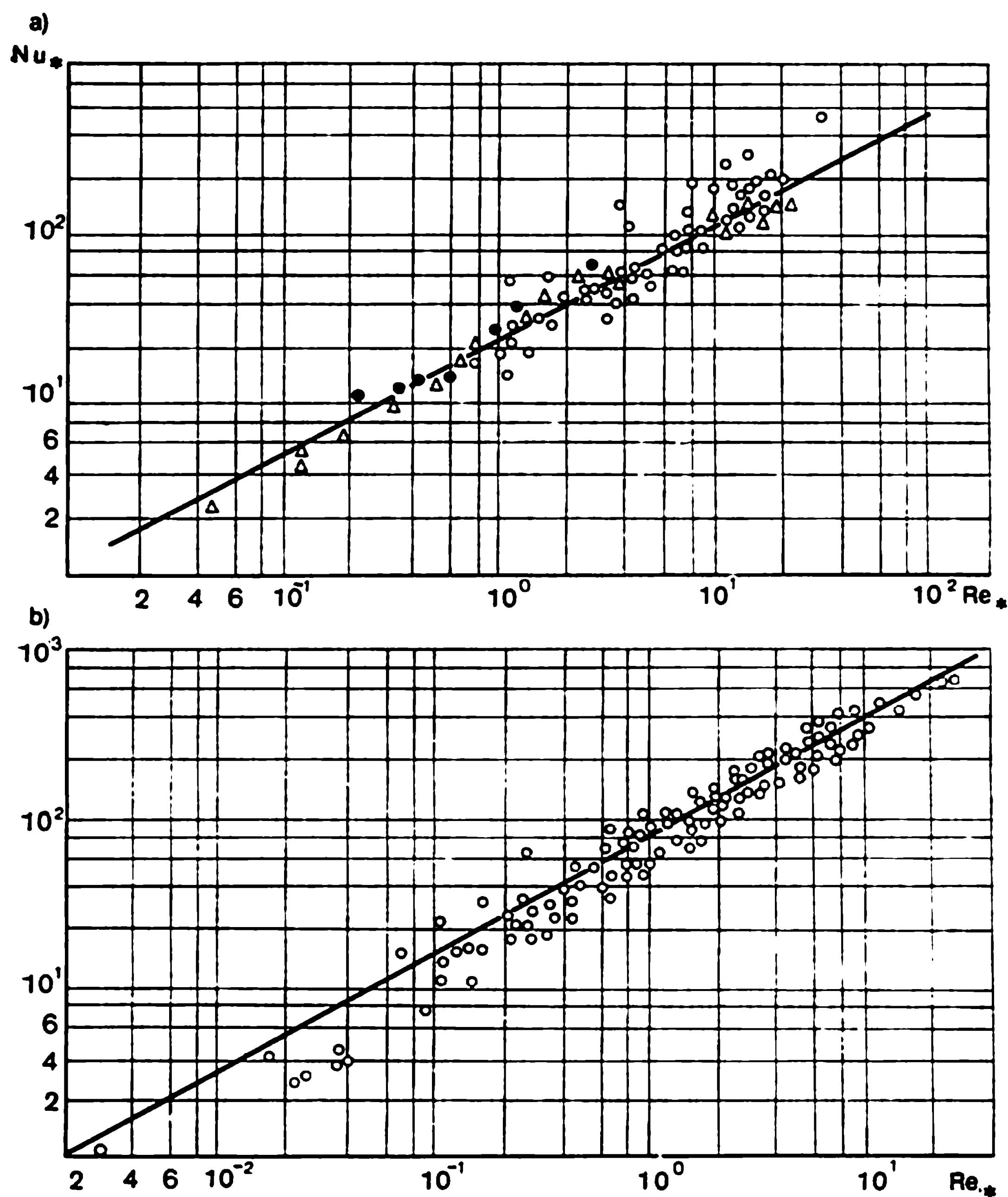


Fig. VIII.32. Généralisation des données expérimentales sur l'ébullition:
a — Δ — eau; ○ — alcool; ● — phréon-12; *b* — hydrocarbures saturés

Forster et Zuber proposent de calculer l'échange de chaleur lors de l'ébullition du *n*-pentane, de l'éthanol, de l'eau et du benzène d'après la formule

$$Nu = 0{,}0015 Re^{0{,}62} Pr^{1/3}, \qquad \text{(VIII.159)}$$

où

$$\mathrm{Nu}=\frac{Rq}{\lambda\Delta T}; \quad R=\left[\frac{C_l\rho_l\Delta T\ \sqrt{\pi a_l}}{r\rho_b}\right]\left(\frac{2\sigma}{\Delta\rho}\right)^{0,5}\left(\frac{\rho_l}{\Delta\rho}\right)^{0,25};$$

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho_l}{\mu_l}\left[\frac{C_l\rho_l\Delta T\ \sqrt{\pi a_l}}{r\rho_b}\right]^2.$$

S. Koutatéladzé [18] considère qu'en analysant l'échange thermique de l'ébullition, les phénomènes relatifs à la phase liquide doivent être examinés séparément des phénomènes qui sollicitent la vapeur. Il suppose que dans le cas de l'ébullition nucléе le transfert de chaleur par la surface de chauffe peut marcher aussi bien dans le sens de la phase liquide que dans celui de la vapeur. En même temps, l'effet de transfert dans le sens du liquide est sensiblement plus intense que dans le sens de la vapeur (par suite de la faible conductivité thermique de cette dernière). La chaleur est donc absorbée par la surchauffe du liquide qui s'évapore en formant des bulles.

Pour une bulle unitaire de dimension donnée l'échange de chaleur et le mouvement sont décrits, suivant Koutatéladzé, par le système d'équations dont font partie:

l'équation de la conductivité thermique de la phase liquide

$$DT_l/d\tau=a_l\nabla^2T_l; \qquad \text{(VIII.160)}$$

l'équation du mouvement et de la continuité de la phase liquide

$$\rho_l Dw_l/d\tau=g\rho_l-\mathrm{grad}\ p_l+\mu_l\nabla^2 w_l \qquad \text{(VIII.161)}$$

l'équation du mouvement et de la continuité de la vapeur

$$\rho_v\frac{Dw_v}{d\tau}=g(\rho_l-\rho_v)-\mathrm{grad}\ p_v+\mu_v\nabla^2 w_v; \qquad \text{(VIII.162)}$$

$$\mathrm{div}\ w_v=0.$$

Les conditions d'interaction thermique à la frontière de séparation des phases sont

$$-\lambda\,(\partial T/\partial n)_{fr}=r\rho_v w_v;$$

$$T_{fr}=T_v+\frac{T_v(\rho_l-\rho_v)}{r\rho_l\rho_v}\left[\frac{2\sigma\rho_l}{R(\rho_l-\rho_v)}-\frac{\lambda}{r}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{fr}\left(\frac{2\pi p}{\rho_v}\right)^{0,25}\right]. \qquad \text{(VIII.163)}$$

Les conditions d'interaction mécanique à la frontière de séparation des phases

$$\mu_l(\partial w_l/\partial n)_{fr}=\mu_v(\partial w_v/\partial n)_{fr}; \quad (p_v)_{fr}=(p_l)_{fr}+\sigma(1/R_1+1/R_2);$$

$$(w_{xz_v})_{fr}=(w_{xz_l})_{fr}. \qquad \text{(VIII.164)}$$

Tableau VIII.4

Recommandations pour le calcul du coefficient de transmission de chaleur dans l'ébullition d'un liquide

Auteur	Formule de α
G. Kroujiline	$6{,}9\cdot 10^{-3}\dfrac{\lambda^{0,75}q^{0,7}}{\mu^{0,45}C_p^{0,12}T_{\text{sat}}^{0,37}}\left[\dfrac{r\rho_l}{\rho_l-\rho_v}\right]^{0,039}\left[\dfrac{g\rho_l}{\sigma}\right]^{0,333}$
V. Toloubinski	$1{,}82\dfrac{\lambda^{1,3}\rho_l^{0,2}\rho_v^{0,06}q^{0,6}}{r^{0,6}(\rho_v)_{1\,\text{bar}}^{0,66}g^{0,4}C_l^{0,3}\sigma^{0,5}\nu^{0,3}}$
Rohsenow	$C\dfrac{\Delta T^2\lambda^{5,1}[g(\rho_l-\rho_v)]^{0,5}}{\theta_0\sigma^{0,5}C_l^{2,1}r^2\mu_l^{4,1}}$
Forster et Zuber	$0{,}0012\dfrac{\Delta T^{0,24}\Delta p^{0,75}\lambda^{0,79}C_l^{0,45}\rho_l^{0,49}}{\sigma^{0,5}r^{0,24}\mu^{0,29}\rho_v^{0,24}}$
V. Borichanski	$384\left[\dfrac{p_{cr}^{1/3}}{T_{cr}^{5/6}\mu^{1/6}}\right]\left(\dfrac{p}{p_{cr}}\right)^{0,1}\left[1+4{,}64\left(\dfrac{p}{p_{cr}}\right)^{1,16}\right]q^{2/3}$
S. Koutatéladzé	$7\cdot 10^{-4}\dfrac{\lambda}{\sigma^{0,5}[g(\rho_l-\rho_v)]^{0,2}}\left(\dfrac{p_{\text{sat}}q}{rg\rho_v a}\right)^{0,7}\text{Pr}^{-0,35}$

Pour fermer le système d'équations on adopte l'échelle des bulles déjà formées et la distribution des centres de vaporisation suivant la surface

$$R_0\left[\frac{g(\rho_l-\rho_v)}{\sigma}\right]^{0,5}=f\left(\Theta;\ \frac{w^2}{gl_0}\right);\qquad \text{(VIII.165)}$$

$$\ldots\frac{\delta_i}{l_0}\ldots,\ n_i\ \ldots$$

Ce système d'équations permet d'obtenir les critères de similitude à l'aide desquels, en s'appuyant sur les données expérimentales Koutatéladzé propose la relation de calcul suivante

$$\text{Nu}_*=A\cdot\text{Pr}^{-0,35}(\text{Pe}^*\cdot\text{Kp})^{0,7},\qquad \text{(VIII.166)}$$

où

$$\text{Nu}_*=\frac{\alpha}{\lambda}\left[\frac{\sigma}{g(\rho_l-\rho_v)}\right]^{0,5};\quad \text{Pe}_*=\frac{q}{r\rho_v a}\left[\frac{\sigma}{g(\rho_l-\rho_v)}\right]^{0,5};$$

$$\text{Kp}=\frac{p_{\text{sat}}}{[\sigma g(\rho_l-\rho_v)]^{0,5}}.$$

Ces relations de similitude de différents auteurs (VIII.156) à (VIII.159), (VIII.166) peuvent être développées en formules de calcul consignées sur le tableau VIII.4.

5. Ebullition nuclée sous convection forcée

La vitesse du mouvement forcé d'un liquide dans un canal peut intervenir sensiblement dans l'intensité d'échange de chaleur de l'ébullition seulement dans le domaine de faibles flux thermiques.

Lorsque la densité du flux thermique augmente, les perturbations turbulentes du liquide provoquées par la formation de la vapeur à la surface de chauffe se renforcent et l'intensité du transfert de chaleur cesse pratiquement de dépendre de la vitesse du mouvement forcé du liquide.

Dans ce cas les lois de transfert de chaleur ne se distinguent pas de celles établies précédemment pour l'ébullition dans un grand volume.

Pour le calcul du coefficient de transmission de chaleur d'un courant forcé de liquide en ébullition on peut recommander la formule d'interpolation de S. Koutatéladzé [17]

$$\alpha/\alpha_0 = [1 + (\alpha_\infty/\alpha_0)^2]^{0,5} \qquad \text{(VIII.167)}$$

où α est le coefficient de transmission de chaleur vers le flux forcé du liquide bouillant; α_0, le coefficient de transmission de chaleur en absence d'ébullition défini d'après les formules du chapitre VI; α_∞, le coefficient de transmission de chaleur de l'ébullition dans un grand volume, défini par l'équation (VIII.153).

Lorsqu'un liquide bouillant se déplace dans un canal chauffé, la phase de la vapeur augmente et la phase liquide diminue en permanence. Pour un tube vertical on peut dégager trois tronçons caractéristiques (fir. VIII.33): *I*, domaine d'échauffement du liquide depuis la température initiale jusqu'à celle de saturation (tronçon d'économiseur); *II*, domaine d'ébullition du liquide (domaine de vaporisation) et *III*, domaine du séchage de la vapeur humide et de sa surchauffe *6*. Dans les premier et troisième tronçons, le coefficient de transmission de chaleur est déterminé par les lois de la convection dans un liquid emonophasé se déplaçant dans des tubes d'un mouvement forcé.

Lorsque le mélange vapeur-liquide se déplace dans le tronçon de vaporisation, on peut dégager dans le sens de la marche du mélange le domaine d'ébullition superficielle *2*, les régimes d'écoulement émulsionnel *3*, d'écoulement à bouchons *4* et annulaire *5* Avec le régime émulsionnel, le flux biphasé se compose de liquide et de petites bulles de vapeur reparties suivant son volume. A mesure que suivant la longueur du tube le titre de vapeur augmente, les petites bulles fusionnent en gros bouchons de vapeur commensurables avec le

diamètre du tube. Le titre de vapeur allant en augmentant, les bulles déjà grosses fusionnent en formant ce qu'on appelle le régime annulaire lorsqu'au noyau du courant se déplace une vapeur humide, alors que le liquide forme une couche mince près des parois du tube. En s'évaporant, cette couche *5* diminue progressivement. L'étendue de différents régimes d'écoulement du mélange vapeur-liquide dépend de la charge thermique, de la vitesse du mélange, des paramètres du liquide à l'entrée. L'augmentation de la vitesse, alors que la charge thermique, la longueur du tube et la température à l'entrée sont fixes, conduit à la diminution du tronçon à ébullition évoluée et l'allongement du tronçon économiseur. Lorsque la charge augmente, la vitesse gardant sa valeur, le processus est inversé : la longueur du tronçon de l'ébullition évoluée croît, alors que la longueur du tronçon économiseur *1* diminue.

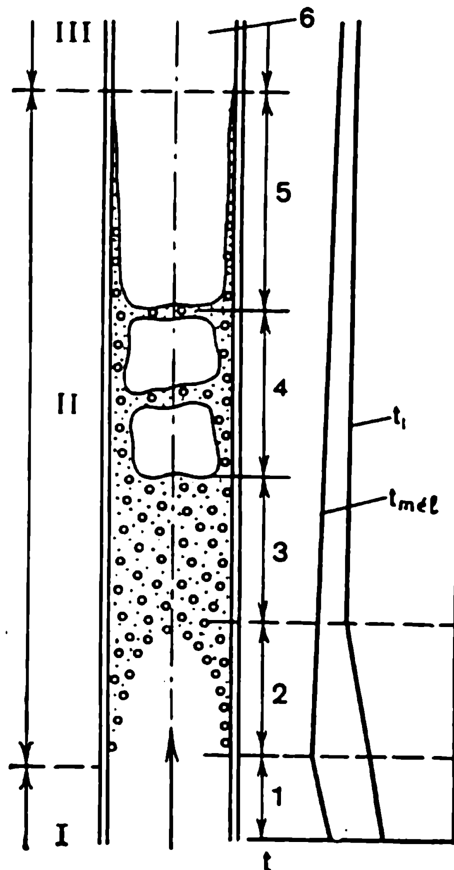


Fig. VIII.33. Structure du flux dans l'ébullition des liquides à l'intérieur d'un tube vertical

Dans le cas du déplacement d'un flux à deux phases à l'intérieur des tubes horizontaux ou faiblement inclinés, la structure du courant peut varier non seulement suivant la longueur, mais encore suivant la section du tube. Si la vitesse du liquide et le titre de vapeur sont relativement peu grands, on observe la stratification du courant en liquide et vapeur, cette dernière occupant la partie supérieure de la section du tube (fig. VIII.34). Avec l'augmentation de la vitesse et de la teneur en vapeur, le régime d'écoulement peut devenir annulaire. Toutefois, dans ce cas-là aussi la symétrie axiale ne sera pas complète.

L'intensité de l'échange de chaleur par convection dans le domaine de vaporisation dépend du régime de l'écoulement du mélange vapeur-liquide, c'est-à-dire des caracteristiques du flux biphasé dans les tubes et les canaux.

Pour le flux biphasé on introduit les paramètres suivants:
Titre de vapeur du *débit massique*

$$x = G_v/G_{\text{mél}} = G_v/(G_l + G_v), \qquad \text{(VIII.168)}$$

où G_v est le débit massique de la vapeur; G_l, le débit massique du liquide; $G_{mél}$, le débit massique du mélange.

Dans le cas général x peut varier de zéro (seul liquide) à l'unité (seule vapeur).

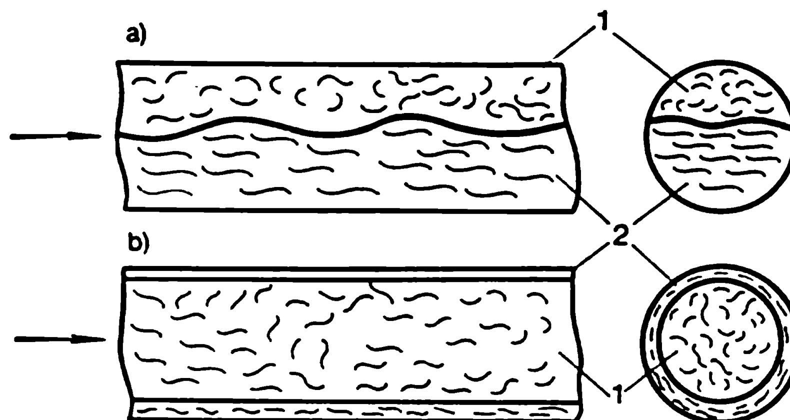


Fig. VIII. 34. Structure du flux vapeur-eau dans l'ébullition du liquide à l'intérieur d'un tube horizontal:

a — régime d'ébullition stratifié; *b* — régime annulaire; *1* — vapeur; *2* — liquide

Aux débits massiques G_l et G_v correspondent les débits volumiques

$$V_l = G_l/\rho_l; \quad V_v = G_v/\rho_v.$$

Leur somme s'appelle débit volumique du mélange

$$V_{mél} = V_l + V_v.$$

A la différence du débit massique, le débit volumique du mélange varie suivant la longueur du tube. Dans le cas de l'évaporation totale du liquide le débit volumique augmente de ρ_l/ρ_v fois; sous de faibles pressions la vitesse du flux augmente donc sensiblement le long du tube. A l'entrée du tube ($x = 0$) la vitesse du liquide est dite de circulation.

Titre de vapeur du *débit volumique*

$$\beta = V_v/V_{mél} = V_v/(V_l + V_v). \tag{VIII.169}$$

Les paramètres x et β sont liés par la relation évidente:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\rho_v}{\rho_l}\,\frac{\beta}{1-\beta}.$$

Pour $x = 0$, $\beta = 0$, et pour $x = 1$, $\beta = 1$. Dans le domaine restant $x < \beta$, puisque $\rho_v/\rho_l < 1$.

Titre de vapeur *volumique vrai*

$$\varphi = f_v/f = f_v/(f_l + f_v), \tag{VIII.170}$$

où f_l est l'aire de la section droite du tube couverte par le liquide; f_v, l'aire de la section droite du tube couverte par la vapeur.

Dans la section donnée du tube les vitesses réelles du liquide et de la vapeur se calculent d'après les relations

$$w_v = V_v/f_v = V_v/(\varphi f); \quad w_l = V_l/f_l = V_l/[(1 - \varphi) f].$$

On appelle vitesses réduites de la vapeur et du liquide les quantités

$$w_{v.réd} = V_v/f; \quad w_{l.réd} = V_l/f.$$

La somme des vitesses réduites de la vapeur et du liquide caractérise la vitesse vraie du mélange

$$w_{mél} = w_{v.réd} + w_{l.réd} = (V_v + V_l)/f.$$

La différence des vitesses vraies de la vapeur et du liquide s'appelle vitesse de glissement

$$u_{gl} = w_v - w_l.$$

La vitesse de glissement peut être aussi bien positive (dans les tubes verticaux pour l'écoulement ascendant) que négative (dans les tubes verticaux pour l'écoulement descendant).

Pour $u_{gl} = 0$, $w_l = w_v$ et $\varphi = \beta$.

Dans les calculs d'échange de chaleur la caractéristique essentielle du flux biphasé est l'enthalpie du mélange $i_{mél}$ qui se calcule d'après l'équation du bilan thermique

$$Q = G\,(h_{mél} - h_{sat}).$$

Si le liquide à l'entrée du tube est chauffé jusqu'à la température de saturation, toute la chaleur amenée est absorbée par la vaporisation, c'est-à-dire

$$Q = rG.$$

Par conséquent, pour ce cas

$$G_v/G_{mél} = x = (h_{mél} - h_{sat})/r. \qquad \text{(VIII.171)}$$

La figure VIII.35 visualise la relation entre le coefficient de transmission de chaleur et le titre de vapeur du débit massique x.

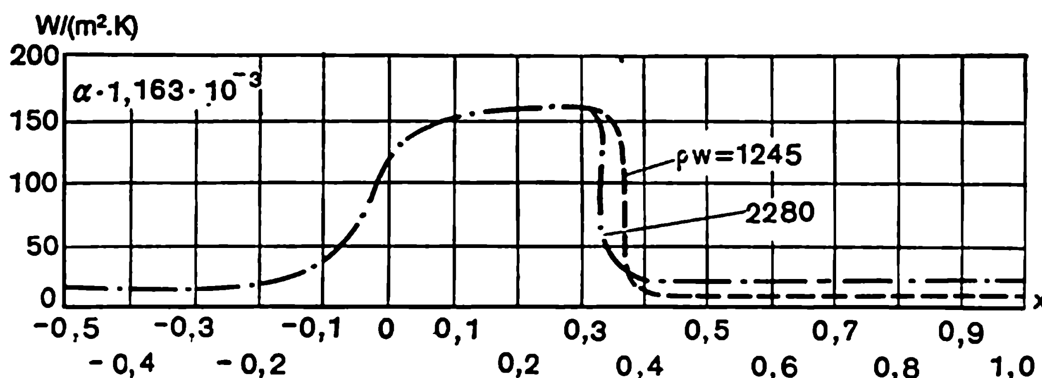


Fig. VIII.35. Relation entre le coefficient de transmission de chaleur et le paramètre x

Le domaine d'échauffement du liquide, compte tenu ge la dernière équation, correspond aux valeurs de $x = -0{,}2$. Avec $x = -0{,}2$ débute l'ébullition superficielle. Avec $x = 0$ celle-ci se transforme en ébullition volumique, et lorsque $x = 0{,}3$ à $0{,}4$, le coefficient de transmission de chaleur atteint sa valeur maximale. Ce domaine

correspond au régime d'écoulement annulaire pour lequel la résistance thermique est concentrée surtout dans le film liquide mince adhérant à la paroi du tube chauffé.

Avec l'augmentation ultérieure de x on observe une altération brusque du transfert de chaleur, ce qui s'explique par la destruction du film liquide.

L'équation (VIII.167) proposée pour le calcul du coefficient de transmission de chaleur lors de l'ébullition d'un liquide dans des tubes, est délimitée par la valeur de $\beta < 0,7$.

6. Densités critiques du flux thermique

La figure VIII.16 montre que sous des charges thermiques définies et des chutes de températures $T_p - T_{sat} = \Delta T$ qui leur correspondent, le coefficient de transmission de chaleur atteint la valeur maximale, pour diminuer brusquement ensuite. A cet instant l'ébullition nucléée caractérisée par un transfert de chaleur intense se transforme en ébullition en film, lorsque le liquide est séparé de la surface de chauffe par un film de vapeur. La valeur de la charge thermique qui correspond à cette transformation s'appelle première densité critique du flux thermique $q_{cr\,1}$. D'après les expériences, sa valeur dépend de nombreux facteurs (genre du liquide bouillant, pression, accélération du champ des forces massiques, état de la surface et conditions de son mouillage, etc.). Le calcul de la relation entre la charge thermique critique et les paramètres dénombrés est d'un intérêt exceptionnel pour les calculs dans la technique thermique du fait que lorsque la charge thermique dépasse brusquement sa valeur critique, la température de la surface de chauffe croît brusquement, ce qui s'accompagne dans la plupart des cas de la destruction (fusion ou brûlure) de l'échangeur. Les résultats les plus efficaces de généralisation des données expérimentales sur les flux thermiques critiques sont fournis par la théorie hydrodynamique des crises d'ébullition établie par Koutateladzé [17]. D'après cette théorie, « le régime d'ébullition en film apparaît par suite de la perturbation de la stabilité de la structure de la couche limite bi-

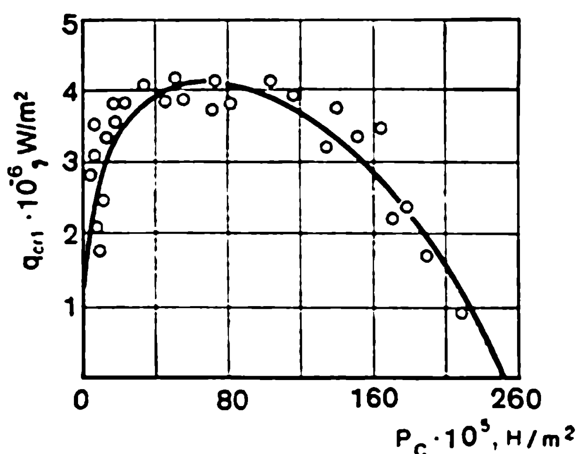


Fig. VIII.36. Relation entre la première densité critique du flux thermique et la pression lors de l'ébullition dans un grand volume

phasée qui a eu lieu lors de l'ébullition nuclée précédant cette reconstruction ». Supposons que la vitesse critique de la vapeur, caractéristique de la crise d'ébullition, dépend de la relation entre les forces ascendantes, la tension superficielle et les forces d'inertie de la vapeur. Alors,

$$u_{cr.\,v} = \varphi\,(\rho_l - \rho_v),\ (\sigma),\ (\rho_v/g). \qquad \text{(VIII.172)}$$

En vertu du théorème π, dans ce cas le processus est défini par l'unique critère de similitude

$$K_1 = \frac{u_{cr.v}\sqrt{\rho_v}}{\sqrt[4]{\sigma g\,(\rho_l - \rho_v)}}. \qquad \text{(VIII.173)}$$

La vitesse de la vapeur

$$u_{cr.v} = q_{cr\,1}/(r\,\rho_v). \qquad \text{(VIII.174)}$$

Donc,

$$K_1 = \frac{q_{cr\,1}}{r\sqrt{\rho_v}\,\sqrt[4]{\sigma_g\,(\rho_l - \rho_v)}}. \qquad \text{(VIII.175)}$$

Les expériences sur l'ébullition des caloporteurs non métalliques, réalisées dans des conditions variées, ont confirmé les conclusions

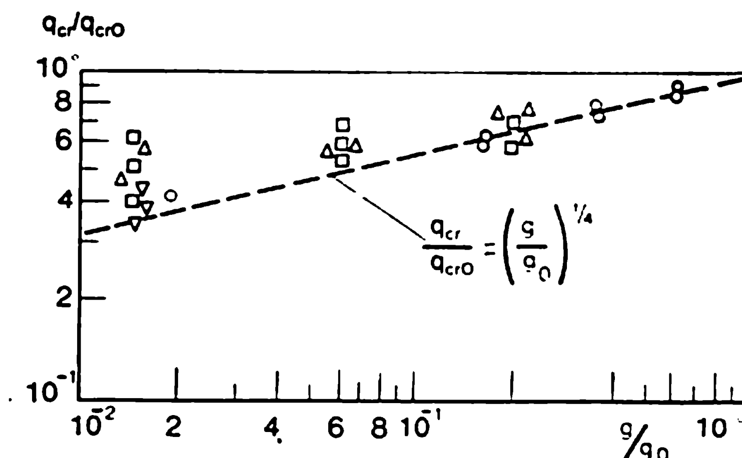


Fig. VIII.37. Flux thermique critique de l'eau et de l'éthanol sous une gravitation affaiblie:

○ — azote liquide; □ — eau; △ — éthanol; ▽ — solution de 60 % de sucre dans l'eau

principales de la théorie des crises hydrodynamiques. D'après ces expériences, la valeur du critère K_1 s'échelonne de 0,13 à 0,16.

La figure VIII.36 visualise l'influence de la pression sur la grandeur $q_{cr\,1}$ lors de l'ébullition de l'eau dans un grand volume. La courbe correspond au calcul d'après la formule (VIII.175) pour $K_1 = 0{,}14$. La figure VIII.37 illustre les résultats des expériences sur l'action exercée par la gravitation sur la valeur de la première

charge thermique critique. D'après la courbe, dans tout le domaine des accélérations envisagé de 0,01 à 2 500 g, la proportionnalité $q_{cr1} \backsim \sqrt[4]{g}$ est observée, ce qui correspond à l'équation (VIII.175).

La deuxième crise d'ébullition définit la transition de l'ébullition en film à l'ébullition nucléе, et s'accompagne de la destruction du film de vapeur à la surface de chauffe. On peut admettre que dans ce cas la valeur de la charge thermique critique est définie par l'équation (VIII.175), mais la différence entre les structures initiales de la couche limite biphasée fait que la grandeur K_2 doit différer de K_1. D'après les données expérimentales disponibles, pour une convection naturelle dans un grand volume $K_2 \cong 0{,}2\ K_1$.

Les expériences montrent que la vitesse du déplacement forcé d'un liquide influe sensiblement sur la valeur de la ptemière charge thermique critique. On peut admettre que la mesure de cette influence sur l'échange de chaleur et la charge critique est donnée par le nombre modifié de Froude

$$Fr_l = w_{l\,red} \sqrt[4]{(\rho_l - \rho_v)/(g\sigma)}.$$

Pour $Fr_l \to 0$, la convection est naturelle; avec $Fr_l \gg 1$, pour tous les processus le paramètre essentiel est l'énergie cinétique de la phase liquide.

Considérons la naissance d'une crise sur une plaque contournée longitudinalement par un courant de liquide porté à la température de saturation. Pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds (cf. chapitre IV), l'épaisseur de la couche limite diminue dans le sens inversement proportionnel à la vitesse du courant prise à la puissance proche de l'unité, alors que le diamètre de détachement des bulles est inversement proportionnel au carré de cette vitesse. Par conséquent, pour $Fr_l \gg 1$

$$D_0/\delta \backsim (w_l)^{-1},$$

c'est-à-dire dans le domaine de grandes vitesses d'écoulement des conditions sont possibles dans lesquelles les bulles de vapeur seraient sensiblement plus petites que l'épaisseur de la couche limite turbulente. On peut supposer que la crise d'échange de chaleur survient à l'instant où le liquide entre les bulles de vapeur est chassé en faisant ainsi apparaître une couche de vapeur continue. Le film de vapeur est le plus stable lorsque le frottement entre le courant de liquide et le film de vapeur est minimal. Ces conditions sont analogues à celles de décollement de la couche limite à partir d'une surface perméable.

D'après le chapitre IV, l'insufflation critique se calcule suivant l'équation

$$j_{cr} = 2C_{f_0}\rho_0 w_0. \qquad \text{(VIII.176)}$$

Si le titre de vapeur de la couche biphasée adhérente à la paroi est φ_*, le courant réel du liquide à partir de la paroi, qui correspond à la couche limite repoussée

$$j_* = j_{cr} (1 - \varphi_*). \qquad \text{(VIII.177)}$$

Le courant j_* est produit par l'énergie cinétique de la vapeur générée, c'est-à-dire

$$j_*^2/\rho_l = \rho_v [q_{cr}/(\rho_* r \rho_v)]^2. \qquad \text{(VIII.178)}$$

Les équations (VIII.177) et (VIII.178) permettent de tirer la formule de Koutatéladzé-Léontiev [19]

$$q_{cr\,l} = 2Cf_0 \varphi_* (1 - \varphi_*) r w_l \sqrt{\rho_l \rho_v}, \qquad \text{(VIII.179)}$$

En fait, la relation entre q_{crl} et la vitesse d'écoulement du liquide w_l est d'une allure continue entre les valeurs limites définies par les formules (VIII.175) et (VIII.179). La formule d'interpolation la plus simple s'écrit

$$q_{cr\,l} = K_\infty r \sqrt{\rho_v} \sqrt[4]{\sigma g (\rho_l - \rho_v)} + K_0 r w_l \sqrt{\rho_l \rho_v}, \qquad \text{(VIII.180)}$$

où $K_\infty = 0,13$ et $K_0 = 0,0012$.

La valeur de la charge thermique critique peut varier sensiblement sous l'effet de la sous-chauffe du liquide par rapport à la température de saturation. L'influence de ce sous-chauffage peut se calculer d'après la formule de Koutatéladzé

$$q_{ch.\,cr} = q_{cr\,l} [1 + 0,065 (\rho_l/\rho_v)^{0,8} c_p \Delta T/r], \qquad \text{(VIII.181)}$$

justifiée pour $p = 0,1$ à 2 MPa; $c_p = \Delta T/r < 0,6$; $\rho_l \rho_v = 45$ à 1650. La théorie hydrodynamique traduit les traits les plus importants de la crise d'échange de chaleur lors de l'ébullition d'un liquide, bien qu'elle ne tienne pas compte de l'intervention de tous les facteurs éventuels.

Les expériences montrent qu'en plus des paramètres figurant dans l'équation de la théorie hydrodynamique [cf. (VIII.175)], la valeur de la charge thermique critique varie également sous l'action des facteurs tels que les propriétés physiques, l'épaisseur, la géométrie, les dimensions de la surface transmettrice de la chaleur et son orientation dans le champ gravifique, la distribution irrégulière du flux thermique suivant la longueur et le périmètre du tube ; les pulsations du flux biphasé ; le mode d'échauffement de la surface de chauffe; la présence de diverses impuretés, etc. La prise en compte rigoureuse de tous ces facteurs est actuellement impossible ; le plus efficace est donc d'introduire dans la relation principale de la théorie des crises hydrodynamiques des corrections empiriques correspondantes.

En généralisant les données expérimentales et compte tenu des conditions concrètes de certaines expériences, divers chercheurs

aboutissent aux formules de calcul qui rendent compte de quelques facteurs mentionnés ci-dessus. Certaines de ces recommandations peuvent être décrites par l'expression

$$q_{cr\,1}/r\rho_v = C\varphi_1 A. \qquad \text{(VIII.182)}$$

Ici

$$\varphi_1=\left[\frac{\sigma g^2(\rho_l-\rho_v)}{\rho_v^2}\right]^{1/4}\left(\frac{a}{g}\right)^{1/4},$$

où a est l'accélération et les valeurs de C et A sont données par le tableau VIII.5.

Tableau VIII.5

Recommandations pour le calcul des flux thermiques critiques

Auteur de la formule	C	A
Koutateladzé	0,16	1
Zouber	$\pi/24$	$[\rho_l/(\rho_l+\rho_v)]^{0,5}$
Borichanski	1	$0,13+4\left\{\frac{\mu_l^2[g(\rho_l-\rho_v)]^{0,5}}{\rho_l(\sigma g)^{3/2}}\right\}^{0,4}$
Chang et Snyder	0,145	$\left[\frac{\rho_l+\rho_v}{\rho_l}\right]^{0,5}$
Maysis et Berenson	0,18	$\left[\frac{\rho_l+\rho_v}{\rho_l\rho_v}\right]^{0,5}\frac{1}{\left[\left[1+2\left(\frac{\rho_v}{\rho_l}\right)\right]^{0,5}+\frac{\rho_v}{\rho_l}\right]\rho_v^{0,5}}$

Pour calculer q_{cr} d'après les données expérimentales on peut construire une courbe analogue à (VIII.182)

$$q_{cr\,2}/r\rho_v = C\varphi_2 \qquad \text{(VIII.183)}$$

où

$$\varphi_2=\left[\frac{\sigma g^2(\rho_l-\rho_v)^{1/4}}{\rho_l+\rho_v}\right]^{1/4}\left(\frac{a}{g}\right)^{1/4}.$$

Les grandeurs C sont recommandées par divers chercheurs et, vraisemblablement, sont déterminées par les conditions dans lesquelles les expériences ont été réalisées. Ainsi, Zouber et Tribus admettent que $C=0,09$ à $0,131$. Il existe également pour $q_{cr\,1}$ et $q_{cr\,2}$ d'autres relations de calcul.

7. Transfert de chaleur sous le régime d'ébullition en film

Ce régime est caractérisé par le fait que le liquide est séparé de la surface de chauffe par une couche de vapeur.

Considérons le régime d'ébullition en film sur une surface de chauffe verticale (fig. VIII.38). Admettons que jusqu'à la section $x = x_{cr}$ le mouvement de la vapeur dans le film est laminaire. Alors, l'équation du mouvement de la vapeur s'écrit

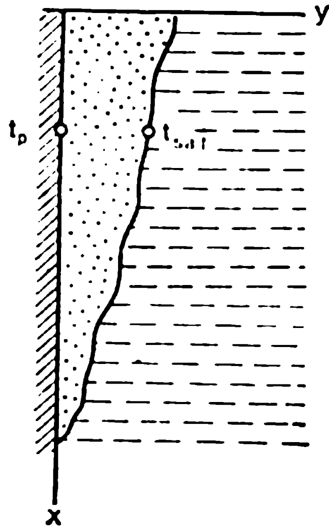


Fig. VIII.38. Ebullition en film sur une plaque verticale

$$\rho_v (\partial w/\partial \tau + w\, dw/dx) = -\partial p/\partial x + \\ + \mu \Delta^2 w - \rho_v g. \qquad \text{(VIII.184)}$$

L'épaisseur du film de vapeur étant petite par rapport aux dimensions de la paroi, les termes convectifs de l'équation (VIII.184) peuvent être négligés pour considérer que la vapeur se déplace sous l'action de la force ascensionnelle. Considérant les conditions d'écoulement stationnaire ($\partial w/\partial \tau = 0$) et retenant que $\partial p/\partial x = -\rho_l g$, on obtient

$$g (\rho_l - \rho_v) + \mu_v d^2w/dy = 0. \qquad \text{(VIII.185)}$$

L'intégration de cette dernière équation sous les conditions aux limites

$$y = 0, \ w = 0; \ y = \delta, \ w = w_{fr}, \qquad \text{(VIII.186)}$$

où δ est l'épaisseur de la couche de vapeur; w_{fr}, la vitesse du liquide à la frontière de séparation des phases, donne

$$w = w_{fr} \frac{y}{\delta} + \frac{g (\rho_l - \rho_v)}{2\mu_v} (\delta y - y^2). \qquad \text{(VIII.187)}$$

Lorsqu'on néglige les termes inertiels, l'équation de l'énergie du film de vapeur est de la forme

$$\lambda d^2 T/\partial y^2 = 0$$

ou

$$q = \frac{\lambda}{\delta} \Delta T. \qquad \text{(VIII.188)}$$

Pour le cas d'une charge thermique constante, tirons de l'équation du bilan de chaleur

$$qx = \rho_v \left(r + c_p \frac{T_p - T_{sat}}{2} \right) \int_0^\delta w_v \, dy. \qquad \text{(VIII.189)}$$

Considérons deux régimes limites de l'écoulement. Dans le premier cas, la masse du liquide qui contourne la plaque reste prati-

quement fixe $w_{fr}=0$. Dans le deuxième, toute la masse du liquide se déplace à la vitesse de la vapeur à la frontière de séparation des phases. Ceci est équivalent à la condition $(dw/dy)_{fr}=0$. Pour ces cas limites, la solution du système d'équations a été obtenue par Koutateladzé [17] sous la forme

pour $w_{fr}=0$

$$\delta=\sqrt[3]{\frac{12\mu_v qx}{\varphi r\rho_v g(\rho_l-\rho_v)}}; \qquad \text{(VIII.190)}$$

pour $(dw/dy)_{fr}=0$

$$\delta=\sqrt[3]{\frac{3\mu_v qx}{\varphi r\rho_v g(\rho_l-\rho_v)}}, \qquad \text{(VIII.191)}$$

où $\varphi=1+c_p\Delta T/(2r)$.

Le coefficient de transmission de chaleur global dans le domaine de l'ébullition en film se compose des coefficients de transmission de chaleur par convection et par rayonnement

$$\alpha_\Sigma=\alpha_c+\alpha_r.$$

Le coefficient de transmission de chaleur par convection local est en vertu de l'équation (VIII.188)

$$\alpha_x=\lambda_v/\delta. \qquad \text{(VIII.192)}$$

Compte tenu des formules (VIII.190) et (VIII.191), on obtient

$$\alpha_x=\beta\lambda_v\sqrt{\frac{\varphi r\rho_v g(\rho_l-\rho_v)}{\mu_v qx}}. \qquad \text{(VIII.193)}$$

où $\beta=0{,}436$ pour le premier régime, et $\beta=0{,}69$, pour le deuxième.

Le coefficient de transmission de chaleur moyen se calcule d'après la formule

$$\bar\alpha=\frac{1}{L}\int_0^L\alpha_x dx=\frac{3}{2}\alpha_x=L. \qquad \text{(VIII.194)}$$

D'une façon analogue on obtient la solution du cas $\Delta T=T_p-T_{sat}=\text{const}$. La formule de calcul définitive devient

$$\alpha_x=\beta_1\sqrt[4]{\frac{\lambda_v^3\varphi r\rho_v g(\rho_l-\rho_v)}{\mu_v\Delta Tx(1+\Psi)}}, \qquad \text{(VIII.195)}$$

où $\Psi=\alpha_r/\alpha_c$.

Pour les cas limites, le coefficient β_1 vaut respectivement 0,5 et 0,705.

Le coefficient de transmission de chaleur moyen peut s'écrire

$$\bar\alpha=\frac{4}{3}\beta_1\sqrt[4]{\frac{\lambda_v\varphi r\rho_v g(\rho_l-\rho_v)}{\mu_v\Delta TL(1+\Psi)}}. \qquad \text{(VIII.196)}$$

Si l'ébullition en film a lieu sur un cylindre horizontal, le coefficient de transmission de chaleur moyen est environ de 20 % plus petit que celui fourni par la formule (VIII.196), où au lieu de L on porte le diamètre du cylindre D.

Pour l'écoulement forcé d'un liquide, lorsque

$$\frac{2\mu_v w_{fr}}{g(\rho_l-\rho_v)\delta^2} \gg 1,$$

dans l'équation (VIII.195) l'influence de la force ascensionnelle peut être négligée

$$w = w_{fr} y/\delta.$$

Donc, pour le cas $q = \text{const}$

$$\delta = \frac{2qx}{\varphi r \rho_v w_{fr}} \qquad \text{(VIII.197)}$$

et

$$\alpha = \frac{\lambda_v \varphi r \rho_v w_{fr}}{2qx}. \qquad \text{(VIII.198)}$$

De la sorte, si la charge est constante, dans les conditions d'une ébullition en film et écoulement forcé le coefficient de transmission

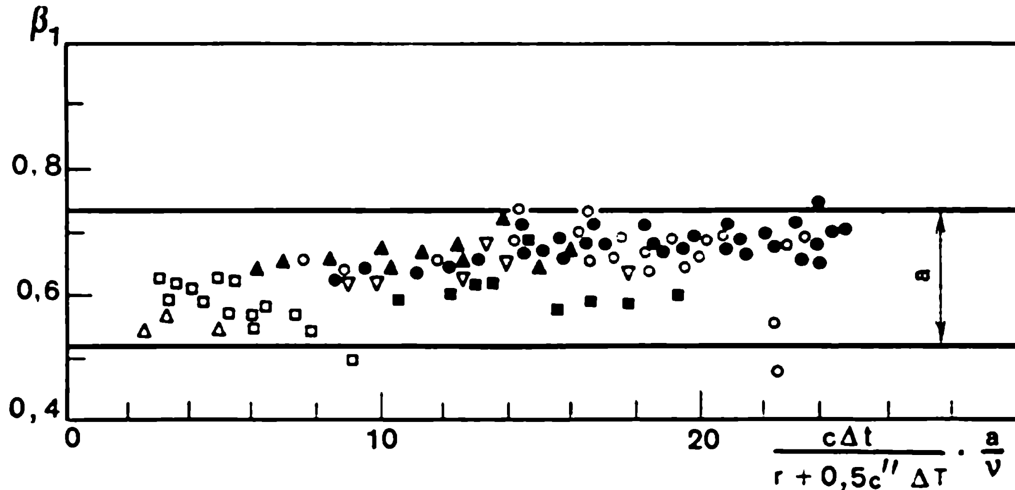


Fig. VIII.39. Données expérimentales sur le coefficient β d'après Bramley

de chaleur local est proportionnel à la vitesse d'écoulement du liquide.

Pour l'écoulement forcé et $\Delta T = \text{const}$

$$\alpha_x = 0{,}5 \sqrt[4]{\frac{\lambda_v \varphi r \rho_v w_{fr}}{\Delta T (1+\Psi)_x}}; \qquad \text{(VIII.199)}$$

$$\bar{\alpha} = \sqrt[4]{\frac{\lambda_v \varphi r \rho_v w_{fr}}{\Delta T L (1+\Psi)_l}}. \qquad \text{(VIII.200)}$$

Les figures VIII.39 et VIII.40 comparent les résultats expérimentaux avec ceux obtenus suivant les formules (VIII.196) et (VIII.200).

Pour l'ébullition en film dans un grand volume les valeurs expérimentales du coefficient reposent dans les limites qui s'accordent avec les calculs théoriques.

La figure VIII.39 visualise les résultats des expériences de Bramley et d'autres chercheurs sur le transfert de chaleur dans le contournement transversal forcé des cylindres sous les conditions d'ébullition en film et grandes vitesses d'écoulement du liquide. Comme le montre la courbe, pour $w_0/\sqrt{gD} < 1$, la formule (VIII.196) est assez bien confirmée pour l'ébullition dans un grand volume. Pour $w_0/\sqrt{gD} > 2$, les données expérimentales calculées suivant la formule

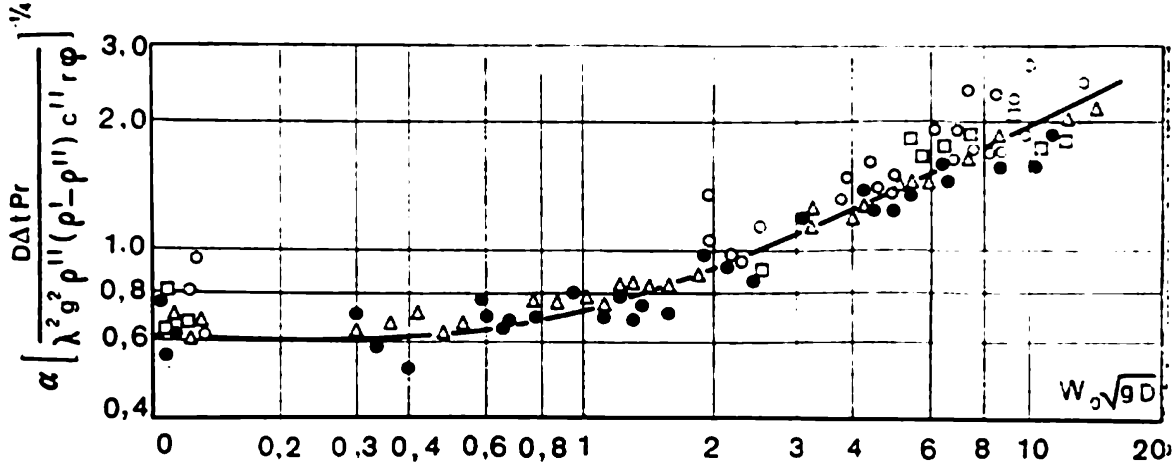


Fig. VIII.40. Influence de la vitesse de l'écoulement du liquide sur le transfert de chaleur dans l'ébullition en film sur un cylindre horizontal contourné transversalement

$$\alpha = 2,7 \sqrt[4]{\frac{\lambda_v \varphi r \rho_v w_0}{\Delta T D}}, \qquad \text{(VIII.201)}$$

s'accordent assez bien avec la relation théorique (VIII.190).

Dans l'ébullition en film, le coefficient de transmission de chaleur peut être influencé sensiblement par la part relative de chaleur absorbée par la surchauffe de la vapeur dans le film prise en compte par le nombre $K = r/(c_p \Delta T)$. Cet effet n'est pas pris en considération par la formule (VIII.196).

La figure VIII.140 montre l'action exercée par le nombre K sur le coefficient de transmission de chaleur. Ici α est le coefficient calculé d'après la formule (VIII.196).

D'après les expériences, lors de l'ébullition en film le transfert de chaleur dépend également de la sous-chauffe du liquide par rapport à la température de saturation.

Les calculs théoriques montrent que pour de faibles valeurs de $c_p\Delta T/r$ l'influence de la sous-chauffe est faible, elle est grande pour des surchauffes importantes du film de vapeur. D'après les calculs, la valeur optimale du paramètre $c_p\Delta T/r$ qui rend possible l'ébullition en film, est 0,1.

A partir d'une certaine distance du bord inférieur de la plaque (x_{cr}) l'écoulement de la vapeur dans le film se transforme de laminaire en turbulent. Pour ce cas il n'existe pas de théorie suffisamment fondée. Pour le calcul du coefficient de transmission de chaleur on peut utiliser dans ce cas, en première approximation, l'analogie à la convection turbulente naturelle sur une plaque verticale dans un grand volume. Alors, le transfert de chaleur est défini par l'équation de similitude [17]

$$\mathrm{Nu}_v = 0.25\,(\mathrm{Ar}_v \mathrm{Pr}_v)^{1/3}, \qquad \text{(VIII.202)}$$

où $\mathrm{Ar}_v = \frac{gl^3}{\nu^2}\left(\frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_l}\right)$.

La dernière équation est justifiée pour $\mathrm{Ar}_v\mathrm{Pr}_v > 2\cdot 10^7$.

Sous le régime d'écoulement forcé du mélange vapeur-liquide dans un tube, les données expérimentales sur le coefficient de transmission de chaleur dans l'ébullition en film peuvent être généralisées sous la forme de la relation

$$\alpha_{fx}/\alpha_v = \varphi\,(x;\ \rho_v/\rho_l), \qquad \text{(VIII.203)}$$

où α_{fx} est le coefficient de transmission de chaleur lors de l'ébullition dans la section du tube, où le titre de vapeur massique du débit est x; α_v, le coefficient de transmission de chaleur calculé d'après la formule usuelle de transfert de chaleur par convection d'un liquide monophasé pour le même débit massique.

Comme l'a montré dans ses ouvrages Z. Miropolski, en première approximation le coefficient de transmission de chaleur peut se calculer d'après les formules usuelles du transfert convectif lors de l'écoulement turbulent de la vapeur sèche saturée, dont la vitesse moyenne est égale à la vitesse du mélange, c'est-à-dire

$$w_{0v} = \left[x + \frac{\rho_v}{\rho_l}(1 - x)\right].$$

En particulier, pour l'eau, dans la marge des pressions de 4 à 20 MPa, la formule de Miropolski s'écrit

$$\frac{\alpha_{fx}}{\alpha_v} = \left[\frac{\rho_v}{\rho_l} + x\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_l}\right)\right]^{0,8}\left[1 - 0,1\left(\frac{\rho_l - \rho_v}{\rho_v}\right)^{0,4}(1 - x^{0,4})\right]. \qquad \text{(VIII.204)}$$

Cette formule montre qu'avec la croissance du titre de vapeur dans le domaine de l'ébullition en film le coefficient de transmission de chaleur augmente.

De différents chercheurs, en avançant leurs hypothèses sur le modèle physique du processus d'ébullition, font appel à des prémisses différentes, ainsi qu'à de différents systèmes d'équations. C'est pourquoi les critères qu'ils ont utilisés pour la description quantitative de l'échange de chaleur dans l'ébullition diffèrent également. Ceci rend très difficile, et parfois impossible, la comparaison des résultats enregistrés.

Dans toutes les expressions de calcul mentionnées les variables indépendantes utilisées étaient des constantes physiques, des paramètres d'état du liquide et de la vapeur. Il convient de noter que le milieu condensé (fluide aqueux) le plus fréquent est l'eau. Mais du point de vue thermodynamique l'eau est un corps anomal. D'autre part, l'eau naturelle non traitée possède des propriétés différentes qui dépendent non seulement du lieu d'où elle est tirée, mais aussi de la saison. Aussi, l'étude des processus d'échange de chaleur lors de l'ébullition de l'eau impose-t-elle généralement l'obtention d'un distillat. Pour ce qui est d'autres caloporteurs, tels les liquides cryogéniques, les métaux liquides, leurs propriétés physiques sont plus stables.

8. Echange de chaleur dans l'ébullition des métaux liquides

Les autres conditions étant les mêmes, lors de l'ébullition des métaux liquides il se forme moins de vapeur à la surface de chauffe que dans le cas des liquides usuels. La fréquence du détachement des bulles, le nombre de centres de génération sont également inférieurs par rapport aux liquides non métalliques; ceci est dû aux propriétés physiques des métaux liquides. Par exemple, dans le mécanisme moléculaire de transfert de chaleur à partir de la surface de chauffe, on peut observer l'action exercée par l'épaisseur de la couche adhérente à la paroi sur le processus d'ébullition en comparant les propriétés physiques du métal, admettons, avec celles de l'eau. En adoptant qu'à la surface de chauffe $q = \alpha\Delta T = \frac{\lambda}{\delta}\ \Delta T$, on tire la conclusion que

$$\alpha = \lambda/\delta.$$

Alors, si les valeurs du coefficient de transmission de chaleur pour l'eau et le métal liquide coïncident (ce qui est possible pour l'ébullition de l'eau et du potassium),

$$\alpha_{\text{eau}}/\delta_{\text{eau}} = \lambda_{\text{m.l}}/\delta_{\text{m.l}}.$$

Etant donné que la conductivité du métal est de 2 à 3 ordres plus grande que celle de l'eau [par exemple, pour 100 °C, $\lambda_{\text{Na}} = 86$; $\lambda_{\text{K}} = 46{,}5$ et $\lambda_{\text{eau}} = 0{,}684$ W/(m·K)], alors $\delta_{\text{m.l}}$ également est de 2

à 3 ordres plus élevée que δ_{eau}. Respectivement, la turbulisation de la couche adhérente à la paroi est sensiblement plus faible lors de l'ébullition des métaux liquides que dans le cas des liquides non métalliques.

Si le métal liquide (potassium, sodium, amalgame de magnésium, etc.) mouille la surface de chauffe, sous le régime nuclé le coefficient de transmission de chaleur peut être associé à la densité du flux thermique et la valeur de la pression de saturation

$$\alpha = Cq^n p^m. \qquad \text{(VIII.205)}$$

Tableau VIII.6

Valeurs des constantes *C*, *n*, *m* de la formule (VIII.205)

Auteur de la formule	Métal	C	n	m	Surface de chauffe
Noyse	Sodium, potassium	25	0,58	0	Horizontale
Pétoukhov e.a.	Sodium	0,8	0,7	0,25	Idem
Borichanski e.a.	Sodium,	7,0	0,7	0	
	Potassium	3,0	0,7	0,15	Idem
Déev e.a.	Sodium	380	1/3	0,1	Plane
Bonilla e.a.	Potassium	$4{,}83\cdot10^{-2}$	0,885	0,293	Idem
Madsen et Bonilla	Alliage sodium + potassium	210	0,2	0,2	Idem
Soubbotine	Césium *	9,2	2/3	0,4	Idem
Sorokine e.a.	Césium **	4,6	2/3	0,1	Idem
Borichanski, Kanaev e.a.	Mercure, amalgames de magnésium	2,8	0,7	0,3	Idem

* Sous la pression de 0,002 à 0,01 MPa.
** Sous la pression de 0,01 à 0,02 MPa.

Les recherches expérimentales sur l'échange thermique dans l'ébullition des métaux liquides caloporteurs dans les conditions de convection naturelle ont montré que l'intensité du transfert de chaleur dépend, en plus des propriétés physiques du caloporteur et de la surface de chauffe, de la forme de cette dernière. Les recommandations de divers auteurs sont consignées sur le tableau VIII.6.

Si le métal liquide (cadmium, mercure) ne mouille pas la surface de chauffe, les valeurs du coefficient de transmission de chaleur correspondent aux caractéristiques de l'ébullition en film. Le mouillage de la surface donnée peut être amélioré par l'introduction dans le liquide des matières actives qui intensifient l'adhésion entre les molécules du liquide et de la surface. Par exemple, si on ajoute au

mercure une quantité négligeable de sodium ou de magnésium, le mouillage de l'acier se trouve amélioré et l'ébullition nuclée devient plus active.

Lors de l'ébullition du potassium, du rubidium, du césium, les flux thermiques critiques peuvent être évalués d'après la formule de Keswell et de Balshisser

$$q_{cr\,1} = 5{,}038 \cdot 10^{-6} \frac{g\rho_l \lambda r^2}{c_p \sigma} \left(\frac{\rho_l}{\rho_v}\right)^{0{,}71} \qquad \text{(VIII.206)}$$

et pour le mercure, d'après les recommandations de P. Kirillov

$$q_{cr\,1} = 0{,}666 \cdot 10^6 \lambda^{0{,}6} (p/p_{cr})^{1{,}6}. \qquad \text{(VIII.207)}$$

CHAPITRE IX

ÉCHANGE DE CHALEUR PAR RAYONNEMENT

Les processus de transfert de chaleur peuvent être rangés en deux catégories. La première est définie par le fait que les éléments structuraux du milieu à travers lequel la chaleur est transmise participent au processus de transfert. Ce sont la conductivité thermique et la convection déjà étudiées. La deuxième est caractérisée par le fait que le milieu peut ne pas participer au transfert de chaleur: c'est le rayonnement thermique.

Ainsi, entre les processus de conductivité thermique et de convection d'une part, et de rayonnement thermique de l'autre, il existe une différence de principe.

Le transfert convectif de la chaleur et la conductivité thermique étaient envisagés dans les conditions d'un champ thermique continu également dans les cas où la chaleur passe d'un corps solide à un fluide et inversement. Le gradient de température avait toujours une grandeur finie, sauf dans les cas où il était nul.

Le rayonnement thermique est un processus complexe associé au fait que l'énergie se transforme au moins deux fois: d'abord l'énergie thermique se transforme en émission des ondes électromagnétiques suivie du mouvement des ondes (photons), puis les oscillations électromagnétiques sont absorbées par le milieu ou le corps, ce qui est encore une transformation de l'énergie.

Le rayonnement thermique est envisagé comme un processus de propagation des ondes électromagnétiques transversales émises par le corps rayonnant. Ces ondes se propagent rectilignement et lorsqu'elles sont absorbées par le corps ou le milieu, elles se transforment de nouveau en chaleur.

Les oscillations électromagnétiques peuvent être définies par la longueur d'onde λ et la fréquence ν associées par la relation

$$\lambda\nu = c, \tag{IX.1}$$

où $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s est la vitesse (célérité) de la lumière dans le vide.

Les porteurs de l'énergie rayonnante thermique sont les ondes électromagnétiques qui se distinguent des ondes d'autres formes de rayonnement seulement par la longueur d'onde. L'action du rayonnement incident sur la matière dépend de la longueur d'onde. Les limites des propriétés du rayonnement suivant la longueur d'onde en mm pour les diverses formes de rayonnement sont :

Rayonnement cosmique	$0{,}05 \cdot 10^{-9}$
Rayonnement gamma	$(0{,}5$ à $10) \cdot 10^{-9}$
Rayons X	10^{-9} à $2 \cdot 10^{-5}$
Rayons ultra-violets	$2 \cdot 10^{-5}$ à $0{,}4 \cdot 10^{-3}$
Rayons visibles (lumière)	$(0{,}4$ à $0{,}8) \cdot 10^{-3}$
Rayons thermiques (infrarouges)	$0{,}8 \cdot 10^{-3}$ à $0{,}8$
Ondes électromagnétiques	$2 \cdot 10^5$

La plus grande partie des ondes qui correspond au rayonnement thermique ne coïncide pas avec les longueurs d'onde des rayons lumineux. Le rayonnement défini par la marge thermique des longueurs d'onde est dite *infrarouge*, cette dernière pouvant contenir toutes les longueurs d'onde qui lui sont permises; alors, le rayonnement est dit *intégral*. Mais le rayonnement thermique peut également avoir lieu dans les limites d'une certaine marge (une ou plusieurs) de toute la gamme des longueurs d'onde. On dit alors que le rayonnement est *spectral* ou *en bande*.

La nature des rayons thermiques et visibles (lumineux) étant la même, leurs propriétés physiques coïncident *grosso modo*. Les lois de propagation, de réflexion et de réfraction établies pour la lumière sont également valides pour les rayons thermiques.

Le rayonnement est propre à tous les corps et chacun d'eux émet en permanence de l'énergie, ceci concernant aussi bien les corps chauds du système que les corps froids. La quantité de l'énergie rayonnante engendrée dans le corps est définie par la température et ne dépend que de cette dernière.

Dans ce qui suit le rayonnement thermique sera envisagé sous son aspect électromagnétique ; ses formes telles que la luminescence, la phosphorescence, ne seront pas discutées.

§ IX.1. Généralités

Lorsqu'un flux rayonnant Q frappe un certain corps à partir d'un milieu ambiant (fig. IX.1), une partie de ce flux Q_R est dans le cas général reflétée par le corps, une autre partie Q_A de l'énergie y est absorbée et une partie Q_D passe à travers le corps. De la sorte, en vertu de la loi de conservation de l'énergie

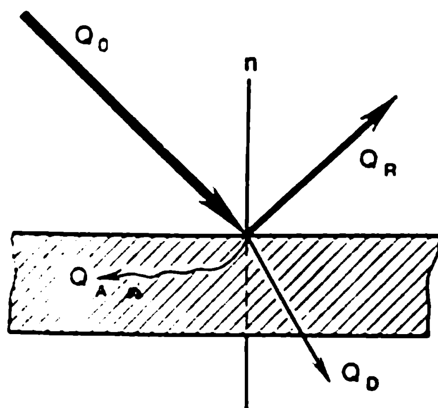


Fig. XI.1. Distribution de l'énergie rayonnante incidente

$$Q = Q_R + Q_A + Q_D. \quad \text{(IX.2)}$$

Si l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion, et le rayon reflété garde sa forme, la réflexion est dite *spéculaire*. Lorsque la réflexion transforme le rayon incident en un faisceau de rayons uniformément répartis dans le demi-espace, la réflexion est dite *diffuse*. La surface qui produit une telle diffusion est dite *mate*, et celle qui assure une réflexion spéculaire, *brillante*.

Le rapport du flux reflété par la surface du corps (du milieu) au flux incident s'appelle *pouvoir réflecteur* noté $R = Q_R/Q$.

La partie non reflétée de l'énergie peut passer partiellement par le corps sans changer, et une de ses fractions peut être absorbée par le corps pour se transformer en chaleur. La perméabilité et l'absorption dépendent des propriétés physiques du corps, de sa forme et de la longueur d'onde du rayonnement. Les métaux, par exemple, sont impénétrables pour diverses formes de rayonnement. Mais on peut fabriquer une feuille métallique si mince qu'elle laissera passer les ondes lumineuses; les rayons X peuvent traverser des plaques métalliques épaisses de plusieurs dizaines de millimètres. Le quartz ne laisse pas passer le rayonnement thermique, mais il est transparent pour les rayons lumineux et ultraviolets. Le sel gemme, au contraire, est opaque à l'ultraviolet et laisse passer les rayons thermiques. Le verre usuel est transparent pour la lumière et opaque pour l'ultraviolet.

Le rapport du flux absorbé par le corps (par le milieu) au flux incident s'appelle *pouvoir d'absorption* noté $A = Q_A/Q$.

Le rapport du flux qui a traversé le corps (le milieu) au flux incident s'appelle *pouvoir de transmission* noté $D = Q_D/Q$.

Maintenant, compte tenu de l'équation (IX.2),

$$R + A + D = 1. \quad \text{(IX.3)}$$

Examinons les cas particuliers de cette expression. Il est clair que les quantités A, R ou D sont définies par les propriétés du corps qui reçoit le flux de rayonnement. Les corps aussi bien solides que liquides absorbent par une couche très mince presque tout le rayonnement thermique incident. Pour les métaux, l'épaisseur de cette couche est d'environ un micron, pour la plupart d'autres corps, près de 1,3 mm. Ainsi, en première approximation, pour les liquides et solides on peut parler de surface absorbante et simplifier (IX.3)

$$A + R = 1.$$

Les corps qui vérifient cette équation sont dits *gris*. Leur pouvoir d'absorption spectral ne dépend pas de la longueur d'onde (fréquence) du rayonnement incident.

Il a été établi expérimentalement que les gaz ne reflètent presque pas le rayonnement qui frappe la surface les séparant des autres milieux. D'autre part, même si l'épaisseur de la couche de gaz est importante, le gaz laisse passer une quantité perceptible de rayonnement infrarouge. L'expression (IX.3) peut donc se mettre sous la forme:

$$A + D = 1.$$

Il convient d'examiner également les formes limites de l'équation (IX.3):

$$A = R = 0,\ D = 1;\ A = D = 0,\ R = 1;\ D = R = 0,$$

$$A = 1.$$

Ces égalités correspondent à ce qu'on appelle corps aux propriétés « absolues ».

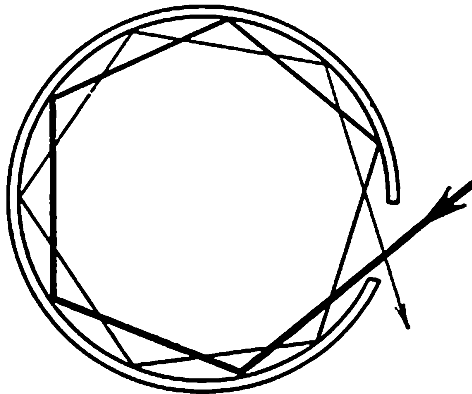
Dans le premier cas ($D = 1$) le corps est dit *transparent* ou *diathermique*. Il laisse passer tout le rayonnement incident. L'exemple en est fourni par les gaz biatomiques sous des températures modérées.

Dans le deuxième cas ($R = 1$), le corps est dit *blanc* ou forme un *miroir*. Sa surface reflète complètement les rayons incidents.

Le dernier cas ($A = 1$) correspond à un corps qui absorbe tous les rayons incidents indépendamment de leur direction, composition spectrale et polarisation, il ne reflète rien et ne laisse rien passer: c'est ce qu'on appelle *corps noir*.

La nature ne connaît ni de corps complètement noir, ni de corps diathermique ou blanc. Pourtant, ces notions, surtout celle du corps noir, ont joué, comme nous le verrons par la suite, un grand rôle dans l'établissement de la théorie du rayonnement et sont large-

ment utilisées dans les calculs techniques de l'échange de chaleur radiatif. La surface qui absorbe tous les rayons lumineux est perçue par l'œil comme noire. Cependant une surface peut refléter presque tous les rayons lumineux et quand même se présenter à nous comme noire si elle absorbe le rayonnement thermique. Dans cette optique, un mur fraîchement blanchi est presque noir. Avec une précision suffisante, un corps noir peut s'obtenir en couvrant une surface mate



g. IX.2. Modèle du corps noir

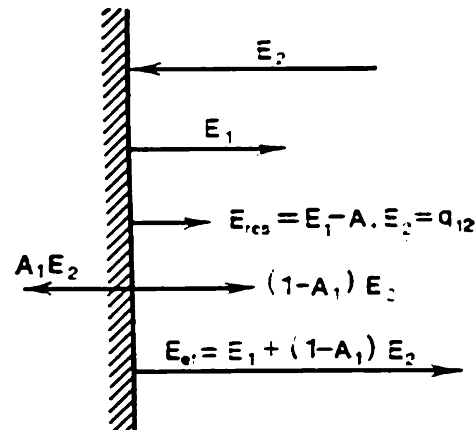


Fig. IX.3. Détermination des formes de rayonnement thermique

par du noir de fumée. Le modèle d'un corps noir peut être également fourni par une sphère creuse à petit trou (fig. IX.2), dont les parois possèdent un grand pouvoir d'absorption et conservent une température constante. Le rayon entré par l'orifice perd presque toute son énergie par suite des réflexions et absorptions multiples, en la cédant aux parois de la sphère.

Le flux de rayonnement qui passe par unité de surface dans les directions les plus différentes dans les limites de l'angle solide demi-sphérique s'appelle *densité superficielle du flux de rayonnement*:

$$E = dQ/dH. \qquad \text{(IX.4)}$$

Si la température des corps environnants est nulle, E est alors toute l'énergie émise par le corps. Si la température ne serait-ce que d'un seul corps est différente de zéro, on peut parler de rayonnement propre et réfléchi (fig. IX.3).

$$E_{ef} = E_1 + (1 - A_1)\,E_2. \qquad \text{(IX.5)}$$

Les propriétés physiques des rayonnements propre et réfléchi sont en général différentes, puisque le flux incident est défini par les

températures et les propriétés des corps environnants, mais pour l'aspect énergétique du processus, pour les calculs thermiques, cette différence est sans intérêt.

L'énergie émise par unité de surface se répartit suivant le demi-espace. Le rapport de la densité du flux prise dans un intervalle infiniment petit des longueurs d'onde (fréquences) comprenant la longueur d'onde (fréquence) donnée, à cet intervalle s'appelle intensité de rayonnement

$$I = dE/d\lambda. \tag{IX.6}$$

Les sources naturelles de radiation émettent simultanément des ondes électromagnétiques de différente longueur. Cependant. il est nécessaire souvent d'envisager un flux défini par une seule longueur d'onde. Le rayonnement qui correspond à un intervalle suffisamment petit de fréquences (longueurs d'onde) pouvant être caractérisées par la valeur donnée de la fréquence est dit *monochromatique*.

§ IX.2. Lois du rayonnement thermique

Les spectres du rayonnement des corps réels sont si variés qu'il est impossible de les décrire par une seule relation analytique. En même temps, un corps noir absorbe totalement le rayonnement incident, son spectre de diffusion est universel. Il s'ensuit que les calculs du rayonnement thermique sont fondés sur les lois qui régissent le corps noir.

Loi de Planck. L'énergie émise par un corps est définie sans ambiguïté par sa température. Cependant, la distribution de l'énergie suivant les longueurs d'onde est irrégulière. D'autre part, l'émission de l'énergie est discrète, elle marche par portions isolées qui s'appellent quanta.

En 1900 M. Planck a rendu publique la loi de la répartition de l'intensité suivant les longueurs d'onde à des températures différentes

$$I_{0\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]}, \tag{IX.7}$$

où $h = 6{,}625 \cdot 10^{-34}$ J/s est la constante de Planck; $k = 1{,}380 \times \times 10^{-23}$ J/°K, la constante de Boltzmann; λ, la longueur d'onde, m; $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s, la vitesse de la lumière dans le vide; T, la température en °K.

Convenons dans ce qui suit de marquer toutes les grandeurs relatives au corps noir de l'indice « 0 ».

Les constantes de l'équation (IX.7) associent

$$C_1 = 2\pi c^2 h = 3{,}74\cdot 10^{-10}\ \mathrm{W\cdot m}; \quad C_2 = hc/k = 0{,}01438\ \mathrm{m/K}.$$

Maintenant la loi de Planck peut s'écrire

$$I_{0\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]}. \qquad \text{(IX.8)}$$

Les isothermes données par la figure IX.4 montrent que l'intensité des ondes très courtes croît rapidement jusqu'à un maximum, pour diminuer ensuite sans atteindre zéro pour des longueurs d'onde maximales qui correspondent encore au rayonnement thermique.

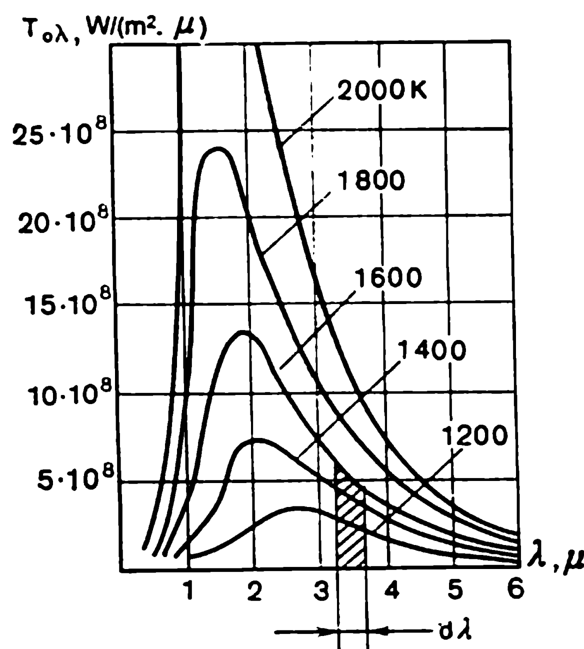


Fig. IX.4. $E_{0\lambda} = f(\lambda, T)$ d'après la loi de Planck

L'aire délimitée par l'axe des abscisses, les isothermes et les ordonnées λ et $d\lambda$ (hachurée) sert de mesure à la quantité élémentaire de l'énergie $dE_{0\lambda,\,T}$ émise par unité de surface par unité de temps à la température T dans l'intervalle de la longueur d'onde $d\lambda$, c'est-à-dire

$$dE_{0\lambda,\,T} = I_{0\lambda}\,d\lambda.$$

L'énergie du rayonnement $E_{0\lambda,\,T}$ au point λ ne peut avoir une valeur finie que pour un intervalle fixe défini des longueurs d'onde $\Delta\lambda$, puisque l'énergie globale du rayonnement, qui possède une valeur finie, se répartit suivant tout le spectre. Par conséquent, pour une longueur d'onde unique un rayonnement strictement monochromatique est théoriquement impossible du fait qu'il ne possède pas de l'énergie finie.

L'analyse de l'expression mathématique de la loi de Planck (IX.8) attire l'attention sur deux cas : $\lambda T \gg C_2$ et $\lambda T \ll C_2$. Lorsque $\lambda T \gg C_2$, le rapport $C_2/(\lambda T) \ll 1$. Si, maintenant, la grandeur

exp $\frac{C_2}{\lambda T}$ est développée en série suivant les degrés de $\frac{C_2}{\Delta T}$:

$$e^{\frac{C_2}{\lambda T}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)^2 + \ldots,$$

en vertu de la petitesse de $C_2/(\lambda T)$ on peut se borner aux deux premiers termes de la série. Dans ce cas la relation (IX.8) se transforme en formule de Rayleigh-Jeans

$$I_{0\lambda} = \frac{C_1}{C_2} \lambda^{-4} T. \qquad \text{(IX.9)}$$

Lorsque $\lambda T > 100\ C_2$, l'écart par rapport aux résultats de calcul d'après la formule exacte de Planck ne dépasse pas 10 %.

Dans le deuxième cas, avec $\lambda T \ll C_2$, la valeur de exp $\frac{C_2}{\lambda T}$ est grande et on peut négliger l'unité figurant dans le numérateur de l'expression (IX.8) en obtenant la formule de Wien

$$I_{0\lambda} = C_1 \lambda^{-5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T}\right). \qquad \text{(IX.10)}$$

Si $\lambda T \ll 0{,}218\ C_2$, le résultat diffère de celui obtenu par calcul d'après la loi de Planck (IX.8) de moins de 1 %.

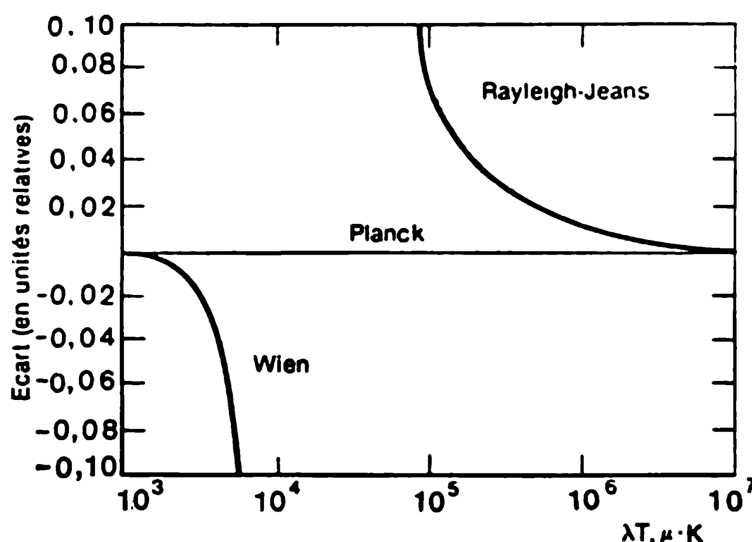


Fig. IX.5. Domaines d'application des lois de Wien et de Rayleigh-Jeans

Le domaine de validité des lois de Rayleigh-Jeans et de Wien est représenté sur la figure IX.5.

Loi du déplacement de Wien. Pour chaque isotherme (cf. fig. IX.4) à une certaine longueur d'onde correspond une valeur maximale de l'intensité du rayonnement, cette valeur extrémale pour des tem-

pératures plus élevées étant déplacée dans le sens des ondes courtes. Pour calculer cette valeur maximale il convient d'annuler la dérivée $dI_{0\lambda}/d\lambda$:

$$dI_{0\lambda}/d\lambda = e^{-C_2/(\lambda T)} + C_2/(5\lambda T) - 1 = 0.$$

Dans cette équation la longueur d'onde correspond à l'intensité maximale du rayonnement, c'est-à-dire $\lambda = \lambda_{max}$. Sa solution peut s'écrire sous la forme

$$C_2/(\lambda_{max}\, T) = 4{,}965$$

ou, en y portant la valeur de C_2,

$$\lambda_{max}\, T = 2{,}8978 \text{ mm·K}. \tag{IX.11}$$

Cette dernière écriture est l'expression mathématique de la loi du déplacement de Wien. Elle établit la liaison entre la température du rayonnement et la longueur d'onde qui correspond à son intensité maximale.

En connaissant la grandeur $\lambda_{max}\, T$, on peut calculer d'après la loi de Planck l'intensité maximale:

$$\lambda_{max} = 0{,}0028978/T.$$

Par conséquent

$$I_{0\lambda_{max}} = \frac{C_1}{\lambda_{max}^5 \left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda_{max} T}\right) - 1\right]} =$$

$$= \frac{C_1 T^5}{(0{,}0028978)^5 \left[\exp\left(\frac{C_2}{0{,}0028978}\right) - 1\right]} = C_3 T^5,$$

c'est-à-dire l'intensité maximale est proportionnelle à la cinquième puissance de la température absolue d'un émetteur noir.

Loi de Stefan-Boltzmann. La loi de Planck établit la relation entre l'intensité du rayonnement et la longueur d'onde. La quantité globale de l'énergie émise par unité de surface d'un corps noir par unité de temps se calcule d'après la loi de Stefan-Boltzmann. Cette loi a été établie empiriquement par J. Stefan en 1879, puis démontrée théoriquement en 1884 par Boltzmann.

La quantité totale de l'énergie émise par un corps noir à la température T peut s'obtenir en intégrant l'équation (IX.8)

$$E_0 = \int_0^\infty I_{0\lambda}\, d\lambda = C_1 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1\right]}.$$

Introduisons une nouvelle variable $\varkappa$ telle que $\varkappa = C_2/(\lambda T)$; alors, $d\varkappa = -C_2 d\lambda/(\lambda^2 T)$, d'où $d\lambda = -\frac{\lambda^2 T}{C_2} d\varkappa$, mais $\lambda = C_2 (\varkappa T)$, donc

$$d\lambda = -\frac{C_2^2 T}{\varkappa^2 T^2 C_2} d\varkappa = -\frac{C_2}{x^2 T} d\varkappa.$$

Portons les résultats obtenus dans l'équation initiale

$$E_0 = C_1 \int_0^\infty -\frac{T^4}{C_2^4} \frac{\varkappa^3}{e^\varkappa - 1} d\varkappa,$$

ou

$$E_0 = C_1 \frac{T^4}{C_2^4} \int_0^\infty \frac{\varkappa^3}{e^\varkappa - 1} d\varkappa.$$

L'intégrale est prise par parties.

En développant la fonction de l'intégrande en série

$$6\,(1 + 1/2^4 + 1/3^4 + \ldots) = \pi^4/15 = 6{,}494,$$

on obtient

$$E_0 = \frac{6{,}494}{C_2^4} T^4,$$

ou

$$E_0 = \sigma_0 T^4, \tag{IX.12}$$

où $\sigma_0 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ W/(m$^2 \cdot$K^4). Cette grandeur s'appelle, d'après l'usage, *constante de Stefan-Boltzmann.*

La quantité totale de l'énergie rayonnée par un corps noir est directement proportionnelle à la quatrième puissance de la température de l'émetteur.

Dans les calculs techniques il est plus commode d'appliquer la loi de Stefan-Boltzmann sous une autre forme

$$E_0 = C_0\,(T/100)^4, \tag{IX.13}$$

où $C_0 = \sigma_0 \cdot 10^8$ est le coefficient de rayonnement d'un corps noir.

La loi de Stefan-Boltzmann peut être appliquée aux corps gris. A cet effet on introduit la notion de *degré de noirceur*, défini comme le rapport de la valeur du flux rayonnant d'un corps gris à la valeur du flux rayonnant d'un corps noir à la même température, c'est-à-dire

$$\varepsilon = E/E_0,\ E = \varepsilon E_0 = \varepsilon\sigma_0 T^4.$$

Donc,

$$E = C\,(T/100)^4, \tag{IX.14}$$

où ε est le degré de noirceur, $\varepsilon = 0 - 1$; C, le coefficient de rayonnement d'un corps gris, $C = 0 - 5{,}67$.

Les méthodes thermodynamiques sont appliquées à l'étude des systèmes différents, aussi bien classiques que quantiques. Les lois thermodynamiques peuvent s'employer pour explorer non seulement la matière, mais aussi le champ, et notamment, le champ du rayonnement électromagnétique, c'est-à-dire thermique.

Un rayonnement peut être envisagé du point de vue de la mécanique quantique, de l'électrodynamique, de la physique statistique. On peut aussi expliquer certaines de ces lois si on utilise la notion d'équilibre, l'équation fondamentale de la thermodynamique, la méthode des potentiels thermodynamiques.

Si dans une certaine région l'espace rayonnant est en équilibre avec les corps environnants, le rayonnement est dit *d'équilibre*. Dans le cas d'équilibre thermique de deux corps, leurs températures sont égales.

Du point de vue de la thermodynamique, le rayonnement d'équilibre est un système de déformation thermique caractérisé par la coordonnée de déformation donnée par le volume, la coordonnée thermique donnée par l'entropie, le potentiel thermique donné par la température T et la force généralisée définie par la pression p (il s'agit en l'occurrence de la pression de lumière).

Cette approche suggère une analogie externe entre le rayonnement d'équilibre et le gaz. En retenant que l'aspect quantique du rayonnement est associé à la notion des « particules » de lumière ou photons, l'émission d'une cavité s'appelle « gaz photonique ».

Les lois de l'électrodynamique permettent d'établir l'équation d'état du rayonnement d'équilibre

$$pV = U/3.$$

En désignant U/V par u, on obtient

$$p = u/3,$$

où u est l'énergie spécifique du rayonnement d'équilibre.

L'entropie du rayonnement dans un volume peut s'écrire

$$S = sV.$$

Déduisons la loi de Stefan-Boltzmann qui dans les calculs techniques présente le plus d'intérêt.

Utilisons l'équation fondamentale de la thermodynamique

$$dU = TdS - pdV.$$

Le processus de rayonnement d'équilibre étant isotherme, il vient

$$(\partial U/\partial V)_T = T\,(\partial S/\partial V)_T - p \qquad \text{(IX.15)}$$

D'après cette dernière expression il n'est pas encore possible de déterminer l'entropie; il faut remplacer la dérivée du deuxième membre de l'égalité. A cet effet il faut connaître la fonction thermodyna-

mique où le volume figure encore sous le signe de la différentielle, alors que l'entropie n'y figure pas. Cette fonction est l'énergie libre

$$dF = -SdT - pdV.$$

Pour cette fonction les relations de réciprocité sont

$$(\partial S/\partial V)_T = (dp/dT)_V.$$

Maintenant l'expression (IX.15) peut s'écrire

$$(\partial U/\partial V)_T = T\,(\partial p/\partial T)_V - p$$

ou

$$T\,(\partial p/\partial T)_V = (\partial U/\partial V)_T + p.$$

Mais $U = uV$; donc,

$$dU/dV = u + Vdu/dV.$$

En retenant que u dépend seulement de la température et que $p = u/3$, on a

$$\frac{1}{3} T \frac{du}{dT} = u + \frac{u}{3},$$

ou

$$Tdu/dT = 4u.$$

En séparant les variables et en intégrant, on obtient l'expression analytique de la loi de Stefan-Boltzmann

$$u = \sigma_0 T^4,$$

où σ_0 est la constante d'intégration; cette grandeur n'est pas déterminée par les méthodes thermodynamiques.

La **loi de Lambert** (loi du cosinus) permet de donner l'évaluation quantitative de la radiation dans une direction fixée, lorsque l'émission de la surface dans la demi-sphère est d'une allure diffusive et est uniformément répartie dans le volume.

La quantité totale de l'énergie du rayonnement transmise par diffusion par un élément de la surface dF peut se déterminer comme

$$dQ = EdF = C\,(T/100)^4\,dF. \qquad \text{(IX.16)}$$

La loi de Lambert affirme que la quantité de l'énergie rayonnante transmise dans la direction φ par rapport à la normale à l'élément dF est proportionnelle à l'angle spatial dans lequel est émis le rayonnement $d\Omega$ et à $\cos\varphi$ (fig. IX.6), c'est-à-dire

$$dQ_\varphi = E_n\,d\Omega \cos\varphi\,dF, \qquad \text{(IX.17)}$$

où E_n est l'énergie du rayonnement suivant la normale à dF.

Cherchons la relation entre E et E_n. L'angle solide est défini par analogie avec l'angle plan.

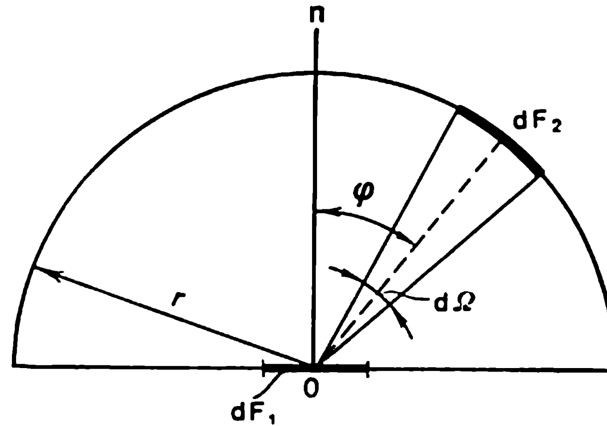


Fig. IX.6. Déduction de la loi de Lambert

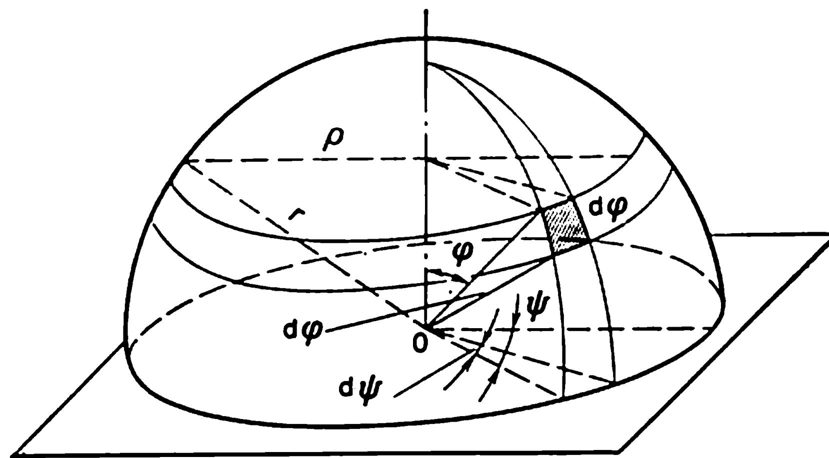


Fig. IX.7. Détermination de l'angle spatial en coordonnées sphériques

Pour l'angle plan

$$d\varphi = ds/r,$$

où ds est l'arc sur lequel repose l'angle plan.

Pour l'angle solide

$$d\Omega = dF/r^2.$$

En déterminant la longitude à l'aide de Ψ (fig. IX.7) et à l'aide de φ la distance polaire, c'est-à-dire 90° moins la latitude, passons à un rectangle sphérique infiniment petit dF_1, dont les côtés sont $rd\varphi$ et $\rho d\psi = r \sin \varphi \, d\psi$. Maintenant, $d\Omega = dF_1/r^2 = \sin \varphi \, d\varphi \, d\psi$. En portant la valeur de l'angle solide dans (IX.17), on obtient

$$dQ_\varphi = E_n \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\psi \, dF.$$

Pour une demi-sphère

$$dQ = \int dQ_\psi = E_n\, dF \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi.$$

Mais $\cos\varphi d\varphi = d(\sin\varphi)$; donc

$$dQ = E_n\, dF 2\pi \left|\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right|_0^{\pi/2};$$

$$dQ = \pi E_n\, dF.$$

En comparant le résultat obtenu avec (IX.16), on voit que

$$E_n = E/\pi. \qquad \text{(IX.18)}$$

Cette relation témoigne du fait que le flux rayonnant dans la direction de la normale est π fois inférieur au rayonnement par diffusion dans la demi-sphère.

La quantité d'énergie émise dans la direction φ par rapport à la normale peut maintenant s'écrire

$$dQ_\varphi = \frac{E}{\pi}\, d\omega \cos\varphi\, dF, \qquad \text{(IX.19)}$$

ou

$$dQ_\varphi = \varepsilon_\varphi E_0\, d\omega \cos\varphi\, dF,$$

où $\varepsilon_\varphi = E_\varphi/E_{0\varphi}$.

La loi de Lambert n'est strictement valide que pour un corps noir. Si pour une surface grise le rayonnement vérifie la loi de Lambert, le degré de noirceur ne dépend pas de l'angle φ et

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_n = \varepsilon.$$

Les diélectriques, les surfaces oxydées des métaux enregistrent un écart notable de la loi de Lambert lorsque $\varphi > 60°$ (fig. IX.8). Pour les surfaces métalliques polies, les écarts de la loi de Lambert sont plus importants (fig. IX.8).

La loi de Lambert est également justifiée pour le rayonnement monochromatique.

Les lois de Planck, de Stefan-Boltzmann, de Lambert sont strictement valides pour le rayonnement du corps noir, dont l'énergie est la plus grande de ses valeurs possibles à la température donnée. Ceci peut se démontrer à l'aide de la loi de Kirchhoff.

La **loi de Kirchhoff** établit la relation entre les pouvoirs d'émission et d'absorption du corps.

Considérons l'échange thermique radiatif entre deux surfaces placées de façon que le rayonnement de l'une frappe l'autre sans

aucune perte (fig. IX.9). Admettons que l'une des surfaces soit noire et sa température soit T_0, et l'autre soit grise, son pouvoir d'absorption étant A et sa température T.

Tant que $T > T_0$, le transfert radiatif entre les surfaces est tel que

$$q = E - AE_0,$$

où E est l'énergie du rayonnement du corps gris totalement absorbée par le corps noir; E_0, l'énergie du rayonnement du corps noir partiel-

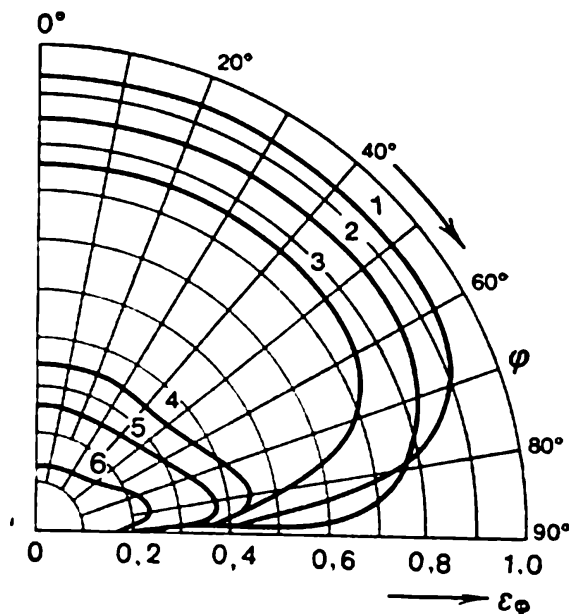


Fig. IX.8. Ecarts de la loi de Lambert: 1 — bois; 2 — corindon; 3 — cuivre oxydé; 4 — bismuth; 5 — alumine-bronze; 6 — laiton

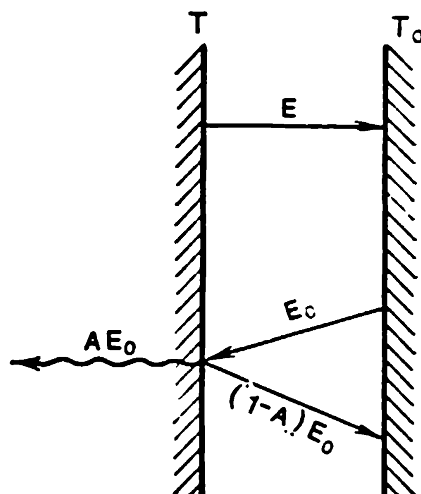


Fig. IX.9. Déduction de la loi de Kirchhoff

lement absorbée par le corps gris (AE_0). Le reste, reflété par le corps gris, est absorbé par le corps noir.

Lorsque les températures des corps s'égalisent, l'échange de chaleur se poursuit, mais avec un effet nul (sous ces conditions, dans le cas de la convection ou de la conductivité thermique, le transfert de chaleur s'arrête):

$$q = 0; \; E = AE_0,$$

ou

$$E/A = E_0. \qquad \text{(IX.20)}$$

Le résultat obtenu peut être extrapolé à tout nombre de corps

$$E_1/A_1 = E_2/A_2 = \ldots = E_0. \qquad \text{(IX.21)}$$

Le rapport de l'énergie du rayonnement d'un corps à son pouvoir d'absorption est le même pour tous les corps et égal à l'énergie du corps noir à la même température. Ce rapport n'est fonction que de la température.

Etant donné que

$$E = \varepsilon\sigma_0 T^4,$$

en vertu de (IX.21)

$$\varepsilon\sigma_0 T^4/A = \sigma_0 T^4,$$

ou

$$\varepsilon = A. \qquad \text{(IX.22)}$$

Par conséquent, le degré de noirceur d'un corps est numériquement égal au pouvoir d'absorption à la température donnée. On peut en tirer la conclusion que l'énergie du rayonnement des corps gris est inférieure à celle du corps noir. De la sorte, quelle que soit la température, l'énergie du rayonnement du corps noir est maximale. Les corps à faible pouvoir d'absorption possèdent un faible pouvoir émissif et inversement. C'est ce qui fait que pour améliorer les propriétés d'isolation, les parois des thermos et des vases Dewar sont couvertes d'un amalgame d'aluminium et d'argent (pour l'argent $\varepsilon = 0{,}02$ à $0{,}03$; pour l'aluminium poli, $\varepsilon = 0{,}04$ à $0{,}06$).

L'expression (IX.21) de la loi de Kirchhoff est justifiée pour le rayonnement intégral. Mais cette loi peut aussi être extrapolée aux émetteurs monochromatiques

$$E_{1\lambda}/A_{1\lambda} = E_{2\lambda}/A_{2\lambda} = \ldots = E_{0\lambda}, \qquad \text{(IX.23)}$$

c'est-à-dire le rapport de l'énergie du rayonnement d'un corps, la longueur d'onde étant fixée, à son pouvoir d'absorption pour la même longueur d'onde et la même température, est le même pour tous les corps et dépend seulement de la longueur d'onde et de la température.

Il convient de souligner que la loi de Kirchhoff est déduite pour les conditions d'équilibre thermique, lorsque les températures de l'émetteur et du récepteur sont les mêmes, et elle n'est vérifiée que pour ce cas.

Nous avons déjà dit que la notion du corps noir joue un grand rôle aussi bien dans la théorie de l'échange thermique radiatif, que dans les applications techniques. Les exemples peuvent être fournis par les températures de brillance, de radiation et de couleur. Les liaisons fonctionnelles entre ces notions et la température de l'émetteur déduites à partir des lois de rayonnement du corps noir sont à la base des méthodes optiques de la mesure des températures élevées.

On appelle *température de brillance* celle du corps noir à laquelle l'intensité spectrale d'une longueur d'onde définie est égale à l'intensité spectrale du corps considéré à la même longueur d'onde. Par définition

$$I_\lambda = I^{\mathrm{b}}_{0\lambda}.$$

En utilisant (IX.10), calculons l'intensité du rayonnement du corps porté à la température T:

$$I_\lambda = \varepsilon_\lambda C_1 \lambda^{-5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T}\right).$$

Pour qu'un corps noir possède la même intensité de rayonnement, il faut le chauffer jusqu'à la température T_b:

$$I_{0\lambda} = C_1 \lambda^{-5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T_b}\right).$$

En égalant les deuxièmes membres des deux dernières équations et en réalisant les transformations nécessaires, on obtient

$$\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T} = \frac{\lambda}{C_2} \ln \frac{1}{\varepsilon^\lambda}.$$

Plus le degré de noirceur (ε_λ) est petit, plus la différence entre la température réelle et la brillance est grande; puisque $0 < \varepsilon_\lambda < 1$, la température de brillance T_b est toujours inférieure à la température réelle T.

On appelle température de *radiation* une température conventionnelle que devrait avoir un corps pour que son rayonnement soit noir. Par conséquent, en vertu de (IX.12)

$$\varepsilon\sigma_0 T^4 = \sigma_0 T_r^4$$

ou

$$T = T_r \varepsilon^{-0,25}.$$

On appelle température *de couleur* celle du corps noir à laquelle les répartitions de l'intensité spectrale et de l'intensité de rayonnement du corps considéré coïncident pratiquement dans la marge visible du spectre. Pour déterminer la température de couleur, on utilise le rayonnement monochromatique du corps qui correspond à deux longueurs d'onde différentes à la température T. Cette relation doit être également la même pour le corps noir aux mêmes longueurs d'onde, mais déjà à la température T_c. Ainsi

$$\frac{I_{\lambda 1}}{I_{\lambda 2}} = \frac{I^c_{0\lambda 1}}{I^c_{0\lambda 2}}.$$

En y portant les valeurs de I tirées de (IX.10), on aboutit à l'égalité

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_c} = \frac{\ln \varepsilon_{\lambda_1}/\varepsilon\lambda_2}{C_2 (1/\lambda_1 - 1/\lambda_2)}.$$

La température de couleur T_c est toujours quelque peu supérieure à la température réelle T.

§ IX.3. Echange de chaleur radiatif entre deux corps solides séparés par un milieu diathermique

1. Problème de deux plaques parallèles

Calculons la quantité de chaleur échangée entre deux corps dont les surfaces sont parallèles. Supposons que les longueurs d'onde du rayonnement des deux corps reposent dans la même marge spectrale arbitraire, la distance entre les corps est telle que le rayon émis par l'un des corps frappe nécessairement l'autre, et l'étendue de chaque surface est très grande. Autrement dit, on peut négliger les pertes en énergie lumineuse. D'autre part, pour chaque corps on peut écrire

$$A + R = 1;\ D = 0.$$

Les températures des corps sont différentes: $T_1 \neq T_2$.

Examinons le comportement de l'énergie émise par le corps *1* (fig. IX.10). Le corps *1* émet E_1; on en tire que le corps *2* absorbe

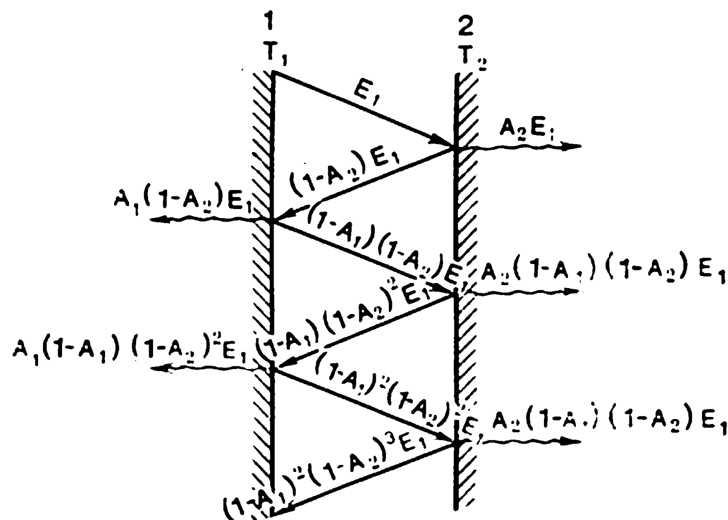


Fig. IX.10. Echange de chaleur radiatif entre deux plaques parallèles

E_1A_2 et reflète E_1R_2. De ce que reflète le corps 2, le corps *1* absorbe $E_1R_2A_1$ et reflète $E_1R_1R_2$. De cette quantité d'énergie le corps *2* absorbe $E_1R_1R_2A_2$ et reflète $E_1R_1R_2^2$. A son tour, le corps *1* absorbe de là $E_1R_1R_2^2A_1$ et reflète $E_1R_1^2R_2^2$, etc.

Exactement les mêmes raisonnements peuvent se faire pour l'énergie émise par le corps *2*. A cet effet il suffit d'intervertir les indices dans les expressions précédentes: le corps *2* émet E_2, d'où le corps *1* absorbe E_2A_1 et reflète E_2R_1. Alors le corps *2* absorbe de ce rayonnement $E_2R_1A_1$ et reflète $E_2R_1R_2$, etc.

Supposons que la température de surface du corps *1* est plus grande: $T_1 > T_2$. Alors, le flux résultant de l'énergie rayonnante est dirigé dans le sens du corps *2* qui est récepteur de la radiation, et le

corps *1* en est l'émetteur. Pour trouver l'énergie que reçoit le récepteur sous l'effet de l'échange réciproque, il faut établir son bilan thermique.

Le corps *2* reçoit une partie de l'énergie du rayonnement du corps *1*, une partie de l'énergie du rayonnement propre reflétée par le corps *1* et de nouveau absorbée par la surface du récepteur, moins le rayonnement propre. Ainsi,

$$Q = Q_1 + Q_2^0 - Q_2.$$

Calculons la quantité d'énergie émise par le corps *1* et absorbée par le corps *2*

$$Q_1 = F\,[E_1A_2 + E_1A_2R_1R_2 + E_1A_2R_1^2R_2^2 + \ldots],$$

ou

$$Q_1 = FE_1A_2\,[1 + R_1R_2 + R_1^2R_2^2 + \ldots].$$

Si $R_1R_2 = p < 1$, la somme des termes de la série géométrique décroissante à l'infini

$$\frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-R_1R_2}.$$

Donc

$$Q_1 = E_1A_1F/(1 - R_1R_2).$$

La quantité d'énergie du rayonnement propre du corps *2* qui lui revient pour être absorbée de nouveau est

$$Q_2^0 = F\,(E_2A_2R_1 + E_2A_2R_1^2R_2 + E_2A_2R_1^3R_2^2 + \ldots),$$

ou

$$Q_2^0 = E_2A_2R_1F/(1 - R_1R_2).$$

La quantité d'énergie émise par le corps 2

$$Q_2 = E_2F.$$

L'apport d'énergie totale dans le bilan du corps *2*

$$Q = F\,[E_1A_2/(1 - R_1R_2) + E_2A_2R_1/(1 - R_1R_2) - E_2],$$

ou

$$Q = \frac{F}{1-R_1R_2}\,[E_1A_2 + E_2A_2R_1 - E_2(1 - R_1R_2)].$$

Mais $A_2 = (1 - R_2)$; donc

$$Q = \frac{F}{1-R_1R_2}\{E_1A_2 + E_2\,[(1 - R_2)\,R_1 - (1 - R_1R_2)]\}. \qquad \text{(IX.24)}$$

Ouvrons les crochets du deuxième membre

$$Q = \frac{F}{1-R_1R_2}\,[E_1A_2 + E_2(R_1 - R_1R_2 - 1 + R_1R_2)].$$

En vertu de $(1 - R_1) = A_1$, on obtient après des transformations peu compliquées

$$Q = \frac{E_1 A_2 - E_2 A_1}{1 - R_1 R_2} F. \qquad \text{(IX.25)}$$

Développons le dénominateur du deuxième membre de l'égalité obtenue

$$1 - R_1 R_2 = 1 - (1 - A_1)(1 - A_2) = A_1 + A_2 - A_1 A_2,$$

mais puisque

$$\varepsilon = A_1;\ C = \varepsilon C_0;\ A_1 = C_1/C_0;\ A_2 = C_2/C_0,$$

il vient

$$1 - R_1 R_2 = C_1/C_0 + C_2/C_0 - C_1 C_2/C_0^2.$$

En retenant la valeur

$$E_1 = C_1 (T_1/100)^4;\ E_2 = C_2 (T_2/100)^4;$$

reprenons la relation (IX.25)

$$Q = \frac{1}{C_1/C_0 + C_2/C_0 - C_1 C_2/C_0^2} [C_1 (T_1/100)^4 - C_2 (T_2/100)^4] F,$$

ou

$$Q = \frac{C_1 C_2}{C_0} \frac{1}{C_1/C_0 + C_2/C_0 - C_1 C_2/C_0} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par $C_1 C_2/C_0$, on obtient

$$Q = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 - 1/C_0} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F.$$

Le premier facteur du deuxième membre s'appelle *coefficient de radiation réduit*

$$\frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 - 1/C_0} = C_{\text{réd}}.$$

Finalement,

$$Q = C_{\text{réd}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F. \qquad \text{(IX.26)}$$

Le coefficient réduit comprend, en plus des coefficients de l'émetteur et du récepteur, le coefficient de radiation du corps noir. Si l'émetteur et le récepteur sont des corps noirs, la valeur de C est maximale. Mais si l'un des corps seulement est noir, le coefficient de radiation réduit est égal au coefficient de radiation du corps gris.

32—01289

Etant donné que $C/C_0 = \varepsilon$, le coefficient de radiation réduit peut être remplacé par le degré de noirceur réduit:

$$\varepsilon_{réd} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + 1/\varepsilon_2 - 1}.$$

Dans ce cas l'expression (IX.26) devient

$$Q = \varepsilon_{réd} 5{,}67\ [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4]\ F.$$

Dans les calculs techniques on utilise généralement la notion de degré de noirceur réduit.

2. Echange de chaleur radiatif entre un corps et une enveloppe

Considérons l'échange de chaleur radiatif entre deux corps dont l'un enveloppe complètement l'autre (fig. IX.11), la forme des deux corps, tout comme la position *1* à l'intérieur de l'enveloppe, étant sans importance. Une seule condition seulement est imposée: la surface du corps *1* est partout convexe (il ne peut pas rayonner vers lui-même) et celle de l'enveloppe partout concave.

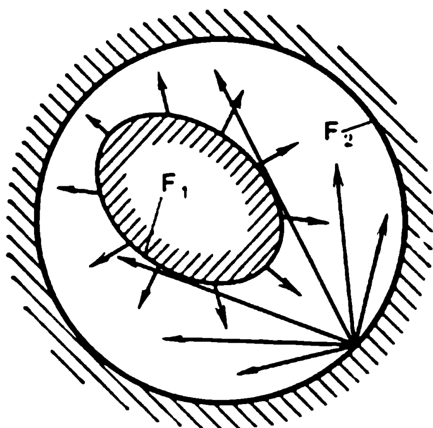


Fig. IX.11. Echange de chaleur radiatif entre un corps F_1 et une enveloppe F_2

Pour les deux corps $A + R = 1$, le rayonnement est diffusé, les températures des corps sont différentes. La marche des raisonnements est la même que dans le problème précédent. Il faut seulement tenir compte de la circonstance suivante: le premier corps reçoit seulement la part $\beta E_1 R_2$ de l'énergie reflétée par l'enveloppe, alors que le reste, égal à $(1 - \beta)\ E_1 R_2$, passe outre et vient frapper de nouveau la surface de l'enveloppe. Alors, l'expression obtenue pour le problème qui vient d'être examiné

$$1 - (1 - A_1)(1 - A_2) = A_1 + A_2 - A_1 A_2$$

devient

$$1 - (1 - \beta A_1)(1 - A_2) = \beta A_1 + A_2 - \beta A_1 A_2. \tag{IX.27}$$

De l'équation (IX.25) on tire aussi bien la quantité de chaleur absorbée par l'enveloppe à partir du rayonnement du premier corps [compte tenu de l'expression (IX.27)]:

$$Q_1 = \frac{E_1 A_2 F_1}{\beta A_1 + A_2 - \beta A_1 A_2},$$

que la quantité de chaleur émise par l'enveloppe et absorbée par le corps 1:

$$Q_2 = \frac{E_2 \beta A_2 F_2}{\beta A_1 + A_2 + \beta A_1 A_2}.$$

Maintenant pour calculer β adoptons provisoirement que $T_1 = T_2$; alors, $Q_1 = Q_2$ et $F_1 = \beta F_2$, ou $\beta = F_1/F_2$. La quantité de chaleur échangée réellement à $T_1 \neq T_2$ par unité de temps par les corps *1* et *2* se calcule de la façon suivante:

$$Q = \frac{E_1 A_2 - E_2 A}{A_2 + \beta A_1 (1 - A_2)} F_1. \qquad \text{(IX.28)}$$

En retenant que

$A_1 = C_1/C_0$; $A_2 = C_2/C_0$; $E_1 = C_1 (T_1/100)^4$;

$E_2 = C_2 (T_2/100)^4$

récrivons l'équation (IX.28):

$$Q = \frac{1}{C_2/C_0 + \beta [C_1/C_0 - C_1 C_2/C_0^2]} \left[\frac{C_1 C_2}{C_0} \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \frac{C_1 C_2}{C_0} \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1.$$

Après les transformations

$$Q = \frac{1}{1/C_1 + (F_1/F_2) [1/C_2 - 1/C_0]} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F_1,$$

ou

$$Q = C'_{\text{réd}} F_1 [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4],$$

où

$$C'_{\text{réd}} = \frac{1}{1/C_1 + (F_1/F_2) (1/C_2 - 1/C_0)}.$$

Tout comme dans le problème précédent, le coefficient de radiation réduit peut être remplacé par le degré de noirceur réduit

$$\varepsilon'_{\text{réd}} = \frac{1}{1/\varepsilon_1 + (F_1/F_2) (1/\varepsilon_2 - 1)}.$$

Et finalement

$$Q = \varepsilon'_{\text{réd}} \cdot 5{,}67 [(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4] F_1. \qquad \text{(IX.29)}$$

Il convient de noter que si $F_2 \gg F_1$, alors $C'_{\text{réd}} = C_1$ et $\varepsilon'_{\text{réd}} = \varepsilon_1$.

3. Ecrans de protection

Le rayonnement étant défini par la température, la quantité de l'énergie radiative peut être réglée en agissant sur la température de l'émetteur. Mais il arrive souvent que cette température ne se prête pas à la diminution et on ne peut pas ainsi affaiblir le flux lumineux. Alors, on utilise des écrans. Pour la protection contre le rayonnement thermique on emploie des écrans en matériaux à grand pouvoir réflectif et à faible pouvoir d'absorption.

Supposons qu'entre deux grandes surfaces planes parallèles *1* et 2 est placé un écran E en matériau si mince qu'on peut négliger la différence des températures de ses surfaces. Admettons qu'on puisse également négliger le transfert de chaleur par convection entre les surfaces rayonnantes.

Cherchons d'abord la quantité de chaleur q_0 échangée par les surfaces sans l'écran, puis la quantité de chaleur q_1 échangée par elles après sa pose.

Envisageons deux cas.

1. Les surfaces des corps *1* et *2*, tout comme les deux surfaces de l'écran, ont le même coefficient de radiation C_1. Le coefficient de radiation réduit du système peut donc s'écrire

$$C_{\text{réd}} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_1 - 1/C_0}.$$

Le flux de chaleur résultant dirigé du corps *1* vers le corps *2* sans l'écran est

$$q_0 = C_{\text{réd}}\,[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4].$$

Lorsque entre les corps *1* et *2* on place un écran, le flux thermique résultant a pour expression

$$q_1 = C_{\text{réd}}\,[(T_1/100)^4 - (T_é/100)^6] = C_{\text{réd}}\,[(T_é/100)^4 - (T_2/100)^4].$$

La dernière égalité entraîne que

$$(T_é/100)^4 = [(T_1/100)^4 + (T_2/100)^4]/2.$$

En portant la grandeur obtenue dans l'expression de q_1:

$$q_1 = C_{\text{réd}}\,[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4] = q_0/2.$$

Par conséquent, la pose d'un écran rend le flux thermique vers le corps *2* deux fois plus faible.

La solution obtenue peut être extrapolée au cas de 2, 3, . . ., n écrans:

$$q_n = q_0/\,(n + 1). \qquad \text{(IX.30)}$$

De la sorte, en présence de n écrans, le flux thermique résultant dirigé sur le récepteur de rayonnement diminue de $n+1$ fois.

2. Considérons le cas où le coefficient de radiation des deux surfaces des corps est toujours C_1, et que celui des surfaces de l'écran est $C_é$.

Alors, le coefficient de radiation réduit du système de deux corps en l'absence d'un écran s'écrit

$$C_{\text{réd } 0} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_1 - 1/C_0}$$

et le flux thermique résultant du corps *1* vers le corps *2*

$$q_0 = C_{\text{réd} 0}\,[(T_1/100)^4 - (T_2/100)^4].$$

L'introduction dans le système de l'écran change le coefficient de radiation réduit du système

$$C_{\text{réd } 1} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_é - 1/C_0},$$

et le flux thermique radiatif entre le corps et l'écran devient

$$q_1 = C_{\text{réd} 1}\,[(T_1/100)^4 - (T_é/100)^4] =$$
$$= C_{\text{réd } 1}\,[(T_é/100)^4 - (T_2/100)^4].$$

La température de l'écran est, comme dans le premier cas,

$$\left(\frac{T_é}{100}\right)^4 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]$$

et le flux thermique

$$q_1 = \frac{1}{2} C_{\text{réd } 1}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right].$$

De la sorte,

$$\frac{q_1}{q_0} = \frac{1}{2}\,\frac{C_{\text{réd } 1}}{C_{\text{réd } 0}} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_{\text{réd } 1}}{\varepsilon_{\text{réd } 0}}. \qquad \text{(IX.31)}$$

Par conséquent, le flux thermique résultant dépend non seulement du nombre d'écrans, comme cela a été démontré ci-dessus, mais encore de la relation entre les propriétés optiques des surfaces émettrices et de l'écran. Cette relation est déterminée quantitativement par la relation entre le pouvoir d'absorption réduit (degré de noirceur) de la source et du récepteur et le pouvoir d'absorption réduit (degré de noirceur) de l'écran.

Pour le calcul de l'échange thermique radiatif, la distance de l'écran aux surfaces émettrices n'a aucune importance. Pour calculer le flux thermique total, il faut tenir compte du transfert de chaleur aussi bien par conductivité que par convection dans le milieu qui constitue l'espace entre l'écran et les corps émetteurs.

4. Echange de chaleur radiatif entre les éléments des surfaces de chauffe disposés arbitrairement

Ordinairement les corps qui échangent la chaleur radiative sont disposés dans l'espace arbitrairement l'un par rapport à l'autre. On peut donc extraire à la surface de chaque corps des éléments caractéristiques et examiner l'interaction thermique qui les sollicite.

Fig. IX.12. Déduction de la formule du coefficient angulaire

Soient dF_1 et dF_2 les éléments des surfaces arbitrairement disposés dans l'espace, dont les températures sont respectivement T_1 et T_2 (fig. IX.12). Les pouvoirs absorbants de ces éléments sont A_1 et A_2, les coefficients de radiation $C_1 = \varepsilon_1 C_0 = A_1 C_0$ et $C_2 = \varepsilon_2 C_0 A_2 C_0$. La distance entre les centres des éléments est r, et les angles entre r et les normales aux plans des éléments, φ_1 et φ_2.

Maintenant, l'angle de vision dF_1 à partir de dF_2

$$d\omega = dF_2 \cos \varphi_2 / r^2.$$

L'énergie émise par diffusion par l'élément dF_1 vers dF_2 peut se calculer d'après la loi de Lambert (IX.19)

$$dQ_1 = \frac{E_1}{\pi} dF_1 \, d\omega_1 \cos \varphi_1.$$

ou

$$dQ_1 = C_1 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right) \right]^4 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 \, dF_2. \qquad \text{(IX.32)}$$

L'énergie absorbée par le deuxième élément

$$dQ_{2\text{-}1} = A_2 \, dQ_1 = \frac{C_1 C_2}{C_0} \left[\frac{T_1}{100} \right]^4 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 \, dF_2.$$

En admettant que le degré de noirceur des éléments de la surface soit élevé, l'énergie de rayonnement du deuxième corps vers le premier, absorbée par ce dernier, se calcule d'après l'expression

$$dQ_{1\text{-}2}=\frac{C_1C_2}{C_0}\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\pi r^2}\,dF_1\,dF_2.$$

Ainsi, la quantité de chaleur échangée entre les éléments des surfaces s'écrit

$$\partial Q=\partial Q_{2-1}-\partial Q_{1-2},$$

ou

$$dQ=\frac{C_1C_2}{C_0}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\pi r^2}\,dF_1\,dE_2.$$

d'où l'on tire

$$dQ=C''_{\text{réd}}\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\right]\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\pi r^2}dF_1\,dF_2. \quad \text{(IX.33)}$$

où $C''_{\text{réd}}=C_1C_2/C_0$.

En intégrant (IX.33) par rapport à F_1 et F_2, on obtient

$$Q=C^{4}_{\text{réd}}\left(\frac{T_1}{100}\right)^4-\left(\frac{T_2}{100}\right)^4\Bigg]\int\limits_{F_1}dF_1\int\limits_{F_2}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\pi r^2}dF_2. \quad \text{(IX.34)}$$

Pour résoudre l'équation obtenue, la tâche la plus compliquée est de calculer le groupement

$$F_{12}=\int\limits_{F_1}dF_1\int\limits_{F_2}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\pi r^2}dF_2. \quad \text{(IX.35)}$$

Celui-ci a la dimension de la surface et s'appelle *surface de radiation mutuelle*. Par conséquent, le problème de calcul de l'échange de chaleur radiatif entre deux corps placés arbitrairement dans l'espace se ramène, au fond, à la recherche de la valeur de la surface de radiation mutuelle F_{12}.

Le rapport du flux de rayonnement émis par la surface d'un corps vers celle d'un autre corps au flux total de rayonnement propre émis par toute la surface du premier corps dans les directions les plus différentes dans les limites de l'angle solide demi-sphérique s'appelle *coefficient de radiation angulaire moyen* ou *coefficient d'irradiation* noté φ_{ik}. Par définition, pour deux surfaces de chauffe

$$\varphi_{12}=Q_{12}/Q_1;\ \varphi_{21}=Q_{21}/Q_2. \quad \text{(IX.36)}$$

Si le flux thermique radiatif total à partir du corps *1* peut s'écrire

$$Q=C_1\,(T_1/100)^4F_1,$$

et le flux de rayonnement du corps *1* vers le corps *2* déduit de (IX.39) comme

$$Q_{12}=C\left(\frac{T_1}{100}\right)^4\int\limits_{F_1}dF_1\int\limits_{F_2}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2}{\pi r^2}dF_2,$$

la relation (IX.36) permet de tirer que $\varphi_{12}=F_{12}/F_1$.

D'une façon analogue $\varphi_{21} = F_{12}/F_2$.

Les deux dernières expressions donnent l'équation de mutualité des coefficients angulaires

$$\varphi_{12}F_1 = \varphi_{21}F_2. \tag{IX.37}$$

Cette équation est justifiée sous la condition que les flux radiatifs émis par les surfaces qui participent aux échanges thermiques sont diffusés. Les valeurs des flux ne changent pas suivant les surfaces correspondantes.

Lorsqu'on examine l'échange de chaleur radiatif dans un système à n surfaces, on peut écrire pour chaque couple de surfaces

$$\varphi_{ik}F_i = \varphi_{ki}F_k,$$

où $i = 1, 2, 3, \ldots, n$; $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

En général, lorsque la surface d'un corps possède une concavité, elle rend possible l'auto-irradiation ($i = k$); il vient

$$\varphi_{ii} = Q_{ii}/Q_i.$$

Si les corps forment un système fermé, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik} = 1.$$

La somme comprend également le terme φ_{ii}.

Les flux thermiques radiatifs émis par les surfaces de certains corps vers d'autres corps peuvent se calculer en appliquant la notion des coefficients angulaires

$$Q_{ik} = \varphi_{ik}Q_i.$$

§ IX.4. Echange de chaleur radiatif dans les milieux absorbant et émetteur

1. Particularités du rayonnement des milieux semi-transparents

Dans les sections précédentes nous avons envisagé le transfert de l'énergie du rayonnement entre les surfaces des corps solides séparés par un milieu transparent (diathermique). Le vrai milieu diathermique, c'est-à-dire incapable d'interagir avec le rayonnement, est le vide absolu. Pourtant, dans de nombreux cas, un espace rempli de gaz peut également être considéré comme diathermique, transparent. Un grand rôle en technique commencent à jouer également des dispositifs qui possèdent des volumes remplis de milieux actifs par rapport au rayonnement, c'est-à-dire de milieux susceptibles d'émettre, d'absorber et de diffuser un rayonnement électromagné-

tique. Ces milieux sont dits *semi-transparents*. Parmi ces derniers il y en a trois qui présentent un intérêt particulier.

Milieux de gaz. Le rayonnement thermique des gaz, c'est-à-dire l'émission des ondes électromagnétiques sous l'effet des impacts des molécules dans leur mouvement thermique chaotique, apparaît seulement lorsque l'énergie de la collision dépasse celle de la transition de la molécule (atome, électron) d'un niveau énergétique à un autre. Ceci est également vrai pour l'absorption du rayonnement par les gaz. Les transitions énergétiques dans les molécules de gaz peuvent avoir des formes différentes: oscillatoires (variation de la distance moyenne entre les atomes dans la molécule), rotatoires, électroniques (lors de l'ionisation). L'émission ou l'absorption de l'énergie électromagnétique dans les transitions oscillatoires et rotatoires sont possibles si les molécules de gaz sont électriquement asymétriques. L'énergie de ces transitions est telle que le rayonnement correspondant repose dans les domaines infrarouge et infrarouge lointain (parfois même dans celui des micro-ondes radio) du spectre. Les transitions oscillatoires et rotatoires peuvent être excitées à des températures relativement modérées (jusqu'à plusieurs centaines de kelvins).

Pour les molécules symétriques des gaz tels que O_2, H_2, N_2, etc., ainsi que pour les particules monoatomiques (gaz inertes, vapeurs des métaux), le rayonnement n'est possible que dans les transitions électroniques (transitions liées-liées d'un électron d'une orbite à une autre, ou transitions liées-libres lors d'une dissociation ou ionisation). Le rayonnement qui correspond à ces transitions repose généralement dans la gamme ultraviolette du spectre, et leur énergie est si grande que dans la plupart des gaz elles ne sont excitées qu'à des températures très élevées atteignant des milliers de degrés. On dit souvent que les gaz simples (azote, hydrogène, hélium, etc.) sont transparents pour le rayonnement thermique, et dans les calculs on prend en compte seulement le rayonnement des gaz multiatomiques à molécules asymétriques: gaz carbonique, vapeur d'eau, ammoniac, hydrocarbures, etc. Il convient, pourtant, de retenir que ces affirmations sont conventionnelles: aux températures de l'ordre 5 000 à 10 000 K et plus élevées les gaz simples deviennent également « semi-transparents ».

Les gaz sans poussière ne peuvent pas diffuser ou réfléchir le rayonnement, leurs propriétés radiatives sont déterminées par les caractéristiques d'absorption qui dépendent de la fréquence du rayonnement et de l'état du gaz, ainsi que de la géométrie du volume enfermant le gaz. Les transitions oscillatoires, rotatoires et électroniques dont les gaz sont le siège à des températures modérées ne marchent qu'entre les niveaux « permis »; l'énergie des photons émis en cours des transitions repose dans des limites relativement serrées, c'est-à-dire l'énergie du rayonnement d'un gaz est concentrée

dans quelques bandes étroites des fréquences des oscillations électromagnétiques. Pour l'absorption du rayonnement par un gaz la marche du processus est analogue : l'énergie est absorbée seulement dans des bandes des fréquences qui correspondent à l'énergie des transitions permises. On dit donc que l'émission et l'absorption des gaz sont sélectives. Le nombre et la position des bandes dans le spectre sont déterminés par la nature du gaz, alors que la largeur

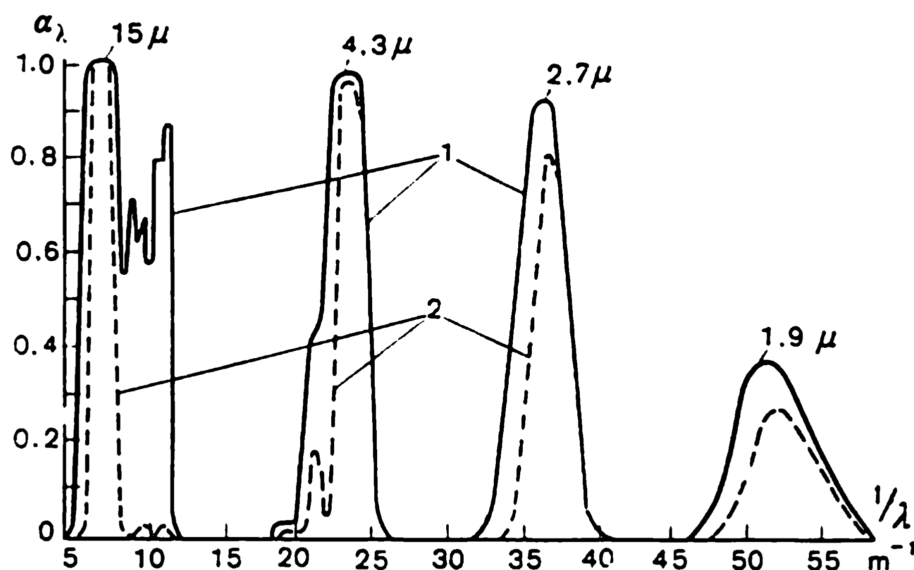


Fig. IX.13. Relation entre le pouvoir absorbant du gaz carbonique d'une part et la longueur d'onde et la température de l'autre :
1 — $T = 830$ K ; *2* — $T = 3000$ K

des bandes et la distribution de l'intensité d'émission et d'absorption suivant la fréquence dans les limites de la bande, par l'état du gaz (température, pression) et le parcours des rayons dans le gaz.

Les processus d'ionisation et de recombinaison des molécules et des atomes de gaz, qui peuvent avoir lieu à des températures suffisamment élevées, donnent lieu à des transitions libres-libres, lorsque le photon émis (absorbé) peut pratiquement avoir n'importe quelle énergie, et le rayonnement qui lui correspond, n'importe quelle fréquence. C'est pourquoi la température du gaz allant en augmentant, dans son spectre les zones continues d'émission et d'absorption de l'énergie rayonnante jouent un rôle de plus en plus important.

La figure IX.13 représente le spectre d'absorption du gaz carbonique, et la figure IX.14, celui de l'air à température élevée et pressions différentes. Les courbes montrent à quel point la variation, en fonction de la fréquence, de la pression et de la température, du coefficient d'absorption des gaz est forte et irrégulière. Ceci rend

très difficile, et parfois incertaine, l'utilisation des données spectrales pour le calcul pratique de l'échange de chaleur radiatif. Il s'avère plus commode d'employer les caractéristiques spectrales ou intégrales du degré de noirceur du volume de gaz $\varepsilon_{g\nu}$ (IX.55) et ε_g (IX.58),

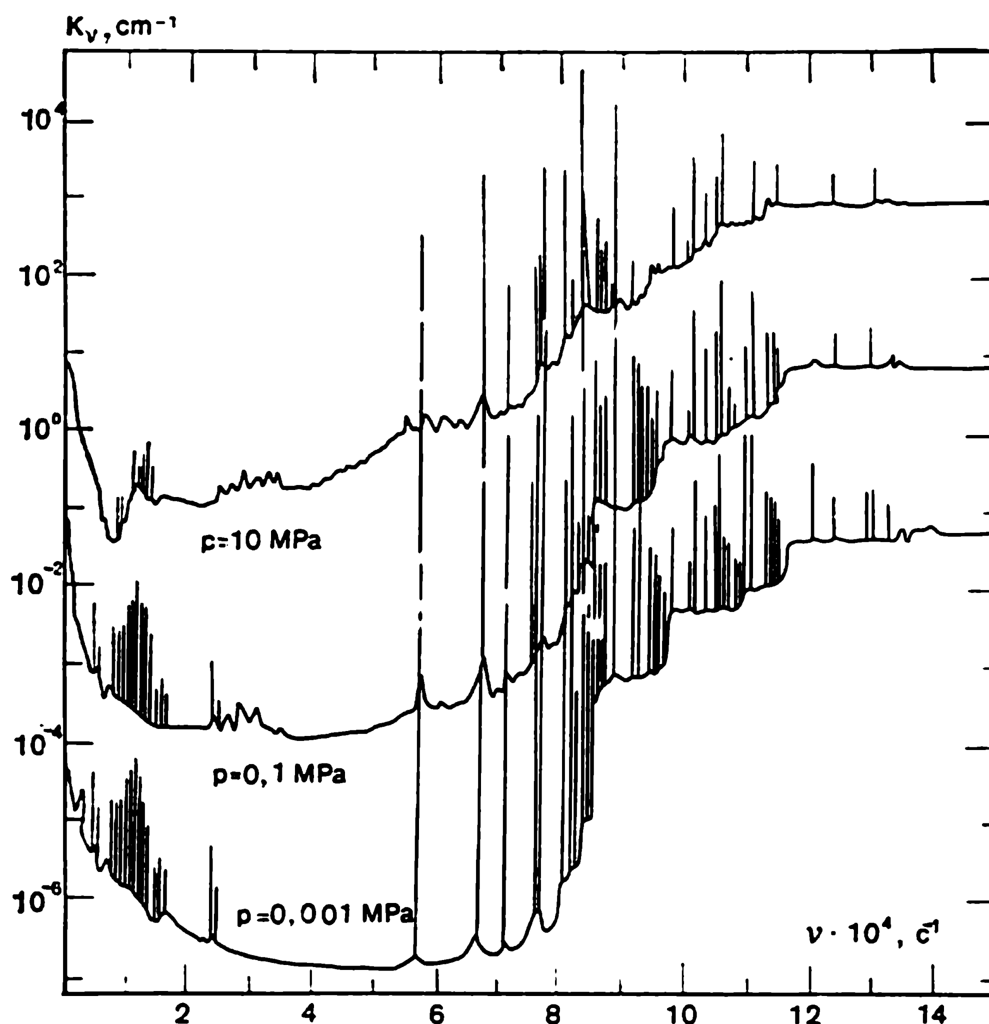


Fig. IX.14. Relation entre le coefficient d'absorption de l'air et la fréqunece pour $T = 10\,000$ K et des pressions différentes:
lignes verticales correspondent aux raies spectrales où l'absorption est de 2 à 4 ordres plus forte que dans les domaines voisins du spectre

cette dernière pouvant s'obtenir soit par intégration des courbes spectrales par rapport à la fréquence, soit expérimentalement, en mesurant le flux rayonnant émis par le gaz.

Milieux empoussiérés. On dit empoussiérés, ou plus exactement biphasés, pour des milieux dans lesquels les particules solides et plus rarement liquides sont en suspension dans un gaz diathermique ou émetteur. Les dimensions des particules peuvent être les plus variées, depuis quelques millimètres jusqu'à quelques microns. Les

cas typiques sont pourtant ceux des dimensions des particules sensiblement supérieures à la longueur moyenne des ondes du rayonnement thermique à la température donnée. Les exemples typiques de tels milieux sont donnés par les produits de combustion des combustibles naturels solides comportant des particules en suspension de cendre et de combustible qui brûle.

Flamme lumineuse. Ce milieu semi-transparent constitue un flux de gaz émetteurs mélangés aux particules émettrices solides. A la différence des milieux empoussiérés, la flamme contient des particules émettrices dont les dimensions sont commensurables avec les rayons d'onde du rayonnement thermique ou plus petites, depuis des fractions de micron jusqu'à des centaines d'angstrœms. Ce sont des particules de suie produites par la combustion sous l'effet de la décomposition thermique des molécules des hydrocarbures.

Les flux empoussiérés et la flamme (ainsi que les aérosols) se distinguent par le pouvoir de diffuser sensiblement le rayonnement qui les traverse, ce qui fait dire qu'ils sont troubles *).

2. Caractéristiques du rayonnement et de l'absorption volumiques

Dans le cas général, un milieu semi-transparent peut émettre un rayonnement propre et absorber ou diffuser le rayonnement incident pénétrant du dehors à travers la frontière du volume. L'interaction du rayonnement avec la matière du milieu au sein du volume détermine la formation du champ de rayonnement caractérisé par une distribution définie de l'énergie électromagnétique suivant les fréquences et l'espace.

Tout comme dans le cas de l'émission à partir de la surface d'un corps opaque, le rayonnement volumique peut avoir une caractéristique *spectrale* (monochromatique) associée à l'émission à la fréquence donnée (plus précisément, à l'émission comprise dans un intervalle infiniment petit de fréquences de ν à $\nu + d\nu$) et *totale* (intégrale) relative à toute la gamme de fréquences. Dans le cas des grandeurs additives, le passage des caractéristiques spectrales aux caractéristiques intégrales se fait par simple intégration de la grandeur spectrale par rapport à la fréquence, comme, par exemple, c'était le cas du passage de la formule de Planck (IX.8) à celle de Stefan-Boltzmann (IX.12). Pourtant, le sens physique de nombreuses grandeurs rend impossible la sommation de cette sorte et impose l'introduction de certaines valeurs « efficaces » conventionnelles vérifiant les lois compliquées de mise en moyenne. Des exemples peuvent en être fournis par les coefficients d'absorption intégraux

*) On rapporte également aux milieux semi-transparents certains corps solides (verre, cristaux) et liquides, surtout dans les couches relativement minces.

introduits dans ce qui suit, la longueur optique du rayon, etc. Dans ce qui suit on examine en premier lieu les caractéristiques spectrales affectées de l'indice ν.

La caractéristique la plus détaillée du rayonnement (sa brillance) dans le volume est l'*intensité spectrale* $I_{\nu, s}$ définie comme le flux d'énergie dQ_ν de fréquence donnée passant dans la direction s donnée (fig. IX.15) par une aire élémentaire dF_s perpendiculaire à la direction s, dans les limites d'un angle solide élémentaire $d\omega_s$, et rapporté à l'unité de surface, à l'unité de l'intervalle fréquentiel et à l'unité de l'angle solide:

$$I_{\nu, s} = \frac{dQ_\nu}{dF_s d\nu \, d\omega_s}. \quad \text{(IX.38)}$$

Dans le cas général, l'intensité de rayonnement dépend de la position du point dans le volume du milieu, de la fréquence, de la direction dans laquelle est envisagé le flux. Dans les processus non stationnaires elle dépend également du temps.

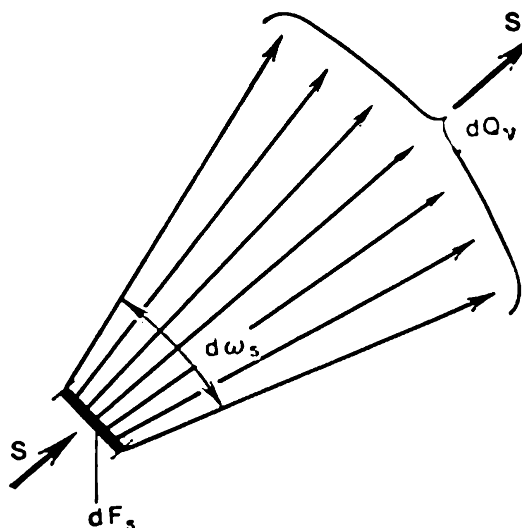


Fig. IX.15. Illustration de la notion d'intensité du rayonnement dirigée

Après avoir trouvé l'intensité de rayonnement en chaque point du volume pour toutes les directions et fréquences, on peut calculer toutes les autres caractéristiques du rayonnement, y compris la quantité de l'énergie transmise par le volume à la surface qui l'entoure, ou de la surface qui l'entoure au volume, ainsi que transmise par certaines zones de la surface à d'autres zones.

Le *rayonnement propre* du milieu se compose du rayonnement spontané produit par les transitions aléatoires des particules à partir des états excités et à des états énergétiques inférieurs, et du rayonnement induit (forcé), dû aux transitions des particules à des niveaux inférieurs sous l'action d'un champ électromagnétique extérieur. Le rayonnement spontané dépend de la nature de la matière et de son état thermodynamique, et le rayonnement induit, encore de l'intensité du champ extérieur (du rayonnement incident). Le rayonnement propre peut, en général, avoir une distribution irrégulière suivant des directions différentes issues du volume donné. Du point de vue de calcul, il s'est avéré commode d'envisager le rayonnement induit comme une « absorption négative » et le prendre en compte avec l'absorption réelle. On entend donc, généralement, par rayonnement du milieu le rayonnement volumique spontané.

Le rayonnement spontané d'un volume élémentaire du milieu

est caractérisé par la valeur de la *densité angulaire* du rayonnement spontané volumique j_ν, égale au flux d'énergie de fréquences ν émis par unité de volume en unité de temps dans les limites d'un angle solide unitaire dans la direction donnée s:

$$j_\nu = \frac{dQ_\nu}{dV\,d\nu\,d\omega_s}. \qquad \text{(IX.39)}$$

Pour un milieu isotrope dans les conditions de l'équilibre thermodynamique l'émission de l'énergie ne dépend pas de la direction; donc, en multipliant la grandeur j_ν par l'angle solide total 4π qui

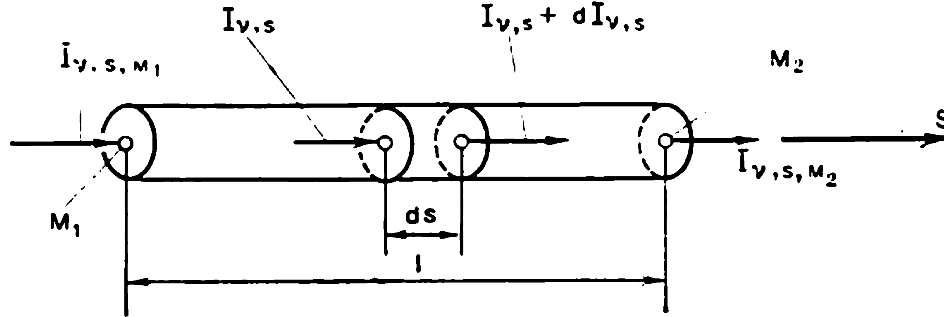


Fig. IX.16. Atténuation de l'intensité du rayonnement incident sur la trajectoire du rayon

entoure le volume élémentaire, on obtient ce qu'on appelle *densité spectrale volumique* du rayonnement spontané $\eta_{s\nu}$, qui est la quantité de l'énergie du rayonnement à la fréquence donnée émise par unité de volume en unité de temps dans toutes les directions:

$$\eta_{s\nu} = 4\pi j_\nu. \qquad \text{(IX.40)}$$

L'absorption et la diffusion du rayonnement qui passe par le volume dans la direction s (fig. IX. 16) affaiblissent le rayon suivant la *loi de Bouguer*, d'après laquelle la décroissance relative de l'intensité du rayonnement incident sur un parcours infiniment petit ds est proportionnelle du fait de son absorption et de sa diffusion à la longueur du parcours du rayon

$$\frac{dI_{\nu,\,s}}{I_{\nu,\,s}} = -K_\nu\,ds. \qquad \text{(IX.41)}$$

Le coefficient de proportionnalité K_ν est appelé *coefficient d'atténuation efficace* du milieu et constitue une somme des coefficients d'absorption α_ν et de diffusion β_ν efficaces:

$$K_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu \qquad \text{(IX.42)}$$

L'intégration de (IX.41) par rapport à la direction s suivant la longueur l du point M_1 jusqu'au point M_2 donne la valeur de la

partie de l'intensité du rayonnement qui frappe l'objet au point M_1 et qui passe non absorbée jusqu'au point M_2:

$$I_{\nu, s, M_2} = I_{\nu, s, M_1} \exp\left(-\int_0^l K_\nu \, ds\right). \qquad \text{(IX.43)}$$

L'exposant de (IX.43) s'appelle *longueur spectrale optique* du rayon dans le milieu d'atténuation

$$l_{K, \nu} = \int_0^l K_\nu \, ds. \qquad \text{(IX.44)}$$

Si les propriétés radiatives du milieu sont constantes dans tout le volume, alors $K_\nu = \text{const}$ et $l_{K,\nu} = K_\nu l = l_\nu$. Dans ce cas

$$I_{\nu, s, M_2} = I_{\nu, s, M_1} e^{-K_\nu l} = I_{\nu, s, M_1} e^{-l_\nu}. \qquad \text{(IX.45)}$$

La quantité générale d'énergie de fréquence ν qui frappe le volume à partir de toutes les directions et qui est absorbée par ce volume est définie par la *densité spectrale volumique* du rayonnement absorbé $\eta_{abs\,\nu}$

$$\eta_{abs\,\nu} = \alpha_\nu \int_{4\pi} I_{\nu, s} d\omega_s. \qquad \text{(IX.46)}$$

En présence de l'équilibre thermodynamique du milieu et du rayonnement, la quantité d'énergie absorbée par le volume élémentaire doit être égale à celle que le volume émet. Il faut alors retenir que l'intensité du rayonnement dans les conditions d'équilibre est exprimée par la loi de Planck (IX.1) et ne dépend pas de la direction. Dans ce cas l'intégration de (IX.46) conduit à la relation

$$\eta_{abs,\nu} = \alpha_\nu I_{0,\nu} \int_{4\pi} d\omega_s = 4\pi\alpha_\nu I_{0,\nu}. \qquad \text{(IX.47)}$$

Ainsi, la densité volumique du rayonnement spontané du milieu peut être exprimée à l'aide du coefficient d'absorption efficace du milieu et l'intensité du rayonnement noir

$$\eta_{s\,\nu} = \eta_{abs\,\nu} = 4\pi\alpha_\nu I_{0,\nu}. \qquad \text{(IX.48)}$$

L'équation (IX.48) traduit la *loi de Kirchhoff* pour le rayonnement volumique, en associant les caractéristiques émettrices et absorbatrices du milieu.

Dans les conditions réelles d'échange de chaleur radiatif l'équilibre thermodynamique ne se manifeste pas entre la matière et le rayonnement, la matière recevant l'excédent ou émettant l'énergie lumineuse $\eta_{abs,\nu} \neq \eta_{s\,\nu}$. En toute rigueur, dans ces conditions,

la loi de Kirchhoff n'est déjà plus observée. Les problèmes que pose le rayonnement de non-équilibre sont très compliqués et pas suffisamment élaborés. On adopte donc ordinairement dans les calculs l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local, d'après laquelle entre les particules élémentaires de la matière il existe en chaque point du volume un équilibre thermodynamique, malgré l'absence de cet équilibre entre la matière et le rayonnement. Dans ces conditions, les propriétés radiatives de la matière sont les mêmes que pour la température d'équilibre qui correspond à la température de la matière au point donné.

3. Equation du transfert de l'énergie du rayonnement dans un milieu semi-transparent

Lors du passage d'un point à un autre l'intensité du rayonnement change incessamment sous l'effet des processus d'absorption (c'est-à-dire de la transformation de l'énergie rayonnante en énergie du mouvement chaotique des microparticules du milieu), d'émission (c'est-à-dire de la transformation de l'énergie du mouvement thermique en énergie du rayonnement électromagnétique) et de diffusion qui marchent simultanément. La dominance de tel ou tel des processus mentionnés affaiblit ou accroît l'intensité du rayonnement dans le sens du rayon. Pour un volume élémentaire dV situé sur la trajectoire du rayon (fig. IX.17), l'équation du transfert de l'énergie radiative s'obtient par composition du bilan d'énergie du rayonnement compris dans l'intervalle fréquentiel de ν à $\nu + d\nu$ et se propageant dans la direction donnée. La grandeur qui nous intéresse est la variation de la quantité d'énergie du rayonnement entre la sortie du volume élémentaire et l'entrée dans ce volume (dans la direction s). Ecrivons d'abord le bilan d'énergie, en appelant chacun des termes incidents :

	Différence entre l'énergie du rayonnement issue du volume élémentaire dans la direction s et le frappant dans la même direction	=	Atténuation du flux initial sur le parcours ds par suite de l'absorption et de la diffusion efficaces	+
+	Renforcement du faisceau par rayonnement spontané à partir du volume élémentaire dans la direction s	+	Renforcement du flux par diffusion dans la direction s du rayonnement entré dans le volume élémentaire à partir de toutes les autres directions	

Le premier membre de l'équation du bilan est la variation de l'intensité du rayonnement

$$dQ_{\nu,s+ds} - dQ_{\nu,s} = dI_{\nu,s} dF_s d\omega_s,$$

où $dI_{\nu,s}$ est la variation sur le parcours ds de l'intensité du rayonnement caractérisé par la fréquence ν; dF_s, l'aire de la base du cylin-

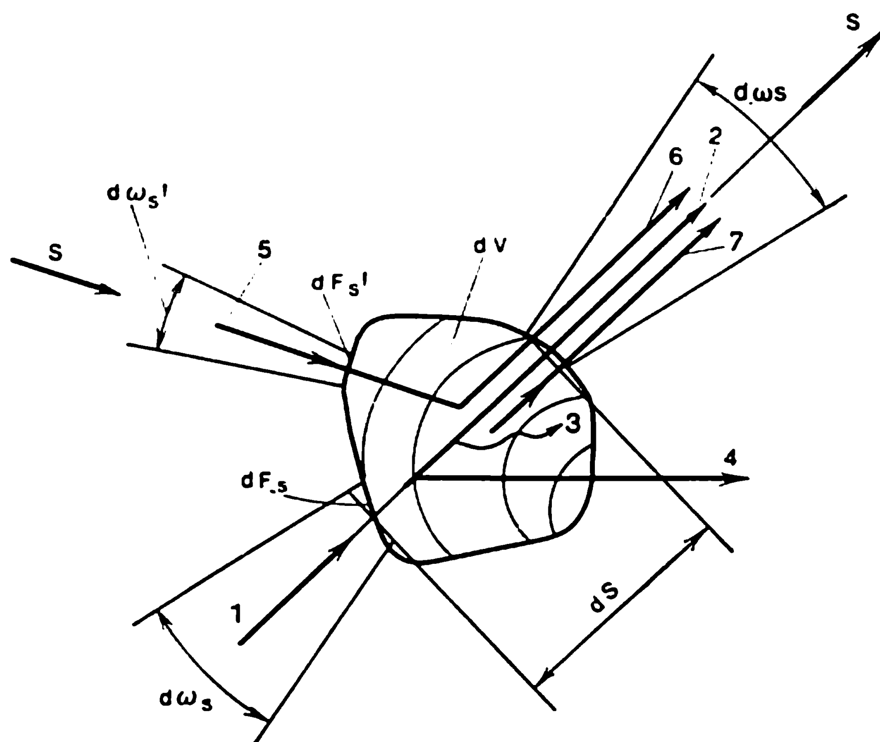


Fig. IX.17. Bilan de l'énergie rayonnante d'un volume élémentaire:
1 — flux de rayonnement qui frappe le volume dans la direction *s*; *2* — flux de rayonnement passé dans la direction *s*; *3* — partie du rayonnement incident absorbée dans le volume *dV*; *4* — partie du rayonnement incident diffusée dans le volume *dV*; *5* — flux de rayonnement qui frappe le volume *dV* depuis la direction *s'*; *6* — partie du rayonnement incident diffusée dans la direction *s'*; *7* — rayonnement propre (spontané) du volume dans la direction *s*

dre élémentaire perpendiculaire à la direction s; $d\omega_s$, l'angle solide élémentaire autour de la direction s.

L'atténuation du faisceau par suite de l'absorption (c'est-à-dire rendant compte de l'absorption aussi bien réelle que de l'émission réduite) et de la diffusion efficaces est suivant la loi de Bouguer (IX.41)

$$dQ_{\text{att }\nu} = -K_\nu I_{\nu,s} \, ds \, dF_s \, d\omega_s.$$

Le renforcement du faisceau par l'émission spontanée est proportionnel à la densité volumique du rayonnement spontané $\eta_{s,\nu}$, au volume élémentaire dV et à l'angle élémentaire $d\omega_s$. En tenant

compte que le rayonnement spontané est réparti uniformément dans l'espace suivant l'angle solide total (sphérique) 4π, on peut écrire

$$dQ_{s,\nu} = \frac{\eta_{s,\nu}}{4\pi} dV\, d\omega_s.$$

En appliquant la loi de Kirchhoff (IX.48), on peut exprimer cette grandeur à l'aide de l'intensité spectrale du rayonnement noir $I_{0,\nu}$ à la température du milieu au point considéré, et à l'aide du coefficient d'absorption spectral efficace α_ν:

$$dQ_{s,\nu} = \alpha_\nu I_{0,\nu}\, dV\, d\omega_s.$$

Le renforcement du faisceau sous l'effet de la diffusion dans la direction s s'exprime de la façon suivante. Le flux d'énergie rayonnante $I_{\nu,s'} dF_{s'} d\omega_{s'}$, où $dF_{s'}$ est la projection du maître couple du volume élémentaire sur un plan perpendiculaire à s', vient frapper le volume dV à partir d'une direction arbitraire s' dans les limites de l'angle solide $d\omega_{s'}$. De cette quantité d'énergie dans la direction s' est diffusée sa part proportionnelle au parcours ds' dans la direction s', au coefficient de diffusion β_ν et à l'indicatrice de diffusion $\gamma_\nu(s, s')$ c'est-à-dire $\beta_\nu I_{\nu,s'} \gamma_\nu (s, s') dF_{s'} d\omega_{s'} d\omega_s/4\pi$. En intégrant cette expression suivant toutes les directions s' (c'est-à-dire dans les limites de l'angle solide sphérique total 4π, d'où vient dans le volume dV l'énergie rayonnante), on obtient la grandeur cherchée

$$dQ_{\mathrm{dif}\,\nu} = \left[\frac{\beta_\nu}{4\pi} \int\limits_{4\pi} I_{\nu,s'} \gamma (s, s')\, d\omega_{s'}\right] dV\, d\omega_s.$$

On y tient compte que $dF_{s'} ds' = dV$ et que les valeurs des β_ν, $d\omega_s$ et dV ne dépendent pas de la direction s'.

Sommons (avec les signes correspondants) les expressions obtenues

$$dI_{\nu,s}\, dF_s\, d\omega_s = -K_\nu I_{\nu,s}\, ds\, dF_s\, d\omega_s + \alpha_\nu I_{0,\nu}\, dV\, d\omega_s + \left[\frac{\beta_\nu}{4\pi} \int\limits_{4\pi} I_{\nu,s'} \gamma_\nu (s, s')\, d\omega_{s'}\right] dV d\omega_s.$$

En divisant tous les termes par $ds\, dF_s\, d\omega_s$ on obtient l'équation du transfert d'énergie dans un milieu diffuseur semi-transparent

$$\frac{dI_{\nu,s}}{ds} = \alpha_\nu I_{0,\nu} - K_\nu I_{\nu,s} + \frac{\beta_\nu}{4\pi} \int\limits_{4\pi} I_{\nu,s} \gamma_\nu (s, s')\, d\omega_{s'}. \quad \text{(IV.49)}$$

La condition aux limites de l'équation du transfert (IX.49) est donnée ordinairement sous la forme de relation entre les valeurs de l'intensité du rayonnement aux points N de la surface frontière à caractéristiques radiatives de la surface. On peut, par exemple, écrire l'intensité du rayonnement efficace de la surface comme l'intensité

du rayonnement $I_{\nu,-n}$, se propageant dans la direction de la normale intérieure à la surface $-n = s$, et égaler cette grandeur à la somme du rayonnement propre de la surface et du rayonnement qu'elle réfléchit. Le rayonnement réfléchi s'exprime alors à l'aide du rayonnement incident, c'est-à-dire de l'intensité du rayonnement $I_{\nu,+n}$ incident au point N de la surface, en provenance de toutes les directions s' dans les limites de la demi-sphère du côté de l'objet émetteur. Dans le cas d'une surface émettant et reflétant par diffusion, les conditions aux limites sont exprimées par l'équation

$$I_{\nu,-n} = \varepsilon_\nu I_{0,\nu,T_N} + \frac{r_\nu}{\pi} \int_{2\pi} I_{\nu,+n} \cos(s', n)\, d\omega_{s'}. \qquad \text{(IX.50)}$$

Ici $I_{\nu,-n} = I_{p.ef.\nu}$ est l'intensité du rayonnement efficace de la surface; ε_ν et r_ν, le degré de noirceur et le pouvoir de réflexion spectraux de la surface; $I_{0,\nu\, T_N}$, l'intensité du rayonnement d'équilibre à la température de la surface au point N.

L'équation du transfert et sa condition aux limites sont très compliquées même sous les restrictions simplificatrices déjà faites. La présence de la diffusion fait que les équations de la propagation de l'énergie sont intégro-différentielles et l'allure volumique du processus de rayonnement oblige d'écrire la condition aux limites (IX.50) sous la forme d'une équation intégrale. Pour utiliser pratiquement ces équations, par exemple, pour la recherche du flux rayonnant efficace émis par un élément de surface dans la région du point N, il faut les intégrer ensemble aussi bien par rapport à la longueur que par rapport à la direction de chacun des rayons issus du point N dans la direction du volume semi-transparent. Dans le cas général, ces équations ne se prêtent pas à la résolution analytique. Même en appliquant des solutions approchées (y compris les méthodes numériques de résolution sur des ordinateurs), il faut introduire de nombreuses restrictions simplificatrices sur la géométrie du système, les propriétés radiatives du milieu et des surfaces, la distribution de la température, etc. Les difficultés sont particulièrement grandes pour le calcul du rayonnement des gaz, du fait du spectre de bande de leur rayonnement et de la dépendance brutale de leurs caractéristiques radiatives par rapport à la fréquence du rayonnement et la température.

4. Degré de noirceur et pouvoir absorbant d'un volume de gaz

L'une des méthodes usitées de calcul d'échange thermique radiatif est la méthode de passage des caractéristiques volumiques du rayonnement aux caractéristiques rapportées à la surface délimitant le volume du milieu semi-transparent. Ces caractéristiques superfi-

cielles sont le degré de noirceur ε_g et le pouvoir d'absorption A_g du volume de gaz.

En introduisant plusieurs restrictions, intégrons l'expression (IX.49) le long de la direction s, du point N de la surface limite jusqu'à un point arbitraire M du volume du milieu (fig. IX.18). Examinons le milieu non diffuseur (tel que, par exemple, un gaz non empoussiéré). Le coefficient de diffusion est alors nul, et le coefficient d'atténuation devient égal au coefficient d'absorption: $K_\nu = \alpha_\nu$. Avec ces restrictions l'équation (IX.49) se met sous la forme

$$\frac{dI_{\nu,\,s}}{ds} = \alpha_\nu (I_{0,\,\nu} - I_{\nu,\,s}). \qquad \text{(IX.51)}$$

Si on suppose encore que les propriétés radiatives du milieu sont constantes dans le volume, il devient possible d'intégrer l'équation (IX.51) sous une forme explicite. Ramenons-la à la forme

$$\frac{dI_{\nu,\,s}}{I_{\nu,\,s} - I_{0,\,\nu}} = -\alpha_\nu\, ds$$

pour obtenir par intégration

$$I_\nu = I_{p.\,ef\,\nu} e^{-\alpha_\nu l'} + I_{0,\,\nu} (1 - e^{\ \alpha_\nu l'}). \qquad \text{(IX.52)}$$

Ici $I_{p.ef\,\nu}$ est le rayonnement efficace de la paroi, c'est-à-dire l'intensité du rayonnement qui en provenance de la paroi frappe la base de la colonne de gaz au point N dans la direction s.

Le premier terme du deuxième membre de (IX.52) est l'énergie du rayonnement qui frappe la base de la colonne de gaz au point N et qui sur le parcours entre les points N et M reste non absorbée. Le deuxième terme traduit la part du rayonnement propre de la colonne de gaz dans la direction s, qui reste non absorbée sur le parcours l', du point N jusqu'au point M. Calculons l'énergie émise en propre par le gaz (sans tenir compte du rayonnement efficace des parois), qui passe par une aire arbitraire dF de toutes les directions possibles et qui traversent l'aire de gauche à droite (fig. IX.18). A cet effet il convient de multiplier l'intensité du rayonnement donnée par le deuxième terme du deuxième membre de (IX.52), par la projection de l'aire dF sur le plan perpendiculaire à chacune des directions s, et par l'angle solide élémentaire $d\omega_s$, puis intégrer par rapport à toutes les directions s d'où peut venir le flux lumineux sur l'aire dF, c'est-à-dire par rapport à la demi-sphère adhérente « à gauche » à l'aire dF

$$dQ_{g\nu} = \int_{2\pi} I_{0,\,\nu} (1 - e^{-\alpha_\nu l}) \, dF \cos\vartheta \, d\omega_s.$$

En divisant les deux membres de l'équation par dF on obtient la valeur de la densité superficielle (demi-sphérique) du flux produit par le rayonnement du volume de gaz

$$E_{g\nu} = \frac{dQ_{g\nu}}{dF} = I_{0,\nu} \int_{2\pi} (1 - e^{-\alpha_\nu l}) \cos \vartheta \, d\omega_s. \qquad \text{(IX.53)}$$

La longueur du parcours l diffère dans chacune des directions s, et le résultat de l'intégration dépend de la configuration du volume de

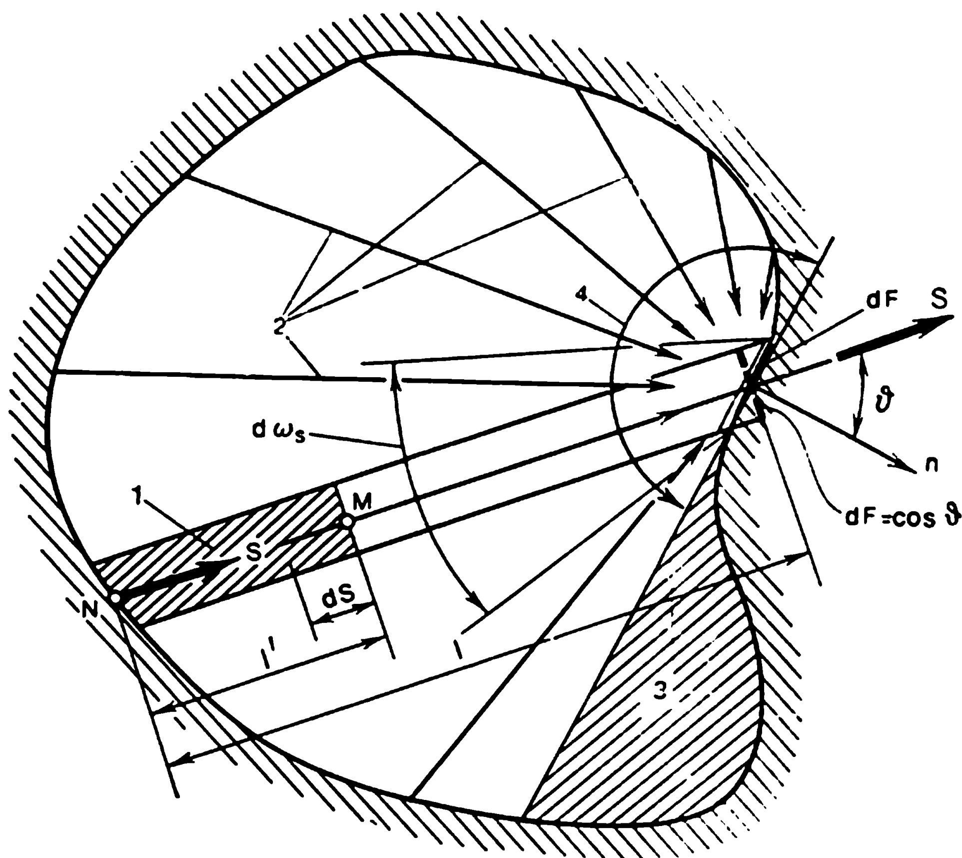


Fig. IX.18. Détermination du degré de noirceur d'un volume de gaz:
1 — colonne de gaz qui forme le rayonnement dans la direction *s* en point *M*; *2* — rayons de longueur différente qui atteignent l'aire *dF*; *3* — volume de gaz dont le rayonnement n'atteint pas l'aire *dF*; *4* — demi-sphère adhérente à l'aire du côté gauche

gaz. Pour un volume demi-sphérique qui émet vers le centre de la base, $l = R = \text{const}$; alors, on obtient par intégration

$$E_{g\nu} = (1 - e^{-\alpha_\nu R}) \, \pi I_{0,\nu}.$$

En vertu de la loi de Lambert (IX.19) le produit $\pi I_{0,\nu}$ est la densité spectrale demi-sphérique du rayonnement du corps noir $E_{0,\nu}$ à la température du volume de gaz; donc

$$E_{g\nu} = (1 - e^{-\alpha_\nu R}) \, E_{0,\nu}. \qquad \text{(IX.54)}$$

On peut introduire la notion de *degré de noirceur du volume de gaz* comme les rapports de la densité superficielle du rayonnement produit par le volume de gaz à une certaine température à la densité du rayonnement noir à la même température

$$\varepsilon_{g\nu} = \frac{E_{g\nu}}{E_{0\nu}} = 1 - e^{-\alpha_\nu R}. \qquad \text{(IX.55)}$$

Dans le cas des volumes de configuration arbitraire, le degré de noirceur se calcule pour chaque point à la frontière du volume par intégration de (IX.53), compte tenu de la relation entre la longueur du rayon et la direction, puis on calcule sa moyenne suivant toute la surface.

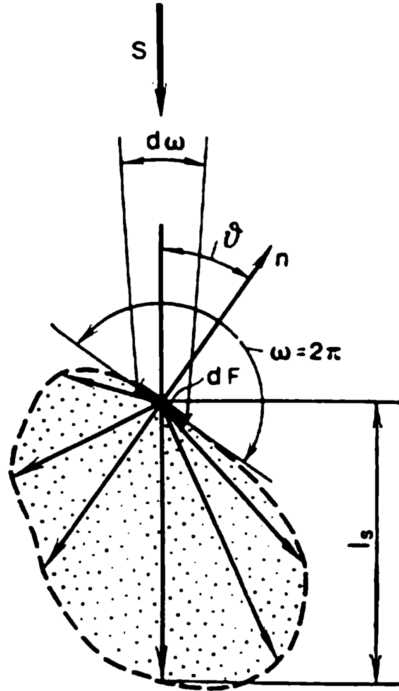


Fig. IX.19. Pouvoir d'absorption d'un volume de gaz

Un examen plus poussé montre que dans le cas général le degré de noirceur d'un volume de gaz peut se mettre sous la forme

$$\varepsilon_{g\nu} = 1 - e^{-\alpha_\nu l_{ef}}, \qquad \text{(IX.56)}$$

où l_{ef} est une certaine longueur efficace du rayon dans le volume de gaz de configuration donnée. Pour le rayonnement des volumes vers toute la surface qui les entoure, la longueur efficace du rayon se calcule avec une précision suffisante par la relation approchée

$$l_{ef} = 3{,}6\ V/F, \qquad \text{(IX.57)}$$

où V est le volume de la cavité émettrice ; F, la surface qui la délimite.

Pour donner l'expression du flux total du rayonnement, on introduit la notion de degré de noirceur *total* ou *intégral* du gaz, et à cet effet il convient d'intégrer (IX.54) suivant toutes les longueurs d'onde

$$E_g = \int_0^\infty E_{g\nu}\, d\nu = \int_0^\infty (1 - e^{-\alpha_1 R})\, E_{0,\nu}\, d\nu = \int_0^\infty \varepsilon_{g\nu} F_{0,\nu}\, d\nu.$$

Le degré de noirceur intégral est défini comme le rapport du flux total du rayonnement du gaz E_g au flux total du rayonnement noir à la température égale à celle du gaz

$$\varepsilon_g = \frac{E_g}{E_0} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_{g\nu} E_{0,\nu}\, d\nu}{\sigma_0 T^4}. \qquad \text{(IX.58)}$$

Le pouvoir absorbant d'un volume de gaz (fig. IX.19) peut être introduit en considérant l'absorption du rayonnement frappant l'aire élémentaire située au centre de la base du volume rempli de gaz absorbant isotherme.

Conformément à la loi de Bouguer (IX.45), pour un rayon de direction quelconque, venant frapper l'aire dF de l'extérieur, l'intensité du rayonnement absorbé s'écrit

$$I_{\text{abs}\,\nu} = I_{\text{frap}\,\nu}(1 - e^{-\alpha_\nu l_s}). \tag{IX.59}$$

La densité du rayonnement absorbé se calcule par intégration de (IX.59) par rapport à la demi-sphère (du côté du rayonnement incident):

$$E_{\text{abs}\,\nu} = \int\limits_{2\pi} I_{\text{frap}\,\nu}(1 - e^{-\alpha_\nu l_s}) \cos\vartheta \, d\omega_s = E_{\text{frap}\,\nu}(1 - e^{-\alpha_\nu l_{\text{ef}}}). \tag{IX.60}$$

Le pouvoir d'absorption spectral du volume est exprimé par le rapport du rayonnement absorbé au rayonnement incident

$$A_{g\nu} = \frac{E_{\text{abs}\,\nu}}{E_{\text{frap}\,\nu}} = \frac{E_{\text{frap}\,\nu}(1 - e^{-\alpha_\nu l_{\text{ef}}})}{E_{\text{frap}\,\nu}} = 1 - e^{-\alpha_\nu l_{\text{ef}}}. \tag{IX.61}$$

Pour obtenir le pouvoir d'absorption intégral, il faut intégrer (IX.60) par rapport à toutes les fréquences et diviser par la densité du flux total du rayonnement incident

$$A_g = \frac{E_{\text{abs}}}{E_{\text{frap}}} = \frac{\int_0^\infty E_{\text{frap}\,\nu}(1 - e^{-\alpha_\nu l_{\text{ef}}})\, d\nu}{\int_0^\infty E_{\text{frap}\,\nu}\, d\nu} = \frac{\int_0^\infty A_{g\nu} E_{\text{frap}\,\nu}\, d\nu}{\int_0^\infty E_{\text{frap}\,\nu}\, d\nu}.$$

Le pouvoir d'absorption intégral du gaz dépend de l'état du gaz, y compris de sa température. La distribution de l'intensité du rayonnement incident suivant les fréquences dépend, dans le cas général, non pas de l'état du gaz absorbant, mais des caractéristiques de l'émetteur qui dirige le rayonnement vers le volume de gaz, en particulier, de la température et des caractéristiques spectrales du rayonnement incident. Il s'ensuit qu'à la différence du degré de noirceur, le pouvoir absorbant du gaz n'est pas seulement une propriété physique du milieu absorbant, mais dépend également des conditions extérieures. Ce n'est que dans les conditions de l'équilibre thermodynamique entre le rayonnement incident et le milieu absorbant, lorsque le rayonnement incident est noir, que les expressions (IX.58) et (IX.61) coïncident, ce qui justifie dans ces conditions la loi de Kirchhoff pour les milieux absorbant et émetteur:

$$\varepsilon_{g\,\text{éq}} = A_{g\,\text{éq}}.$$

En utilisant la notion du degré de noirceur intégral, on peut formellement exprimer le rayonnement d'un volume de gaz par l'équation de Stefan-Boltzmann

$$E_g = \varepsilon_g \sigma_0 T^4, \qquad \text{(IX.62)}$$

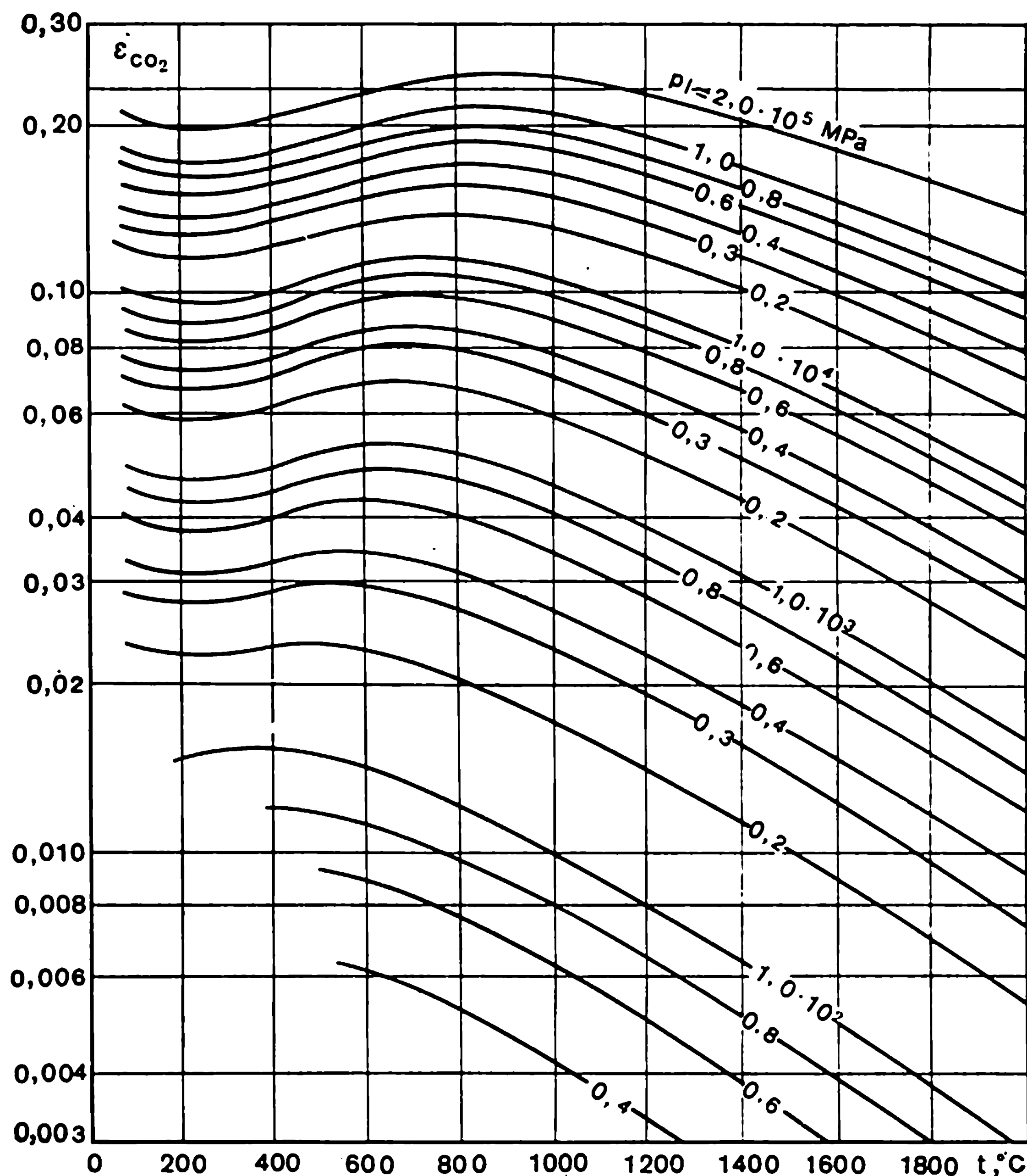


Fig. IX.20. Degré de noirceur du gaz carbonique

Il convient, pourtant, de retenir que la grandeur ε_g dépend fortement ici de la température, de sorte que la densité du rayonnement qui passe par la frontière du volume n'est pas proportionnelle à la

quatrième puissance de celle-ci. Ainsi, les autres conditions étant égales, la densité du rayonnement du gaz carbonique est proportionnelle à la puissance 3,5 de la température, et celle de la vapeur d'eau, à la puissance 3.

Les équations (IX.56) et (IX.61) montrent que pour un rayon l_{ef} suffisamment long, le degré de noirceur et le pouvoir absorbant

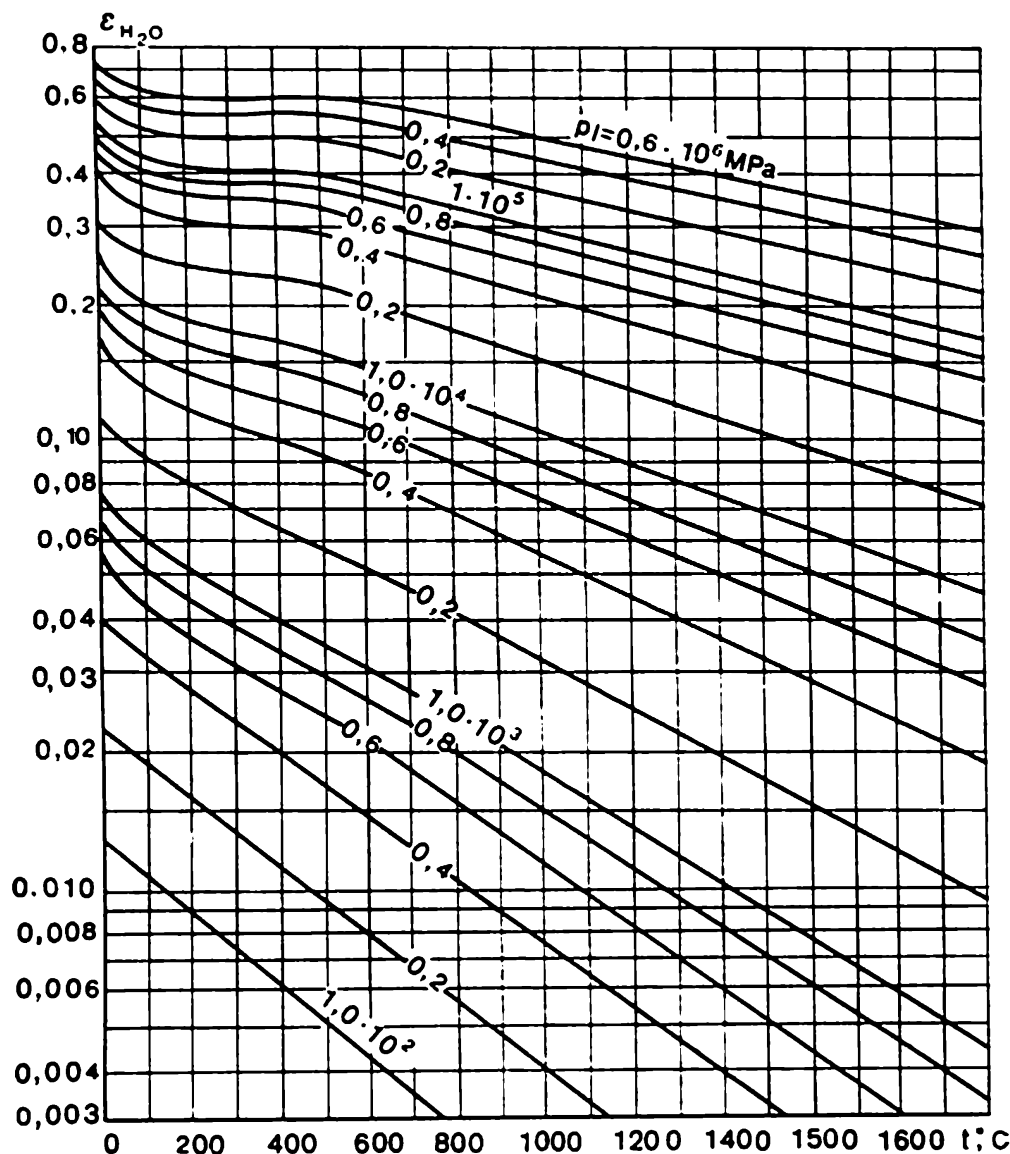


Fig. IX.21. Degré de noirceur de la vapeur d'eau

spectraux du gaz dans des bandes d'absorption isolées peuvent atteindre la valeur de l'unité, c'est-à-dire les propriétés émettrices d'une couche de gaz dans ces bandes peuvent devenir égales à celles du corps noir. Pourtant, *les caractéristiques émettrices totales d'un volume de gaz restent toujours sensiblement inférieures à celles du corps noir.*

Ainsi, le degré de noirceur total limite de la vapeur d'eau à la température de 1000 °C est de 0,6, et du gaz carbonique, près de 0,3.

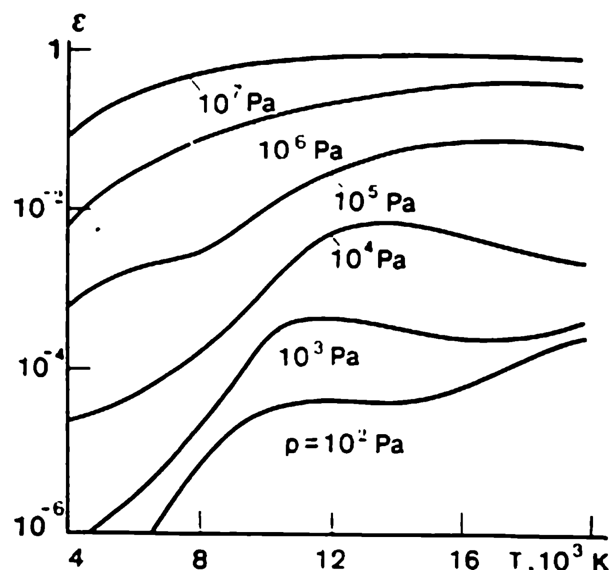


Fig. IX.22. Degré de noirceur de la couche d'air de 10 cm d'épaisseur

Sous des pressions peu élevées, l'absorption de l'énergie rayonnante dans les gaz vérifie la loi de Beer d'après laquelle le coefficient

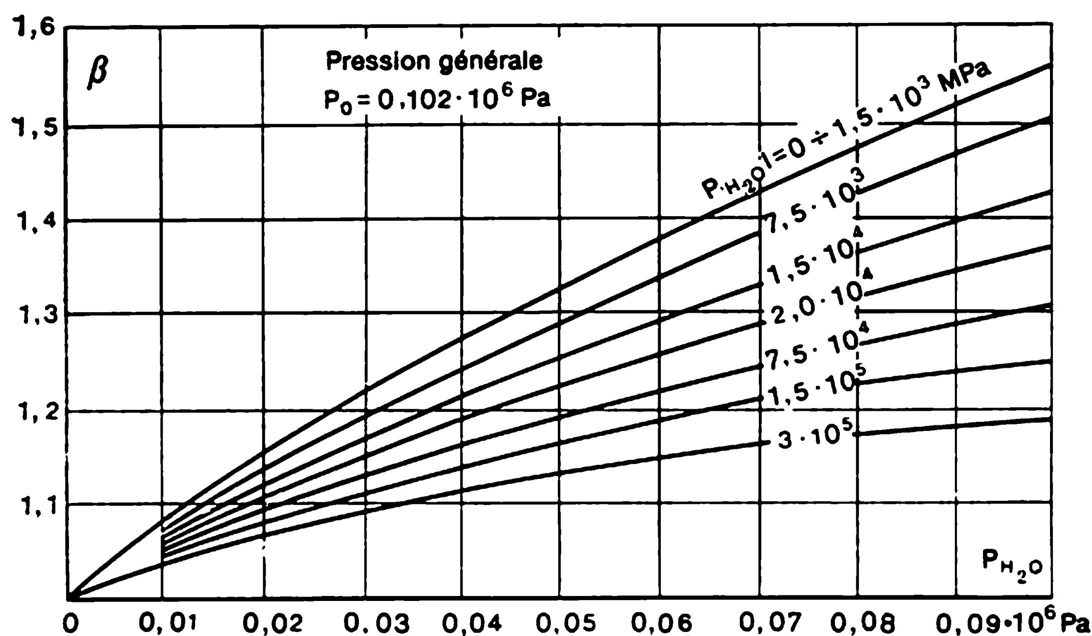


Fig. IX.23. Correction de l'influence de la pression sur le degré de noirceur de la vapeur d'eau

d'absortion pour à la température donnée est proportionnel à la pression partielle du gaz absorbant. Aussi, les renseignements sur le

degré de noirceur des gaz sont-ils donnés sous la forme des relations $\varepsilon_g = f(pl_{ef}T)$, où p est la pression partielle du gaz; l_{ef}, la longueur (efficace) du rayon dans le volume de gaz. Les figures IX.20 et IX.21 montrent le degré de noirceur du gaz carbonique et de la vapeur d'eau, et la figure IX.22, celui d'une couche d'air d'une épaisseur de 10 cm, sous des pressions différentes. La vapeur d'eau présente des écarts de la loi de Beer déjà sous des pressions peu importantes; aussi, la valeur de ε_{H_2O}, obtenue d'après la figure IX.21, doit-elle être multipliée par le coefficient de correction β qui dépend de la pression partielle de la vapeur (fig. IX.23).

Si un mélange contient plusieurs gaz émetteurs, le degré de noirceur du mélange s'obtient par sommation des degrés de noirceur des composantes. Les bandes d'absorption partielle de gaz différents qui chevauchent, et par suite, absorbent mutuellement du rayonnement, font que le degré de noirceur réel s'avère quelque peu inférieur à cette somme. Ainsi, pour le calcul du degré de noirceur des produits de combustion qui contiennent CO_2 et H_2O, on utilise l'expression

$$\varepsilon_g = \varepsilon_{CO_2} + \beta\varepsilon_{H_2O} - \Delta\varepsilon. \qquad \text{(IX.63)}$$

Pourtant, les données sur les valeurs des corrections n'existent que pour une marge limitée de températures et de pressions partielles; dans les calculs approchés on n'introduit pas la correction.

5. Echange de chaleur radiatif entre le gaz et l'enveloppe

L'échange thermique radiatif entre le gaz et la paroi de l'enveloppe qui entoure le gaz peut être présenté comme le résultat de multiples absorptions et réflexions sur la paroi du flux émis par le gaz et de multiples absorptions et passages du flux émis par la paroi à travers le gaz (fig. IX.24). Si dans ces conditions la paroi et le gaz sont envisagés comme des corps gris à degré de noirceur ne dépendant pas de la température, le flux thermique rayonnant peut alors s'obtenir d'après la formule (IX.26) déduite pour le calcul d'échange de chaleur entre un corps solide et l'enveloppe qui l'entoure, le jeu entre eux étant très petit

$$q = \frac{\varepsilon_g\varepsilon_p}{\varepsilon_g + \varepsilon_p - \varepsilon_g\varepsilon_p}\,\sigma_0\,(T_g^4 - T_p^4). \qquad \text{(IX.64)}$$

Des complications sérieuses surviennent lorsqu'il devient nécessaire de tenir compte de l'allure sélective du rayonnement et de l'absorption des gaz, qui détermine une dépendance importante du degré de noirceur par rapport à la température du rayonnement incident. Examinons le cas (fig. IX.24) du degré de noirceur de la

paroi ne dépendant pas de la température et de la fréquence du rayonnement (enveloppe grise), alors que le degré de noirceur du gaz et son pouvoir d'absorption dépendent de la température du gaz et de celle du rayonnement incident, mais ne dépendent pas de la fréquence (approximation du gaz gris).

La densité du rayonnement du volume de gaz porté à la température T_g et dont le degré de noirceur est ε_g est à la frontière entre

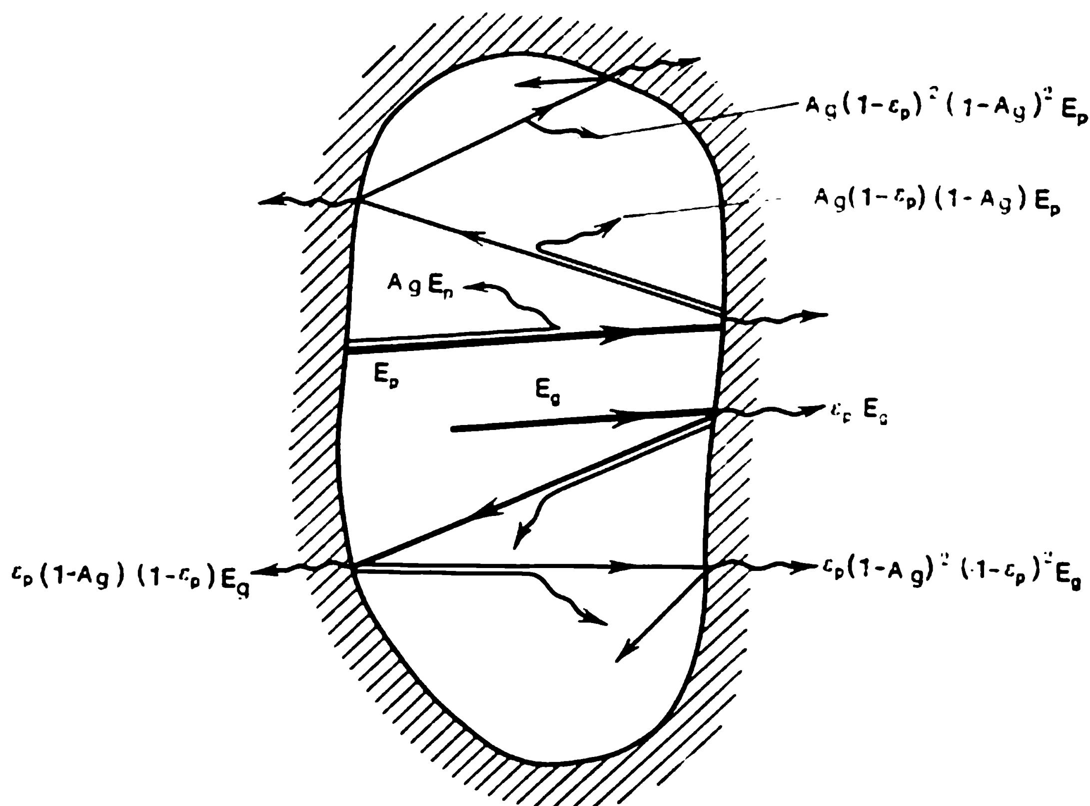


Fig. IX.24. Echange de chaleur entre un gaz et une enveloppe

le gaz et l'enveloppe $E_g = \varepsilon_g \sigma_0 T_g^4$. De cette quantité, la paroi absorbe une partie proportionnelle au pouvoir absorbant (au degré de noirceur) de la paroi et égale à $\varepsilon_p E_g$. L'énergie, égale à $(1 - \varepsilon_p) E_g$ est réfléchie en arrière dans le volume, où une de ses parties est absorbée, alors que l'autre, en quantité $(1 - A_g)(1 - \varepsilon_p) E_g$ passe vers la paroi. La deuxième portion de l'énergie absorbée par la paroi est $\varepsilon_p (1 - A_g)(1 - \varepsilon_p) E_g$. En examinant les échelons ultérieurs: réflexion — passage partiel à travers le gaz — absorption par la paroi, etc., on aboutit à la conclusion que les portions du rayonnement du volume du gaz absorbées par la paroi s'expriment comme les termes d'une progression géométrique décroissante à dénominateur $(1 - A_g)(1 - \varepsilon_p)$. La quantité totale du rayonne-

ment de gaz absorbée par la paroi est donnée par la somme de cette progression

$$(q_{\text{gaz}\to\text{p}} = \varepsilon_{\text{p}}\varepsilon_{\text{g}}\sigma_0 T_{\text{g}}^4 + \varepsilon_{\text{p}}\varepsilon_{\text{g}}(1-A_{\text{g}})(1-\varepsilon_{\text{p}})\sigma_0 T_{\text{g}}^4 + \\ + \varepsilon_{\text{p}}\varepsilon_{\text{g}}(1-A_{\text{g}})^2(1-\varepsilon_{\text{p}})^2\sigma_0 T_{\text{g}}^4 + \ldots = \\ = \varepsilon_{\text{p}}\varepsilon_{\text{g}}\sigma_0 T_{\text{g}}^4 \frac{1}{1-(1-A_{\text{g}})(1-\varepsilon_{\text{p}})}. \qquad \text{(IX.65)}$$

Le rayonnement propre de la paroi $E_{\text{p}} = \varepsilon_{\text{p}}\sigma_0 T_{\text{p}}^4$ est absorbée partiellement par le gaz, la part que laisse passer le gaz est absorbée partiellement par la paroi et en partie réfléchie dans le volume de gaz, où de nouveau une certaine de ses parties est absorbée, etc. Des raisonnements analogues aux précédents amènent la conclusion que la quantité totale du rayonnement de la paroi absorbée par le gaz s'exprime également par la somme de la progression géométrique décroissante

$$q_{\text{p}\to\text{gaz}} = \varepsilon_{\text{p}}A_{\text{g}}\sigma_0 T_{\text{p}}^4 + \varepsilon_{\text{p}}A_{\text{g}}\sigma_0 T_{\text{p}}^4(1-\varepsilon_{\text{p}})(1-A_{\text{g}}) + \\ + \varepsilon_{\text{p}}A_{\text{g}}\sigma_0 T_{\text{p}}^4(1-\varepsilon_{\text{p}})^2(1-A_{\text{g}})^2 + \ldots \\ \ldots = \varepsilon_{\text{p}}A_{\text{g}}\sigma_0 T_{\text{p}}^4 \frac{1}{1-(1-\varepsilon_{\text{p}})(1-A_{\text{g}})}.$$

L'échange de chaleur radiatif résultant entre le volume de gaz et son enveloppe est déterminé comme la différence des grandeurs exprimées par les formules (IX.65) et (IX.66):

$$q = q_{\text{gaz}\to\text{p}} - q_{\text{p}\to\text{gaz}} = \frac{\varepsilon_{\text{p}}}{1-(1-\varepsilon_{\text{p}})(1-A_{\text{g}})}\sigma_0(\varepsilon_{\text{g}}T_{\text{g}}^4 - A_{\text{g}}T_{\text{p}}^4). \qquad \text{(IX.67)}$$

Il importe de ne pas perdre de vue que ε_{g} est le degré de noirceur du volume de gaz à la température du gaz T_{g}, et A_{g}, le pouvoir absorbant du gaz par rapport au rayonnement défini par la température de la paroi T_{p}. On admet généralement que pour le gaz la loi de Kirchhoff est vérifiée à peu près sans l'équilibre thermodynamique entre le gaz et le rayonnement; donc, $A_{\text{g}.T_{\text{p}}} = \varepsilon_{\text{g}.T_{\text{p}}}$.

Les valeurs de ε_{g} et A_{g} se calculent pour les températures correspondantes [formule (IX.63)].

D'habitude, dans les calculs l'expression (IX.67) s'écrit sous une forme plus simple, en introduisant la notion du degré de noirceur efficace de la paroi

$$\varepsilon_{\text{p}}' = \frac{\varepsilon_{\text{p}}}{1-(1-\varepsilon_{\text{p}})(1-A_{\text{g}})}. \qquad \text{(IX.68)}$$

Il vient

$$q = \varepsilon_{\text{p}}'\sigma_0(\varepsilon_{\text{g}}T_{\text{g}}^4 - A_{\text{g}}T_{\text{g}}^4). \qquad \text{(IX.69)}$$

Comme le montre (IX.68) et la figure IX.25, le degré de noirceur efficace de la paroi est plus grand que son degré de noirceur réel.

Ceci résulte des absorptions multiples du rayonnement reflété par la paroi : on sait que le degré de noirceur efficace d'une cavité fermée remplie de milieu transparent est égal à l'unité. Pour des calculs pratiques on adopte souvent

$$\varepsilon_p' \simeq (\varepsilon_p + 1)/2. \qquad (IX.70)$$

Il est clair que cette recommandation ne satisfait que dans une marge restreinte des valeurs de ε_p et A_g et peut conduire à une erreur im-

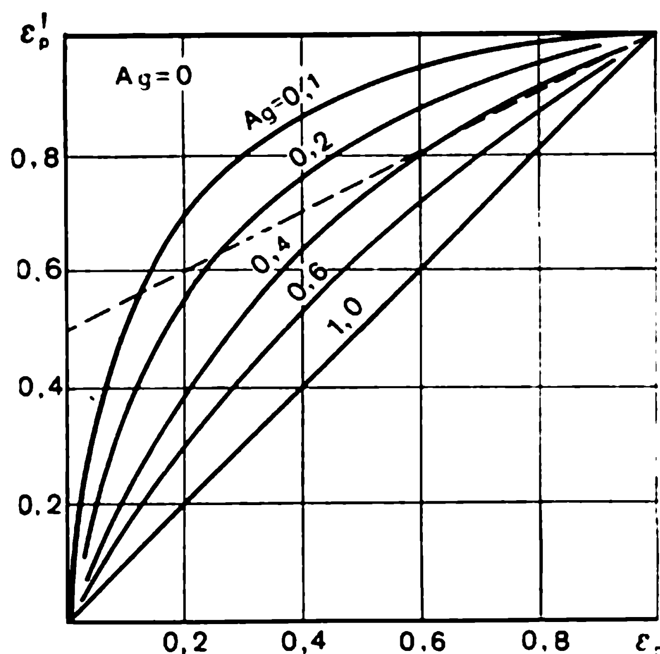


Fig. IX.25. Degré de noirceur efficace d'une enveloppe fermée
———— — calcul d'après la formule (IX.68) ; — — — — — — calcul d'après la formule (IX.70)

portante, surtout lorsque le degré de noirceur de la surface réceptrice de rayonnement est petit.

6. Rayonnement de la flamme. Particularités de l'échange de chaleur radiatif dans les chambres de combustion

Lors de la combustion dans les chambres appropriées des générateurs de vapeur, installations de chauffage, turbines à gaz, moteurs à fusées, etc., il se forme une torche de flamme, puis un flux de produits de combustion incandescents, qui transmettent par rayonnement une quantité importante de chaleur aux parois plus froides de la chambre de combustion. Le calcul de l'échange thermique radiatif dans les chambres de combustion présente de grandes difficultés dues à la complexité des conditions physiques de la marche de la combustion et de l'échange de chaleur. Ces difficultés sont

dues, premièrement, aux caractéristiques complexes de l'émission du milieu et à leur forte dépendance des conditions du processus; deuxièmement, au champ thermique très irrégulier dans le volume de la chambre; troisièmement, aux valeurs sensiblement inconnues du pouvoir d'absorption et de la température des surfaces réceptrices de la chaleur, généralement couvertes d'une couche d'oxydes, de poussière, de suie et de scories.

Dans le cas général, le rayonnement de la flamme se compose de celui des gaz (pour les combustibles à hydrocarbures ce sont surtout le gaz carbonique et la vapeur d'eau), des particules de suie, des particules de combustible incandescentes (coke) et des particules de cendres, qui dans les zones les plus chaudes de la torche fusionnent et se solidifient avec le refroidissement du flux. L'apport relatif de chacun des émetteurs dans le rayonnement global dépend de la forme du combustible, du mode et des conditions de sa combustion, de la position du volume envisagé dans la chambre de combustion.

La forme de la flamme dépend des émetteurs qui déterminent ses propriétés radiatives.

La *flamme non éclairante* est produite généralement par un combustible gazéiforme à condition d'un bon brassage du combustible et de l'oxydant. L'émission d'une telle flamme (ainsi que des produits éteints de la combustion du gaz) est conditionnée presque exclusivement par les propriétés radiatives du gaz carbonique et de la vapeur d'eau.

La *flamme éclairante* est produite par la combustion des hydrocarbures liquides (mazout, kérosène, etc.) sans leur évaporation préalable. Dans une telle flamme, en plus des gaz triatomiques, l'émission est due aux particules de suie formées par la décomposition thermique à l'étape initiale de la combustion, qui brûlent progressivement vers l'extrémité de la torche.

La flame *demi-éclairante* est produite par des combustibles solides pulvérulents. Là au rayonnement des gaz triatomiques s'ajoute celui des particules relativement grosses de coke et de cendres, et parfois le rayonnement de la suie.

La flamme (sauf la flamme non éclairante) est un milieu émetteur, absorbeur et diffuseur (trouble). Ses caractéristiques radiatives dépendent fortement de la concentration, des dimensions et des propriétés physiques des particules solides, ainsi que de la température.

Les calculs techniques d'échange de chaleur radiatif dans les chambres de combustion se font, ordinairement, d'après deux méthodes principales. La première est fondée sur l'application de l'équation de Stefan-Boltzmann, la deuxième, sur l'application de la théorie de la similitude à la généralisation des données expérimentales sur l'échange thermique, et l'utilisation des équations semi-empiriques de similitude. Les deux méthodes ont été élaborées

avec le plus de détail pour le calcul de l'échange de chaleur dans les chambres des générateurs de vapeur.

Pour le cas où toutes les parois de la chambre de combustion sont fermées par des aires réceptrices de la chaleur de même température T_p, la chaleur radiative perçue Q_r peut être exprimée par la formule

$$Q_r = \sigma_0 a_c (T_t^4 - T_p^4) F. \qquad \text{(IX.71)}$$

Le degré de noirceur efficace du système torche-aire réceptrice de chaleur a_c s'exprime à l'aide du pouvoir d'absorption efficace des surfaces a_r et le pouvoir d'absorption de la torche a_t

$$a_c = \frac{1}{1/a_t + 1/a_r - 1} = \frac{a_t a_r}{a_t + a_r - a_t a_r}. \qquad \text{(IX.72)}$$

A son tour la grandeur a_t dépend de la longueur efficace du rayon l_{ef}, de la pression générale p des gaz dans la chambre de combustion et du coefficient d'atténuation des rayons par le milieu de la chambre K:

$$a_t = 1 - e^{-Kpl_{ef}}. \qquad \text{(IX.73)}$$

Dans le cas de la flamme non éclairante ce coefficient peut se calculer d'après la formule

$$K_g = \left(\frac{0{,}78 + 1{,}6 r_{H_2O}}{\sqrt{p_p l_{ef}}} - 0{,}1 \right) \left(1 - 0{,}37 \frac{T''_{ch}}{1000} \right) r_p, \qquad \text{(IX.74)}$$

où T''_{ch} est la température des gaz à l'extrémité de la chambre; $r_p = r_{H_2O} + r_{CO_2}$, la part volumique totale des gaz triatomiques; $p_p = pr_p$, la pression partielle globale des gaz triatomiques.

Dans le cas d'une flamme éclairante, les rayons sont en plus affaiblis par les particules de suie; donc,

$$K_{éc} = K_g + K_c = K_q + 0{,}03 \; (2 - \alpha_{ch}) \left(1{,}6 \frac{T''_{ch}}{1000} - 0{,}5 \right) \frac{C^p}{H^p}, \qquad \text{(IX.75)}$$

où α_{ch} est le coefficient de l'excédent de l'air dans la chambre; C^p et H^p, la teneur du combustible en carbone et hydrogène.

Pour une flamme demi-éclairante empoussiérée on tient compte de l'atténuation du rayon par les particules des cendres et de coke, c'est-à-dire

$$K_{demi\text{-}éc.} = K_g + K_{cen} + K_{coke} = K_g + \frac{4300 \rho_g \mu_{cen}}{\sqrt[3]{T''^2_{ch} d^2_{cen}}} + K_{coke}, \qquad \text{(IX.76)}$$

où ρ_g est la densité des gaz; μ_{cen}, la concentration des particules des cendres; d_{cen}, le diamètre moyen des particules des cendres; $K_{coke} = 0{,}02$ à $0{,}10$ en fonction du combustible et du mode de son utilisation.

La température efficace du milieu de la chambre T_t est de 2 à 25 % supérieure à celle enregistrée à la sortie de la chambre de combustion en fonction du combustible et des conditions de son utilisation. La température de l'air réceptrice de chaleur en regard de la chambre T_p, encrassée par des dépôts, doit se calculer compte tenu de la densité du flux thermique et de la résistance thermique de la couche encrassée. La dimension de l'aire réceptrice de chaleur F se calcule en partant des données techniques de la chambre.

Pour calculer l'échange de chaleur radiatif, l'équation de similitude associe la température sans dimension à l'extrémité de la chambre $\Theta''_{ch} = T''_{ch}/T_{ad}$ (nombre non déterminant) aux nombres déterminants, pour lesquels on choisit le nombre de Boltzmann (Bo), le degré de noirceur de la chambre a_{ch} et le paramètre M qui dépend de la distribution de la température suivant la longueur de la chambre (M ≈ 0.5):

$$\Theta''_{ch} = \mathrm{Bo}^{0,6}/(\mathrm{M}a_{ch}^{0,6} + \mathrm{Bo}^{0,6}). \qquad \text{(IX.77)}$$

Le nombre de Boltzmann exprime la relation entre l'enthalpie théorique des produits de combustion et la densité du flux rayonnant maximal émis par la torche

$$\mathrm{Bo} = \frac{Vc_{moy}}{\sigma_0 \psi F_p T_{ad}^3}. \qquad \text{(IX.78)}$$

Ici Vc_{moy} est la chaleur spécifique moyenne des produits de combustion; ψ, le coefficient d'efficacité thermique des aires réceptrices de chaleur, qui rend compte de leur construction et encrassement (il vaut de 0,1 à 0,65); F_p, la surface des parois de la chambre de combustion; T_{ad}, la température qu'auraient les gaz si la combustion marchait sans échange de chaleur (température adiabatique). Le degré de noirceur de la chambre est associé au degré de noirceur de la torche a_t définie par les formules (IX.74)-(IX.76) par la relation

$$a_{ch} = \frac{a_t}{a_t + (1 - a_t)\psi}. \qquad \text{(IX.79)}$$

Plusieurs grandeurs initiales dépendant de la température finale des gaz, le calcul suivant les deux méthodes se fait par approximations successives.

7. Echange de chaleur complexe

On dit *échange de chaleur complexe ou combiné* lorsque le rayonnement joue un rôle aussi important que la conductivité thermique et la convection. Le système d'équations complet qui décrit cet échange compte des équations différentielles et intégro-différentielles et ne se prête pas à la résolution analytique. Même la résolution nu-

34—01289

mérique impose l'adoption de plusieurs restrictions simplificatrices fort poussées, ce qui rend le résultat très approximatif.

On peut dégager trois formes de l'échange de chaleur complexe.

Echange de chaleur radiatif entre le flux de gaz émetteur et les parois du canal. Ordinairement, on néglige la conductivité pour admettre que la chaleur est transférée par convection seulement dans le sens du déplacement du flux. A la différence du problème simplifié examiné dans ce qui précède (gaz fixe, température constante suivant son volume), ici on envisage la distribution irrégulière de la température suivant la section du canal et sa longueur, déterminée par l'échange thermique. Il s'avère que la croissance de la quantité de chaleur transférée avec la croissance du degré de noirceur du volume de gaz n'est pas monotone, mais possède un maximum. La diminution de la quantité de chaleur transmise, le pouvoir d'absorption du milieu étant grand, s'explique par le fait que les couches adhérentes à la paroi et refroidies de gaz peu transparent jouent le rôle d'écran, ne laissant pas passer jusqu'à la paroi froide le rayonnement des couches médianes du gaz.

Echange de chaleur par rayonnement et conduction. La chaleur est transmise d'une surface solide à une autre par le milieu fixe absorbant (dans le cas général, il est aussi diffusif) aussi bien par rayonnement que par conductivité thermique. Dans le cas d'un milieu non diffusif, le problème est caractérisé par cinq paramètres sans dimension, et notamment : épaisseur optique caractéristique de la couche du milieu KL; degrés de noirceur des aires ε_{p1} et ε_{p2}; température relative de l'aire « froide » $\Theta_2 = T_2/T_1$ et le paramètre $N = \frac{1}{Ki} = \frac{\lambda\alpha}{4\sigma T_1^3}$. Ce dernier définit l'intensité mutuelle du transfert de chaleur par conduction et rayonnement : pour $N \to \infty$ la chaleur est transmise seulement par conduction ; pour $N \to 0$, seulement par rayonnement.

Le problème présentant de grandes difficultés, des solutions relativement simples ne s'obtiennent que pour certains cas limites :

a) *Couche optiquement mince* $KL \to 0$. Le rayonnement n'est pas absorbé par le milieu, mais transmis d'une aire à l'autre, comme dans le cas d'un milieu diathermique. Le flux thermique total s'obtient par simple sommation des flux radiatif et conductif : $q = q_{ray} + q_{cond}$. Pour une couche plane, q_{ray} est donné par la formule (IX.69), et q_{cond}, par la formule (I.6), de sorte que

$$q = \frac{\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}}{\varepsilon_{p1}+\varepsilon_{p2}-\varepsilon_{p1}\varepsilon_{p2}}\sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) + \frac{\lambda}{\delta}(T_1 - T_2). \quad \text{(IX.80)}$$

b) *Couche optiquement épaisse* $KL \to \infty$. L'action des propriétés radiatives des aires s'étend en profondeur dans le volume à la distance bien inférieure que la dimension caractéristique du système, et les caractéristiques du champ de rayonnement en tout point

du volume dépendent seulement des conditions au voisinage immédiat de ce point. Il s'ensuit que les équations intégro-différentielles du transfert de rayonnement deviennent différentielles. Dans ce cas le flux total se compose des flux radiatif et conductif. Pourtant, à la différence de (IX.80), le flux radiatif s'exprime maintenant d'une autre façon. Pour une couche plane l'expression est de la forme

$$q = q_{\text{ray}} + q_{\text{cond}} = \frac{4}{3}\frac{\sigma_0}{K\delta}(T_1^4 - T_2^4) + \frac{\lambda}{\delta}(T_1 - T_2). \qquad \text{(X.81)}$$

c) *Epaisseur optique finie de la couche* (cas général). Le rayonnement de la surface pénètre profondément dans le volume du milieu où il est partiellement absorbé, ce qui influe sur la distribution de la température. Ceci à son tour modifie les conditions de transfert de chaleur par conduction ; il en résulte que le flux global ne peut déjà plus s'obtenir par simple sommation des composantes radiatives et conductive calculées indépendamment l'une de l'autre. Le choix de telle ou telle méthode de résolution du système d'équations intégro-différentielles dépend dans une grande mesure des conditions concrètes du problème.

Echange de chaleur par rayonnement et convection. C'est le cas où l'équation du transfert d'énergie rayonnante doit être résolue avec les équations du mouvement et de l'échange de chaleur par convection. Le problème est si compliqué que jusqu'à présent l'analyse n'a porté que sur quelques cas très simplifiés. Pour des calculs pratiques, on applique ordinairement le principe de l'indépendance des flux convectif et rayonnant entre eux, ce qui s'avère assez juste si l'un d'eux est sensiblement inférieur à l'autre. Ainsi, pour rendre compte de l'émission de chaleur par rayonnement [25] il est recommandé d'ajouter au coefficient de transmission de chaleur par convection calculé de la façon usuelle, c'est-à-dire sans tenir compte de l'influence de l'échange radiatif sur les profils de vitesse et de température, le coefficient conventionnel de transmission de chaleur par rayonnement α_r, de façon que le coefficient de transmission des gaz à la surface extérieure des tubes soit exprimé comme suit

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_r. \qquad \text{(IX.82)}$$

Ici α_r est le coefficient conventionnel de transmission de chaleur par rayonnement obtenu en divisant le flux rayonnant par la différence des températures entre le gaz et la surface des tubes

$$\alpha_r = q_r/(T_g - T_p). \qquad \text{(IX.83)}$$

CHAPITRE X

ÉCHANGEURS DE CHALEUR

§ X.1. Classificiation

Les appareils prévus pour transmettre la chaleur d'un milieu à un autre s'appellent *échangeurs.*

Dans la technique actuelle leurs constructions sont les plus différentes. D'après le principe de fonctionnement on les divise en appareils à surface et à mélange.

Aux appareils *à surface* on rapporte les récupérateurs et les régénérateurs. Dans les *récupérateurs*, les fluides chauffant et chauffé (caloporteurs) se déplacent simultanément et la chaleur est transmise par la paroi qui les sépare (chaudières à vapeur, évaporateurs, condenseurs à surface, économiseurs à eau, etc.).

Dans les *régénérateurs*, la même surface de chauffe est baignée à tour de rôle par le fluide chaud et le fluide froid. Le fluide chaud en se déplaçant transmet la chaleur aux parois de l'appareil ou à l'ajutage, où elle s'accumule pour être transmise au fluide froid lors de son écoulement ultérieur. L'exemple de tels appareils est fourni par les régénérateurs des fours Martin, fours à acier, échauffeurs d'air des hauts fourneaux, échauffeurs d'air spéciaux, etc.

Dans les échangeurs *à mélange* (fours de réfrigération, condenseurs, épurateurs de gaz, etc.) l'échange de chaleur est assuré par le brassage direct des caloporteurs. La chaleur est alors transmise simultanément avec l'échange de masse.

Les avantages que présentent les récupérateurs sont leur herméticité et la possibilité de travailler sous d'importantes différences de pression des fluides chauffant et chauffé.

Les régénérateurs présentent l'avantage d'être compacts, et les appareils à mélange, celui d'être très simples.

§ X.2. Principe du calcul thermique des récupérateurs

Suivant la position du problème, le calcul thermique des échangeurs se fait soit pour concevoir un appareil, soit pour le vérifier.

Si on donne les paramètres des caloporteurs (vitesse, densité, température à l'entrée et à la sortie) et il faut établir les dimensions

de l'échangeur, on dit que le calcul est dit *de construction*. Mais si les dimensions de l'échangeur sont connues et il faut déterminer les paramètres des caloporteurs, on dit que le calcul est *de vérification*.

Ces deux formes de calcul sont fondées sur l'utilisation des équations du transfert de chaleur et du bilan thermique qui, sous une forme différentielle, s'écrivent

$$dq_1 = \pm G_1 c_{p1} dt_1 = \pm G_2 c_{p2} dt_2,$$
$$dq_2 = K\,(t_1 - t_2)\,dF,$$

où dq est la quantité de chaleur élémentaire transmise par une aire dF du caloporteur chaud au caloporteur froid; G_1, G_2, les débits de masse des caloporteurs; K, le coefficient d'échange de chaleur.

Sous le régime stationnaire $dq_1 = dq_2$ et

$$dq = \mp G_1 c_{p1} dt_1 = \pm G_2 c_{p2} dt_2 = K\,(t_1 - t_2)\,dF.$$

Dans le cas général, la variation des températures des fluides chauffant et chauffé et le fait que l'appareil se compose de différents éléments fonctionnels rendent possible l'écriture intégrale de la formule de calcul principale d'échange de chaleur

$$Q = \int_F K \Delta t\, dF. \tag{X.1}$$

Il est d'usage d'admettre que le coefficient d'échange de chaleur est constant sur toute la surface de chauffe F, ou de diviser cette dernière en plusieurs secteurs F_1, F_2, . . ., F_n avec leurs coefficients d'échange K_1, K_2, . . ., K_n; alors la formule principale de transfert de chaleur devient

$$Q = \overline{K}\,\overline{\Delta t}\,F, \tag{X.2}$$

où $\overline{\Delta t} = \frac{1}{F}\int_F \Delta t dF$ est la différence moyenne des températures (pression thermique) et

$$\overline{K} = \frac{F_1K_1 + F_2K_2 + \ldots + F_nK_n}{F_1 + F_2 + \ldots + F_n}.$$

Les coefficients de transmission de chaleur α qui figurent dans le coefficient d'échange de chaleur K se calculent d'après les relations correspondantes et se composent des fractions convective et radiative

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_r. \tag{X.3}$$

Quelquefois on introduit dans la grandeur α le coefficient de contournement ω et alors $\alpha_c = \omega\alpha_c^0$, où le coefficient d'utilisation $K_u = \xi K_0$.

En négligeant le tartrage, la résistance thermique totale peut s'écrire

$$1/K_{ch} = 1/\eta_{0\,ch}\alpha_{ch} + a\Big/\frac{F_p}{F}\lambda + 1\Big/\frac{F_{fr}}{F_{ch}}\eta_{0\,fr}\alpha_{fr} \qquad (X.4)$$

ou

$$1/K_{fr} = 1/\eta_{0\,fr}\alpha_{fr} + a\Big/\frac{F_p}{F}\lambda + 1\Big/\frac{F_{ch}}{F_{fr}}\eta_{0\,ch}\alpha_{ch}, \qquad (X.5)$$

où F_p est la moyenne de la surface principale; η_{0ch} et η_{0fr}, l'efficacité (le rendement) de la surface totale F_{ch} ou F_{fr}. Il est clair que $K_{fr}F_{fr} = K_{ch}F_{ch}$.

Si les deux côtés ne comportent pas d'aire étendue supplémentaire, alors $\eta_{0ch} = \eta_{0fr} = 1$ et $F_p = (F_{ch} + F_{fr})/2$.

Pour des surfaces à ailettes

$$\eta_0 = 1 - \frac{F_p}{F}(1 - \eta_p). \qquad (X.6)$$

Pour une ailette droite à section constante

$$\eta_p = \frac{\text{th}\, ml}{ml}, \qquad (X.7)$$

où m est le paramètre de l'ailette.

Pour des ailettes planes droites de section constante $m = \sqrt{2\alpha/(\lambda\delta)}$.

Pour des ailettes circulaires, $m = \sqrt{4\alpha/(\lambda d)}$,

L'équation du bilan thermique $dQ = Gdh$ pour la variation finie de l'enthalpie peut s'écrire

$$Q = G\int_{t'}^{t''} dh = G(h'' - h'). \qquad (X.8)$$

Sans tenir compte des pertes $dQ = G_1 dh_1$ ou

$$Q = G_1(h_1' - h_1'') = G_2(h_2'' - h_2'), \qquad (X.9)$$

où l'indice « 1 » concerne le fluide chaud, et « 2 », le fluide froid.

En adoptant c_p = const et $dh = c_p dt$, on a

$$dQ = Gc_p dt \text{ et } Q = Gc_p(t'' - t')$$

ou

$$Q = G_1c_{p1}(t_1' - t_1'') = G_2c_{p2}(t_2'' - t_2'). \qquad (X.10)$$

La chaleur spécifique totale du débit de masse d'un caloporteur s'appelle *équivalent d'eau* $W = Gc_p$.

L'équation (X.10) permet de tirer

$$\frac{W_1}{W_2}=\frac{t_2''-t_2'}{t_1'-t_1''}=\frac{\delta t_2}{\delta t_1}. \tag{X.11}$$

Ainsi, l'équation du bilan thermique entraîne que le rapport des variations de température des caloporteurs est inversement proportionnel au rapport de leur équivalent d'eau. L'équation (X.11) est justifiée pour toute la surface d'échange de chaleur F, ainsi que pour un élément de surface dF, c'est-à-dire

$$dt_1/dt_2 = W_2/W_1. \tag{X.12}$$

L'allure de la variation de la température des caloporteurs suivant la longueur de l'échangeur dépend non seulement du rapport

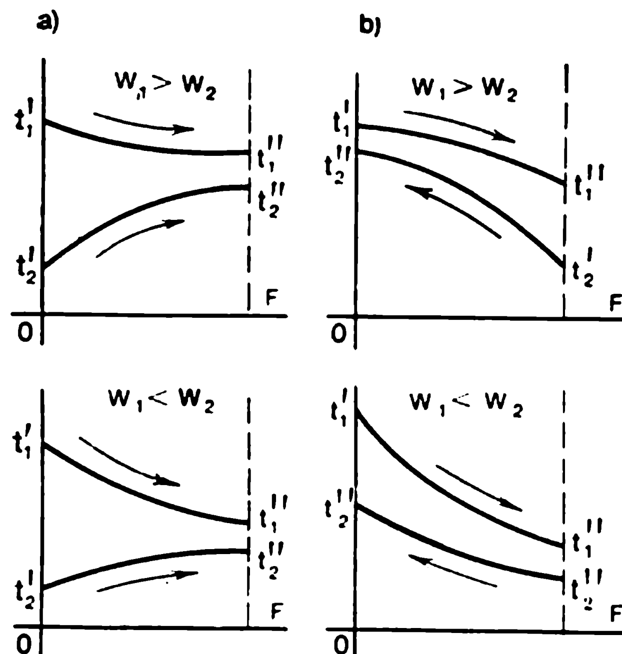


Fig. X.1. Allure de la variation des températures des liquides moteurs dans le cas de courant direct (*a*) et de contre-courant (*b*)

des équivalents d'eau, mais encore du mode de déplacement des caloporteurs (fig. X.1). On distingue le courant direct, le contre-courant et le courant croisé. Si les caloporteurs chauffant et chauffé se déplacent parallèlement et dans la même direction, on dit que le courant est *direct* (parallèle). Si les caloporteurs se déplacent parallèlement, mais dans des sens différents, on est en présence d'un *contre-courant*. Si, en se déplaçant, ils se croisent, le courant est dit *croisé*. Ces modes déterminent la différence dans les lois de variation des températures des caloporteurs.

Dans le cas du courant direct, la température finale du caloporteur chauffé est toujours inférieure à celle du caloporteur chauffant.

Dans le cas du contre-courant, la température finale du caloporteur chauffé peut être plus élevée que celle du caloporteur chauffant. Il s'ensuit que le contre-courant permet de transmettre par le caloporteur chauffant la même quantité de chaleur que le courant direct, mais pour une plus petite quantité de caloporteur chauffé.

L'équation du transfert de chaleur pour un élément de surface dF peut s'écrire sous une forme différentielle

$$dQ_i = K\Delta t_i dF_i.$$

La quantité de chaleur transmise par toute la surface F

$$Q = \int_0^F K\Delta t_i \, dF_i.$$

Pour une pression thermique moyenne Δt_{moy} on a la relation

$$\Delta t_{moy} = \frac{\int_0^F \Delta t_i \, dF_i}{F}.$$

Si on admet que le coefficient de transfert de chaleur K est constant pour toute la surface, il vient

$$Q = K\Delta t_{moy} \, F.$$

La quantité de chaleur transmise par un élément de surface dF est

$$dQ = K\,(t_1 - t_2)_{tr} dF.$$

L'équation du bilan thermique donne

$$-W_1 dt_1 = W_2 dt_2 = dQ,$$

d'où

$$dt_1 = -dQ/W_1 \text{ et } dt_2 = dQ/W_2,$$

ou

$$dt_1 - dt_2 = d\,(t_1 - t_2)_{tr} = -\,(1/W_1 + 1/W_2)\,dQ = -m dQ,$$

où

$$m = 1/W_1 + 1/W_2.$$

En portant au lieu de dQ son expression, on obtient

$$d\,(t_1 - t_2)_{tr} = -mK\,(t_1 - t_2)_t \, dF,$$

ou

$$\frac{d\,(\Delta t)_{tr}}{\Delta t_{tr}} = -mK\,dF. \qquad \text{(X.13)}$$

L'intégration de l'expression obtenue avec le coefficient de transfert de chaleur constant suivant toute la surface d'échange F donne

$$\int_{\Delta t_1}^{\Delta t_{fr}} \frac{d(\Delta t_{fr})}{\Delta t_{fr}} = -mK \int_0^F dF,$$

ou

$$\ln \frac{\Delta t_{fr}}{\Delta t'} = -mKF \quad \text{et} \quad \Delta t_{fr} = \Delta t' e^{-mKF}. \qquad (X.14)$$

De cette façon la pression thermique change suivant la longueur de l'échangeur d'après une loi exponentielle (fig. X.2). Pour une

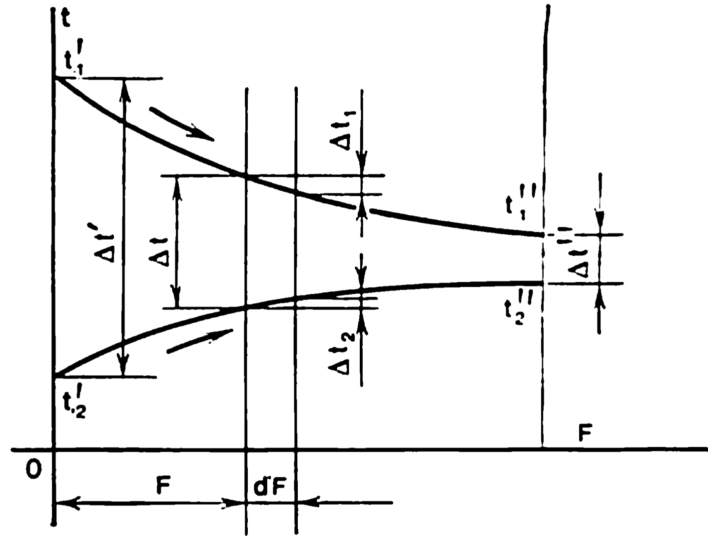


Fig. X.2. Détermination de la pression thermique dans le cas du courant direct

pression thermique moyenne

$$\Delta t_{moy} = \frac{1}{F} \int_0^F \Delta t_{fr}\, dF = \frac{\Delta t'}{F} \int_0^F e^{-mKF}\, dF =$$
$$= \frac{\Delta t'}{mKF}\left(e^{-mKF} - 1\right) = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln(\Delta t'/\Delta t'')}. \qquad (X.15)$$

Cette relation est déduite pour un courant direct. Pour un contre-courant, elle se déduit d'une façon parfaitement analogue

$$\Delta t_{moy} = [(t_1' - t_2'') - (t_1'' - t_2')/] \ln \frac{t_1' - t_2''}{t_1'' - t_2'}. \qquad (X.16)$$

Si, indépendamment du mode de déplacement, on désigne par $\Delta t'$ la pression thermique plus grande, et par $\Delta t''$, la pression plus petite, les deux formules peuvent se ramener à une expression

$$\Delta t_{moy} = (\Delta t' - \Delta t'')/\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}. \qquad (X.17)$$

La pression thermique calculée d'après la relation donnée est dite *moyenne logarithmique*. Lorsque la température des caloporteurs change peu suivant la longueur de l'échangeur, au lieu de la pression moyenne logarithmique on peut utiliser la pression *moyenne arithmétique*. Pour $\Delta t''/\Delta t' > 0{,}5$, l'erreur est inférieure à 4 %, ce qui est parfaitement admissible dans les calculs techniques.

Si la température du fluide ne change pas d'un côté de la surface de chauffe de l'échangeur (changement de phase), alors, d'après l'équation (X.17), la différence entre le courant direct et le contre-courant disparaît.

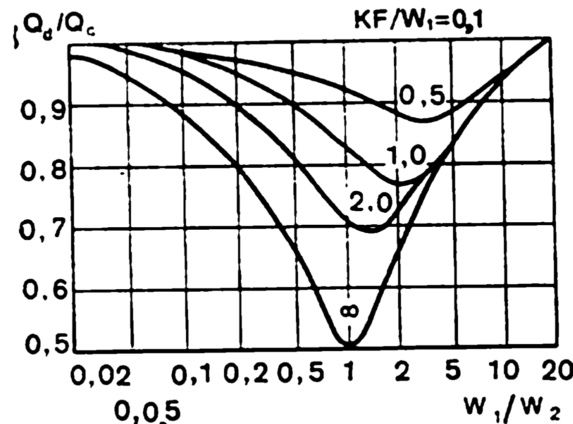


Fig. X.3. Comparaison du courant direct et du contre-courant

Pourtant, dans les évaporateurs verticaux à tubes longs la température du changement de phase peut varier sensiblement suivant la hauteur des tubes, ce qui est dû soit au point d'ébullition de la solution plus élevé (de plus de 10 °C), soit à l'action de la pression hydrostatique sur le point d'ébullition (sous la pression de 0,02 MPa et la longueur des tubes de 2 m la montée de la température atteint 12 °C). Si, en se déplaçant le long de la surface d'échange de chaleur, le fluide chauffant ou refroidissant change son état physique, il faut diviser la surface d'échange en deux parties qu'il faut calculer séparément.

Pour déterminer les avantages du contre-courant par rapport au courant direct, il suffit de comparer la quantité de chaleur transmise, les autres conditions étant les mêmes. La figure X.3 visualise la relation

$$Q_d/Q_c = \varphi\,(W_1/W_2,\ KF/W_1).$$

Les courbes montrent que le courant direct et le contre-courant peuvent être équivalents pour de très grandes et très petites valeurs de W_1/W_2, ou de très petites valeurs du paramètre KF/W_1. Le premier cas correspond à une faible variation de la température de l'un des caloporteurs, le deuxième, à la condition d'une pression thermique grande par rapport à la variation de la température du caloporteur ($KF/W_1 = \delta t_2/\Delta t$). Dans les autres cas, les autres conditions étant égales, le courant direct transmet moins de chaleur que le contre-courant. Pourtant, il faut retenir qu'avec le contre-courant les conditions thermiques de la surface d'échange de chaleur sont plus pénibles que pour le courant direct.

Le courant croisé est celui des caloporteurs se déplaçant perpendiculairement l'un à l'autre. Dans ce cas leur température est fonction de deux coordonnées de la surface d'échange de chaleur. Les lois de transfert de chaleur pour ce cas ont été établies mathématiquement par Nüsselt. Il a introduit des grandeurs sans dimensions déterminées par les rapports

$$\tau_{ch}\frac{t_1''-t_1'}{t_1'-t_2'}; \quad \tau_{fr}\frac{t_2''-t_2'}{t_1'-t_2'}. \qquad (X.18)$$

Ces grandeurs peuvent se calculer lorsque les températures des caloporteurs sont connues ou données.

La chaleur transmise au cours de l'échange est définie par l'égalité suivante

$$Q = G_1c_1\,(t_1'-t_1'') = G_2c_2\,(t_2'-t_2''). \qquad (X.19)$$

Si on suppose que le coefficient de transfert de chaleur et les chaleurs spécifiques des caloporteurs ne changent pas le long de la surface d'échange et introduit les notations

$$a=\frac{KF}{G_1c_1}; \qquad b=\frac{KF}{G_2c_2}, \qquad (X.20)$$

l'équation (X.19) peut s'écrire

$$Q=\frac{KF}{b}\,(t_1'-t_2')\,(1-\tau_{ch})=\frac{KF}{a}\,(t_1'-t_2')\,\tau_{fr}=$$

$$=KF\xi\,(t_1'-t_2')=KF\vartheta_{moy}, \qquad (X.21)$$

où $\xi\,(t_1'-t_2')=\vartheta_{moy}$ est la différence moyenne des températures pour le courant croisé.

De la sorte, dans le cas de l'échange de chaleur du courant croisé, la quantité de chaleur transmise se calcule sans peine si on connaît les coefficients d'échange de chaleur, ainsi que les débits et les températures initiales des caloporteurs. Pour des températures données on peut déterminer, à l'aide du tableau X.1, les coefficients ξ sur la base des grandeurs τ_W et τ_K disponibles. Les équations précédentes permettent de calculer également le produit KF et les quantités G_1 et G_2.

Si les valeurs de G_1, G_2, K et F sont données, par là-même on connaît les valeurs de a et b, et il est très simple d'établir la valeur de τ_{ch} à partir du tableau. Ensuite, en partant de la relation $\xi=\tau_{ch}/a=(1-\tau_{fr})/b$ on calcule également τ_{fr}.

La productivité de toute surface d'échange de chaleur est plus élevée dans le cas du courant croisé que dans celui du courant direct. A la différence de ce dernier, pour le courant croisé la température moyenne du fluide chauffé à la sortie de l'échangeur peut être plus élevée que la valeur inférieure de la température du fluide chauffant.

Tableau X.1

Relation entre le coefficient $\xi = \tau_{fr}/a$ (respectivement $1-\tau_{ch}/b$) et τ_{ch} et τ_{fr} dans le cas du courant croisé

τ_{ch}	ξ										
	τ_{fr}										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1,0	1,0	0,947	0,893	0,838	0,781	0,721	0,657	0,586	0,502	0,388	0
0,9	0,947	0,893	0,840	0,786	0,729	0,670	0,605	0,533	0,448	0,338	0
0,8	0,893	0,840	0,785	0,734	0,677	0,617	0,552	0,480	0,398	0,292	0
0,7	0,838	0,786	0,734	0,682	0,625	0,565	0,502	0,430	0,348	0,247	0
0,6	0,781	0,729	0,677	0,625	0,569	0,513	0,449	0,378	0,300	0,206	0
0,5	0,721	0,670	0,617	0,565	0,513	0,456	0,394	0,326	0,251	0,167	0
0,4	0,657	0,605	0,552	0,502	0,449	0,394	0,334	0,271	0,201	0,128	0
0,3	0,586	0,533	0,480	0,430	0,378	0,326	0,271	0,213	0,151	0,089	0
0,2	0,502	0,448	0,398	0,348	0,300	0,251	0,201	0,151	0,100	0,052	0
0,1	0,388	0,338	0,292	0,247	0,206	0,167	0,128	0,089	0,052	0,022	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

En plus des modes d'échange de chaleur principaux indiqués, il en existe dans la pratique de plus compliqués qui cumulent le courant direct avec le contre-courant, où le courant est croisé à plusieurs reprises et où on applique d'autres combinaisons encore.

Dans les échangeurs à courant combiné des deux fluides le calcul de la différence moyenne des températures est très compliqué. Aussi, pour les cas qui se présentent ordinairement dans la pratique, la différence moyenne des températures est-elle déterminée à l'aide d'un coefficient de correction de la différence moyenne logarithmique des températures calculées pour le contre-courant pur.

La figure X.4 visualise la relation entre le coefficient de correction ε et les grandeurs auxiliaires

$$P = (t_{2f} - t_{20})/(t_{10} - t_{20}) \text{ et } R = (t_{10} - t_{1f})/(t_{2f} - t_{20})$$

pour des cas d'échange de chaleur différents.

D'après le diagramme, on détermine pour les grandeurs calculées P et R les coefficients ε. La pression thermique moyenne logarithmique dans un échangeur se calcule d'après la formule

$$\vartheta_{moy} = \varepsilon\,(\vartheta_1 - \vartheta_2)/(\ln \vartheta_1 - \ln \vartheta_2). \qquad \text{(X.22)}$$

La précision du calcul thermique d'un échangeur dépend surtout de la précision de calcul du coefficient de transfert de chaleur K d'après les formules données dans les chapitres VI, VII, VIII. Les difficultés se présentent surtout lorsqu'on s'attaque au calcul des coefficients de transmission α. Ces difficultés sont liées au fait que les surfaces d'échange de chaleur des échangeurs peuvent être compliquées; d'autre part, il faut tenir compte de la variation de la tem-

Tableau X.2

Relation entre la température moyenne sans dimensions à la sortie $\tau_{ch} = \frac{\tau_{ch2} - \tau_{fr1}}{\tau_{ch1} - \tau_{fr1}}$ et les paramètres a et b dans le cas du courant croisé (d'après Nüsselt)

a	τ_{ch}					
	b					
	0	0,5	1	2	3	4
0	1	0,6065	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183
1	1	0,7263	0,5238	0,2676	0,1340	0,0660
2	1	0,8012	0,6338	0,3857	0,2271	0,1284
3	1	0,8455	0,7113	0,4846	0,3177	0,2027
4	1	0,8799	0,7665	0,5645	0,4018	0,2709

pérature des caloporteurs suivant la longueur de l'échangeur. Les paramètres physiques du caloporteur, qui figurent dans les nombres caractéristiques du caloporteur à équivalent d'eau plus grand, doivent

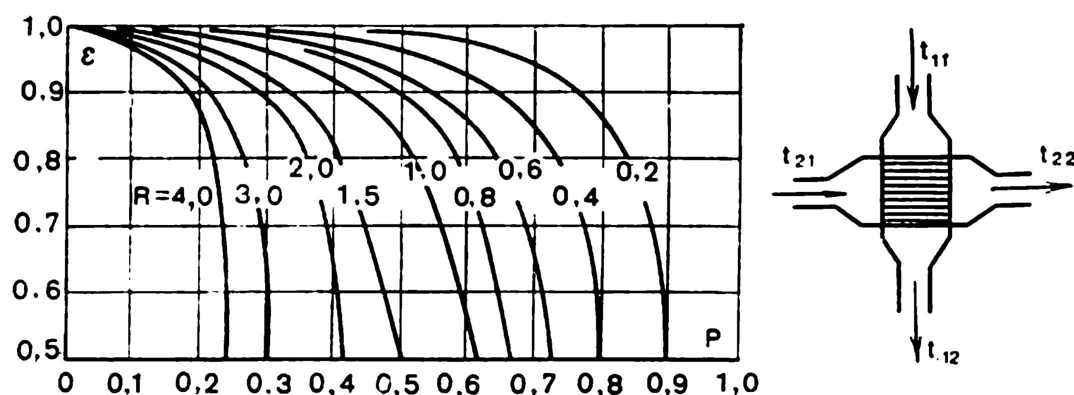


Fig. X.4. Graphique de ψ par rapport à P pour un courant croisé

être rapportés à la moyenne arithmétique de la température du caloporteur en partant des valeurs extrémales $t_d = \frac{1}{2}(t_d' + t_d'')$. Pour l'autre caloporteur à équivalent d'eau plus petit, la température déterminante est fournie par l'expression $t = t_d \pm \Delta t$.

Le signe « moins » devant Δt est retenu dans les cas où Δt_d donne la température du caloporteur chauffé.

Dans des cas isolés, le calcul du coefficient de transfert de chaleur se fait d'après les températures des fluides utilisés à l'entrée et à la sortie de la surface de chauffe. Si les valeurs obtenues de K' et K''

sont proches, on adopte comme moyenne du coefficient de transmission de chaleur $K = (K' + K'')/2$. Dans le cas d'une forte différence entre les valeurs de K' et K'', il faut diviser la surface de chauffe en secteurs dans les limites desquels la variation du coefficient de trasfert de chaleur est négligeable et calculer chacun de ces secteurs à part. Le coefficient de transfert de chaleur se calcule de la même façon lorsque les conditions du contournement de la surface de chauffe changent fortement. Dans certains cas la valeur de K doit être donnée au préalable. Voici les valeurs approchées de α, W (m²·K) et K, W (m²·K) relatives aux échangeurs industriels:

Chauffage et refroidissement de l'air	$\alpha = 1$ à 50;
Chauffage et refroidissement de la vapeur surchauffé	$\alpha = 20$ à 100
Chauffage et refroidissement des huiles	$\alpha = 50$ à 1500
Chauffage et refroidissement de l'eau	$\alpha = 200$ à 10000
Ebullition de l'eau	$\alpha = 500$ à 45000
Condensation en film des vapeurs d'eau	$\alpha = 4000$ à 15000
Condensation en gouttelettes des vapeurs d'eau	$\alpha = 40000$ à 120000
Condensation des vapeurs organiques	$\alpha = 500$ à 2000
Transfert de chaleur de gaz à gaz	$K = 25$
Transfert de chaleur de gaz à l'eau	$K = 50$
Transfert de chaleur du kérosène à l'eau	$K = 300$
Transfert de chaleur de l'eau à l'eau	$K = 1000$
Transfert de chaleur des vapeurs en condensation à l'eau	$K = 2500$
Transfert de chaleur des vapeurs en condensation aux huiles	$K = 300$
Transfert de chaleur de gaz à l'huile en ébullition	$K = 500$

Dans le calcul de vérification, les dimensions de l'échangeur sont données. Les grandeurs cherchées peuvent être les températures des caloporteurs chauffant et chauffé à l'entrée et à la sortie. le débit des caloporteurs et la quantité de chaleur transmise du caloporteur chauffant au caloporteur chauffé.

Supposons donnés la surface d'échange de chaleur F, les débits des caloporteurs G_1 et G_2, leurs températures initiales t_1' et t_2', et qu'il faut déterminer les températures finales des caloporteurs t_1'' et t_2'' et la quantité de chaleur transmise Q.

La pression thermique suivant la longueur de l'échangeur varie suivant la loi $\Delta t_{fr} = \Delta t_{fr}' \, e^{-mKF}$. On en tire la relation entre les pressions thermiques à l'entrée et à la sortie de l'échangeur: $\Delta t'' = \Delta t' e^{-mKF}$; compte tenu du fait que

$$m = 1/W_1 + 1/W_2; \; \Delta t' = t_1' - t_2'; \; \Delta t'' = t_1'' - t_2'',$$

on peut écrire

$$\frac{t_1''-t_2''}{t_1'-t_2'}=e^{-(1/W_1+1/W_2)KF} \quad \text{ou} \quad 1-\frac{t_1''-t_2''}{t_1'-t_2'}=$$

$$=1-e^{-(1/W_1+1/W_2)KF}. \qquad (X.23)$$

En transformant l'expression (X.23), on obtient

$$(t_1'-t_1'')+(t_2''-t_2')=(t_1'-t_2')\,[1-e^{-(1/W_1+1/W_2)KF}]. \qquad (X.24)$$

Etant donné que

$$t_2''-t_2'=(t_1'-t_1'')\,W_1/W_2,$$

en portant cette expression dans (X.24), on a

$$\delta t_1=t_1'-t_1''=(t_1'-t_2')\frac{1-e^{-(1+W_1/W_2)\,KF/W_1}}{1+W_1/W_2}=(t_1'-t_2')\,\Phi. \qquad (X.25)$$

La fonction Φ (W_1/W_2, KF/W_1) (fig. X.5) est toujours inférieure à l'unité. Donc, la variation de la température du caloporteur chauffant constitue une partie définie de la pression thermique à l'entrée de l'échangeur. Pour des valeurs connues de t_1', t_2', W_1, W_2, F et K l'équation (X.25) et le graphique X.5 permettent de déterminer la variation de la température du caloporteur chauffant. La variation de la température du caloporteur chauffé est donnée par l'équation du bilan thermique

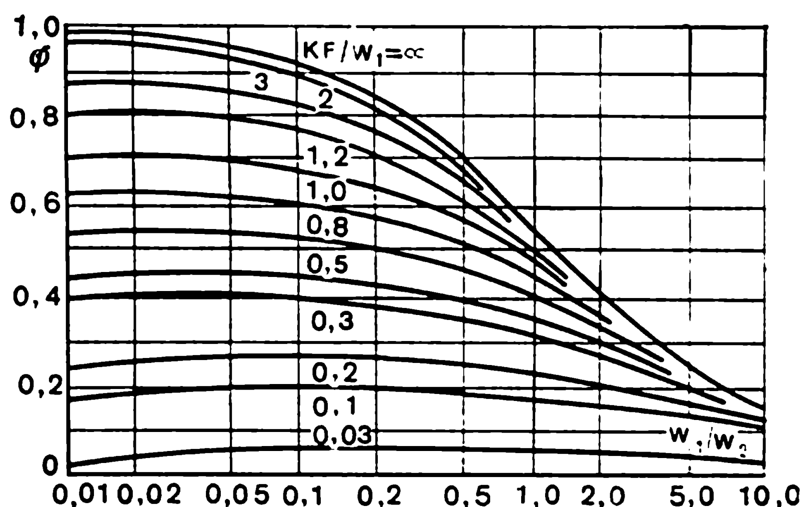


Fig. X.5. Graphique de Φ par rapport à kF/W_1 et W_1/W_2 pour le courant direct

$$\delta t_2=\delta t_1 W_1/W_2=(t_1'-t_2')\,\Phi W_1/W_2. \qquad (X.26)$$

Les températures finales des caloporteurs sont déterminées d'après les égalités

$$t_1'' = t_1' - \delta t_1 \text{ et } t_2'' = t_1' + \delta t_2. \qquad \text{(X.27)}$$

La quantité de chaleur transmise par le caloporteur chauffant au caloporteur chauffé est déterminée par l'équation du bilan thermique

$$Q = W_1 \delta t_1 = W_1 (t_1' - t_2') \Phi. \qquad \text{(X.28)}$$

Il convient de retenir que dans le calcul indiqué il faut se donner au préalable la valeur du coefficient K, du fait que la grandeur inconnue est la température déterminante du caloporteur. Le calcul mentionné doit être considéré comme la première approximation. Après le calcul des températures finales des caloporteurs, il faut déterminer la valeur du coefficient de transfert de chaleur, et dans le cas d'un écart important par rapport à la valeur adoptée, reprendre le calcul. Pour le contre-courant, les formules se déduisent d'une façon analogue et se présentent sous la forme

$$\delta t_1 = t_1' - t_1'' = (t_1' - t_2') \frac{1 - e^{-(1 - W_1/W_2) KF/W_1}}{1 - (W_1/W_2) e^{-(1 - W_1/W_2) KF/W_1}} = (t_1' - t_2') z;$$

$$\delta t_2 = (t_1' - t_2') z W_1/W_2;$$

$$Q = W_1 \delta t_1 = W_1 (t_1' - t_2') z. \qquad \text{(X.29)}$$

Dans le calcul constructif, parmi les inconnues figurent les dimensions géométriques de l'échangeur. Ce calcul part également de l'équation du bilan thermique et de l'équation du transfert de chaleur. La grandeur de la surface d'échange de chaleur F se détermine par calcul constructif à partir de l'équation de transfert de chaleur

$$F = \frac{Q}{K \Delta t_{\text{moy}}}. \qquad \text{(X.30)}$$

Si parmi les données connues il y a la chaleur, le coefficient de transfert de chaleur et la pression thermique moyenne, le calcul constructif ne présente pas de difficultés. Dans des cas plus compliqués il faut faire appel aux approximations successives ou à la résolution graphique.

En plus de la méthode de résolution envisagée, il existe une autre, fondée sur les notions d'efficacité (rendement) de l'échangeur ε et le nombre de transfert de chaleur N, ce qui permet, dans de nombreux cas, d'obtenir une solution immédiate en nous dispensant de recourir aux approximations successives.

L'efficacité ε exprime la relation entre la chaleur réellement transmise

$$W_{\text{ch}} (t_{\text{ch}1} - t_{\text{ch}2}) = W_{\text{fr}} (t_{\text{fr}2} - t_{\text{fr}1})$$

et la quantité de chaleur maximale qui peut être transmise seulement par un échangeur à contre-courant idéal à surface de transfert de chaleur infiniment grande, et plus précisément

$$W_{fr}\,(t_{ch1}-t_{fr1}),\ \text{si}\ W_{fr}<W_{ch},$$

ou

$$W_{ch}\,(t_{ch1}-t_{fr1}),\ \text{si}\ W_{ch}<W_{fr}.$$

L'efficacité (le rendement) de l'échangeur

$$\varepsilon=\frac{W_{ch}\,(t_{ch\,1}-t_{ch\,2})}{W_{min}\,(t_{ch\,1}-t_{fr\,1})}=\frac{W_{fr}\,(t_{fr\,2}-t_{fr\,1})}{W_{min}\,(t_{ch\,1}-t_{fr\,1})}, \qquad (X.31)$$

où W_{min} est la plus petite des grandeurs W_{ch} et W_{fr}.

Le nombre d'unités N de transfert de chaleur est une caractéristique sans dimensions de l'échangeur du point de vue des possibilités du transfert.

Le nombre d'unités de transfert de chaleur

$$N=\frac{K_{moy}F}{W_{min}}=\frac{1}{W_{min}}\int_0^F K\,dF, \qquad (X.32)$$

où F est la même surface d'échange de chaleur qui a été utilisée pour calculer le coefficient de transfert.

Sous sa forme générale la relation entre les paramètres ε, N et W_{min}/W_{max} peut s'écrire

$$\varepsilon=\Phi\,(N,\ W_{min}/W_{max},\ \text{mode du mouvement des courants}). \qquad (X.33)$$

Ces paramètres sans dimensions permettent de représenter les caractéristiques des échangeurs sous une forme graphique commode.

Les conditions thermiques dans un échangeur à contre-courant à W_{ch}/W_{fr} (c'est-à-dire $W_{ch}=W_{min}$) sont schématisées par le graphique de la figure X.6. L'examen du bilan d'énergie donne

$$dq=-W_{ch}dt_{ch}=W_{fr}dt_{fr}. \qquad (X.34)$$

Il est clair que la ligne « fonctionnelle » qui exprime t_{ch} en fonction de t_{fr} présente une pente

$$m_0=dt_{ch}/dt_{fr}=W_{fr}/W_{ch}=\text{const} \qquad (X.35)$$

pour le cas de W_{ch} et W_{fr} constants. D'autre part, pour la condition adoptée $W_{ch}<W_{fr}$, m_0 est plus grand que l'unité. La ligne fonc-

tionnelle est représentée sur la figure X.7. Là aussi est tracée la ligne qui correspond à l'équilibre thermique des deux courants à $t_{ch} = t_{fr}$. Le graphique montre que la différence entre ces deux lignes,

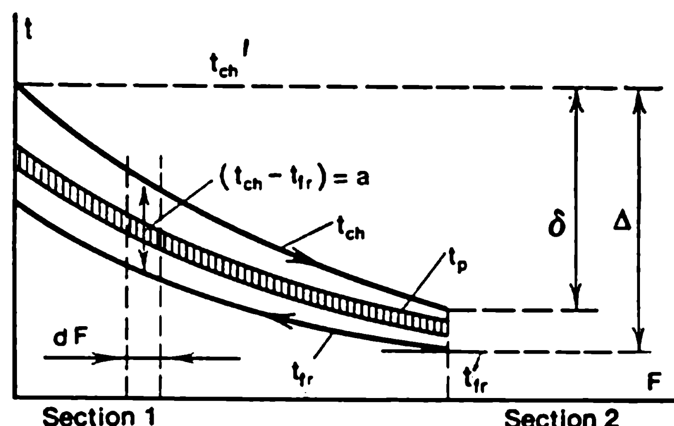


Fig. X.6. Allure de la variation de la température pour le contre-courant avec $W_{ch} > W_{fr}$

définie au point donné par les coordonnées t_{ch}, t_{fr}, doit être égale à $t_{ch} - t_{fr}$, ce qui s'ensuit de la relation entre les conditions thermiques et la grandeur de la surface de transfert de chaleur.

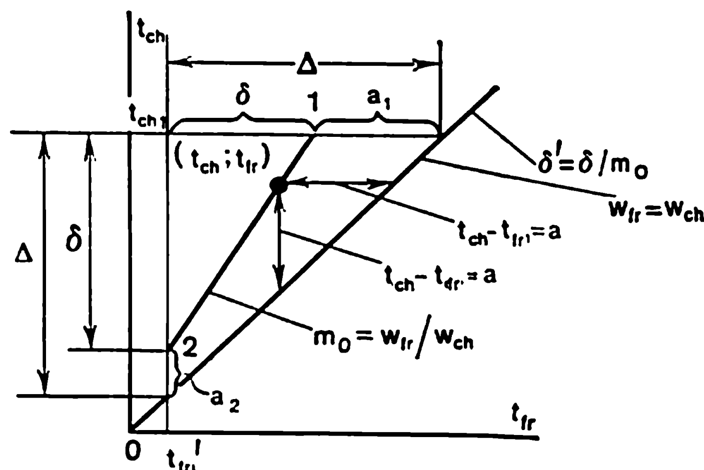


Fig. X.7. Graphique « ligne opératoire-ligne d'équilibre » pour le contre-courant avec $W_{ch} < W_{fr}$

La définition de l'efficacité

$$\varepsilon = \frac{W_{ch}(t_{ch\,1} - t_{ch\,2})}{W_{min}(t_{ch\,1} - t_{fr\,1})} = \frac{W_{ch}(t_{ch\,1} - t_{ch\,2})}{W_{ch}(t_{ch\,1} - t_{fr\,1})}$$

implique

$$\varepsilon = (t_{ch1} - t_{ch2})/(t_{ch1} - t_{fr1}) = \delta/\Delta, \qquad \text{(X.36)}$$

où δ et Δ sont déterminés d'après le graphique « ligne fonctionnelle-ligne d'équilibre ».

En complétant l'équation du bilan d'énergie, on peut écrire l'équation du transfert de chaleur pour le flux thermique dq et la surface d'échange de chaleur dF:

$$dq = K\,(t_{ch} - t_{fr})\,dF. \qquad \text{(X.37)}$$

L'équation (X.34) permet de tirer

$$d\,(t_{ch} - t_{fr}) = [1/W_{fr} - 1/W_{ch}]\,dq.$$

En résolvant ensemble ces deux équations, on obtient

$$\frac{d\,(t_{ch}-t_{fr})}{t_{ch}-t_{fr}} = -\left[1-\frac{W_{ch}}{W_{fr}}\right]\frac{K}{W_{ch}}\,dF. \qquad \text{(X.38)}$$

Cette expression peut être intégrée sans peine dans les limites des conditions d'entrée et de sortie du fluide chaud

$$\frac{t_{ch\,2}-t_{fr\,2}}{t_{ch\,1}-t_{fr\,1}} = \frac{a_2}{a_1} = e^{-N\,[1-W_{ch}/W_{fr}]}. \qquad \text{(X.39)}$$

En examinant le graphique « ligne fonctionnelle-ligne d'équilibre » on découvre que

$$t_{ch2} - t_{fr2} = a_2 = \Delta - \delta;$$

$$t_{ch1} - t_{fr1} = a_1 = \Delta - \delta' = \Delta - \delta/m_0.$$

De la sorte,

$$\frac{t_{ch\,2}-t_{fr\,2}}{t_{ch\,1}-t_{fr\,1}} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1-\delta/\Delta}{1-\delta/\Delta m_0},$$

où $m_0 = W_{fr}/W_{ch}$. Ensuite, utilisons l'équation (X.36) pour obtenir

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1-\varepsilon}{1-(W_{ch}/W_{fr})\,\varepsilon}.$$

En résolvant cette équation avec l'équation (X.39), puis en transformant légèrement l'équation obtenue, on aboutit à l'équation

$$\varepsilon = \frac{1-e^{-N\,(1-W_{min}/W_{max})}}{1-(W_{min}/W_{max})\,e^{-N(1-W_{min}/W_{max})}}, \qquad \text{(X.40)}$$

où dans notre cas $W_{min} = W_{ch}$ et $W_{max} = W_{fr}$. Pourtant, on peut montrer que dans le cas $W_{fr} = W_{min}$ l'équation résultante pour ε est identique à l'équation (X.40). Dans le cas du courant direct, une déduction analogue amène la relation

$$\varepsilon = \frac{1-e^{-N\,(1+W_{min}/W_{max})}}{1+W_{min}/W_{max}}. \qquad \text{(X.41)}$$

Dans les calculs des échangeurs on applique généralement l'équation

$$Q = KF\varepsilon_{\Delta t}\Delta t_{\log}, \qquad (X.42)$$

où $\Delta t_{\log}$ est la moyenne logarithmique de la différence des températures, calculée pour le contre-courant réel.

Pour un échangeur à contre-courant $\varepsilon_{\Delta t} = 1$, alors que pour tous les autres modes de mouvement, $\varepsilon_{\Delta t}$ est inférieur à l'unité.

Pour illustrer l'avantage de la méthode décrite, considérons la méthodologie de calcul de vérification, lorsque sont donnés F et

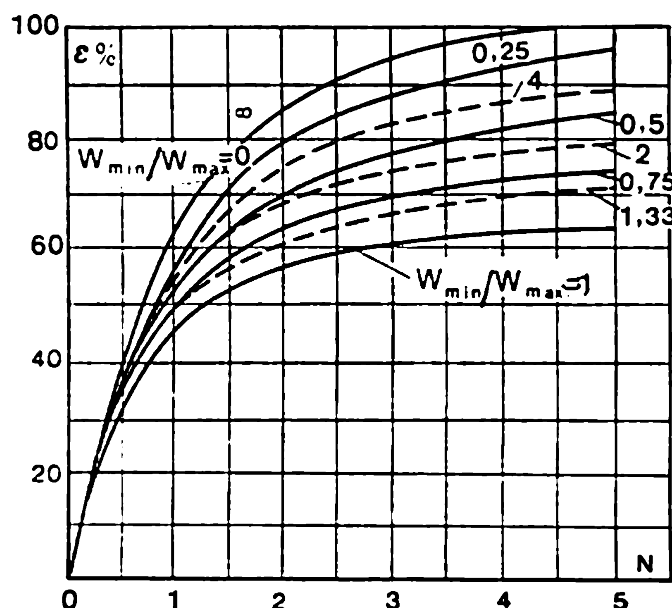


Fig. X.8. Caractéristique de l'échangeur à courant croisé

K, W_{fr}, W_{ch}, t_{ch1} et t_{fr1}, et il faut déterminer la température des fluides à la sortie.

En utilisant la moyenne arithmétique de la différence des températures $\Delta t_{\log}$, on calcule d'abord $z = W_{fr}/W_{ch}$, puis on se donne la température finale pour calculer

$$x = (t_{fr2} - t_{fr1})/(t_{ch1} - t_{fr1})$$

en première approximation. En utilisant le graphique correspondant et la valeur approchée de x, on détermine en première approximation $\varepsilon_{\Delta t}$. Ensuite on évalue en première approximation $\Delta t_{\log}$ et on calcule en première approximation $Q = KF\varepsilon_{\Delta t}\Delta t_{\log}$. La température finale calculée est comparée avec celle qui a été adoptée, puis on reprend le calcul jusqu'à l'obtention d'une bonne coïncidence des températures retenue et calculée.

Dans le cas du calcul avec utilisation de ε et N, calculons d'après les données de départ W_{min}/W_{max} et N. En utilisant la figure X.8 pour le mode donné du mouvement relatif des courants et la

valeur de W_{min}/W_{max}, déterminons ε. Calculons la charge thermique

$$Q = W_{min} (t_{ch1} - t_{fr1})\, \varepsilon$$

et les valeurs des températures finales d'après les équations

$$(t_{fr2} - t_{fr1}) W_{fr} = Q = (t_{ch1} - t_{ch2}) W_{ch}.$$

Il résulte de la comparaison ci-dessus qu'on peut résoudre directement le problème en utilisant la relation entre ε et N, alors que le recours à la moyenne logarithmique de la différence des températures impose plusieurs approximations successives.

§ X.3. Principes du calcul thermique des régénérateurs

Les échangeurs par régénération se font généralement sous la forme d'ajutages (sphères, treillis, tubes, etc.) placés à l'intérieur du tube et baignés périodiquement par les caloporteurs chaud et froid. Si on néglige les fuites de chaleur par le matériau de l'ajutage dans les sens longitudinal et transversal, l'équation différentielle du bilan de chaleur pour le matériau de l'ajutage s'écrit

$$\alpha A_L (t_g - t)\, dx\, d\tau = c_s M_L\, dx \frac{\partial t}{\partial \tau}\, d\tau, \qquad (X.43)$$

les équations d'énergie du caloporteur sont respectivement,

$$\alpha A_L (t - t_g)\, dx\, dt = \rho c V_L\, dx \frac{\partial t_g}{\partial \tau}\, d\tau + cm\, d\tau \frac{\partial t_g}{\partial x}\, dx \qquad (X.44)$$

ou

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\alpha A_L}{c_s M_L} (t_g - t), \qquad (X.45)$$

où A_L est le périmètre de la surface d'échange de chaleur; M_L, la masse du matériau de l'ajutage par unité de longueur; c_s, la chaleur spécifique du matériau de l'ajutage et

$$\frac{\partial t_g}{\partial x} + \rho \frac{V_L}{m} \frac{\partial t_g}{\partial \tau} = \frac{\alpha A_g}{cm} (t - t_g). \qquad (X.46)$$

Presque dans tous les cas le terme $\rho V_L/m$ est très petit.

Pour un cycle du régénérateur les conditions d'univalence sont de la forme:

$$\begin{aligned} &\text{pour } x = 0,\ t_g = t_{g0} = \text{const}; \\ &\text{pour } \tau = 0,\ t = t_0 = \text{const}. \end{aligned} \qquad (X.47)$$

Pour l'action continue à contre-courant et à période $\tau_{ch} = \text{const}$:

$$\text{pour } x = 0,\ t_g = t_{ch}.$$

Pendant la période de refroidissement τ_{ref} pour $x = L$ les conditions aux limites $t_g = t_{gs}$; d'autre part, les températures du matériau de l'ajutage et du caloporteur sont égales.

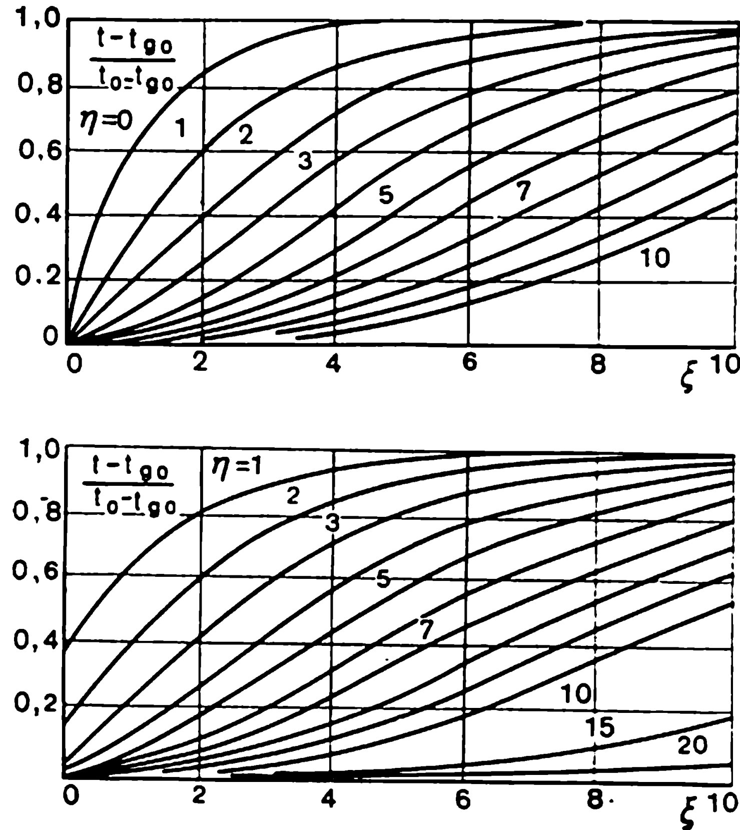


Fig. X.9. Variations des températures de la matrice et du liquide dans un régénérateur

Introduisons de nouvelles variables:

$$\xi = \frac{\alpha A_L}{cm} x; \quad \eta = \frac{\alpha A_L}{c_s M_L} \tau,$$

il vient:

$$\partial t / \partial \eta = t_g - t; \tag{X.48}$$

$$\partial t / \partial \xi = t - t_g. \tag{X.49}$$

Les figures X.9, X.10 visualisent les résultats de résolution de ce système d'équations.

H. Hausen a entrepris dans son ouvrage la tentative de tenir compte de l'influence qu'execre l'irrégularité de la distribution de la température dans le matériau du régénérateur.

La chaleur transmise par le gaz à la paroi est déterminée par la formule

$$Q_r = \alpha_{ch} A \left(\bar{t}_{g.\,ch} - \bar{t}_{p.\,ch}\right) \tau_{ch} \qquad \text{(X.50)}$$

et de la paroi au gaz froid, par la formule

$$Q_r = \alpha_{ref} A \left(\bar{t}_{p.ref} - \bar{t}_{g.ref}\right) \tau_{ref}, \qquad \text{(X.51)}$$

où $\bar{t}_g$ est la température moyenne du gaz ; $\bar{t}_p$, la température moyenne du matériau.

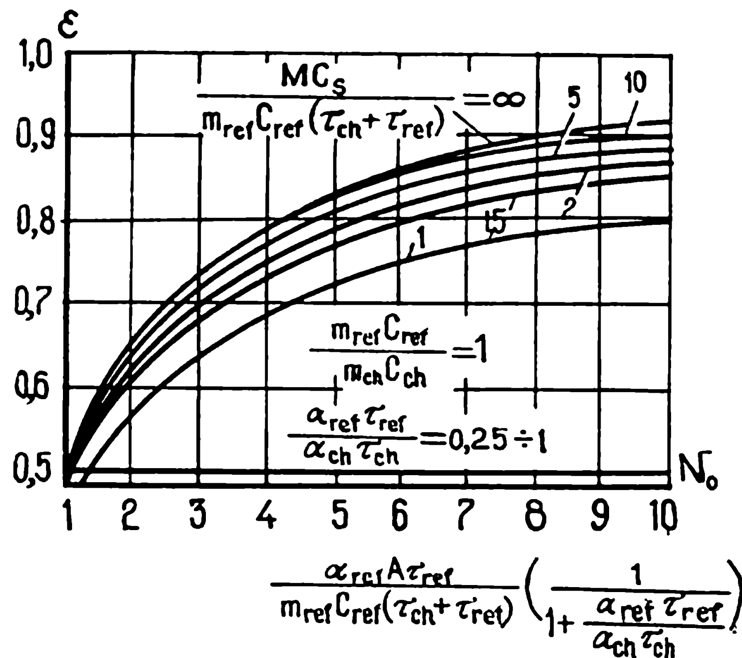


Fig. X.10. Efficacité des récupérateurs sous un régime quasi stationnaire

Si la température change dans le temps linéairement, c'est-à-dire si

$$\partial t / \partial \tau = \text{const},$$

il vient

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right) = C$$

et à la suite d'une double intégration on obtient une parabole. La pente de la parabole peut se calculer d'après les considérations suivantes (fig. X.11)

$$\frac{Q_r}{\tau_{ref}} = -\lambda A \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_p, \quad l = \left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_p = \left(\frac{Q_r}{A}\right)\left(\frac{b}{2\lambda\tau_{ref}}\right).$$

La hauteur de la parabole est égale à la moitié de cette grandeur, et la différence

$$\bar{t}_m - \bar{t}_{p.\,ref}$$

est égale à 2/3 de la hauteur de la parabole; donc

$$\bar{t}_m - \bar{t}_{p.ref} = \frac{Q_r}{A} \frac{b}{6\lambda\tau_{ref}}. \tag{X.52}$$

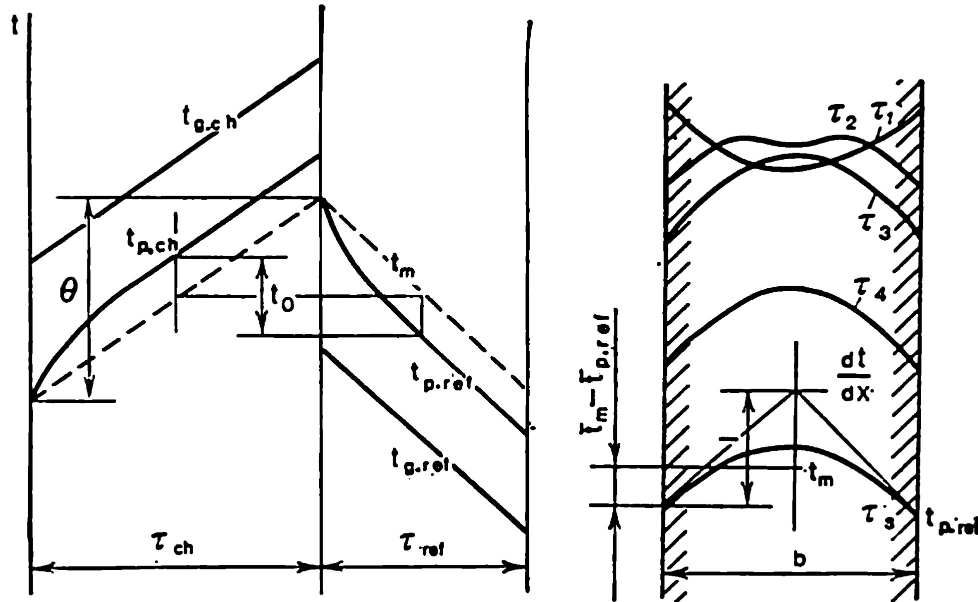


Fig. X.11. Variations des températures des parois et du gaz dans le temps

Pour la période de chauffage

$$\bar{t}_{p.ch} - \bar{t}_m = \frac{Q_r}{A} \frac{b}{6\lambda\tau_{ch}} \tag{X.53}$$

et les différences des températures s'écrivent

$$\bar{t}_{p.ch} - \bar{t}_{p.ref} = \frac{Q_r}{A} \left(\frac{1}{\tau_{ch}} + \frac{1}{\tau_{ref}} \right) \frac{b}{6\lambda}; \tag{X.54}$$

$$t_{g.ch} - t_{p.ch} = \frac{Q_r}{A} \frac{1}{\alpha_{ch}\tau_{ch}}; \tag{X.55}$$

$$t_{p.ref} - t_{g.ref} = \frac{Q_r}{A} \frac{1}{\alpha_{ch}\tau_{ch}} \tag{X.56}$$

ou

$$t_{g.ch} - t_{g.ref} = \frac{Q_r}{A} \left[\frac{1}{\alpha_{ch}\tau_{ch}} + \frac{1}{\alpha_{ref}\tau_{ref}} + \left(\frac{1}{\tau_{ch}} + \frac{1}{\tau_{ref}} \right) \frac{b}{6\lambda} \right]. \tag{X.57}$$

et on a finalement

$$Q_r = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{ch}\tau_{ch}} + \frac{1}{\alpha_{ref}\tau_{ref}} + \left(\frac{1}{\tau_{ch}} + \frac{1}{\tau_{ref}} \right) \frac{b}{6\lambda}} A \, (\bar{t}_{g.ch} - \bar{t}_{g.ref}). \tag{X.58}$$

§ X.4. Comparaison des récupérateurs et des régénérateurs

Sur la figure X.12 l'écoulement stabilisé de deux gaz I et II dans un récupérateur est comparé avec l'écoulement alternant dans un régénérateur. On peut supposer que la conductivité thermique de

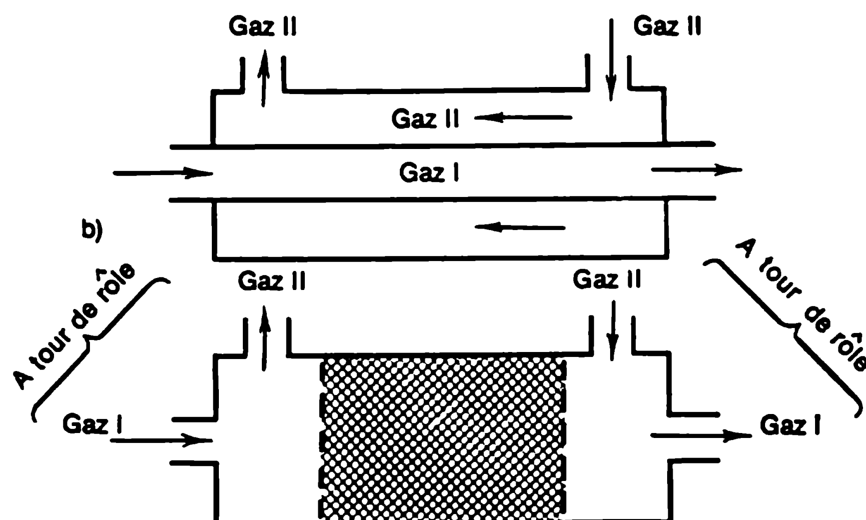


Fig. X.12. Schéma comparatif d'un récupérateur (*a*) et d'un régénérateur (*b*)

la paroi est nulle dans la direction x et infiniment grande dans la direction y ($K_x = 0$; $K_y = \infty$).

La distribution des températures de la paroi en régime stationnaire du régénérateur à contre-courant peut être représentée en

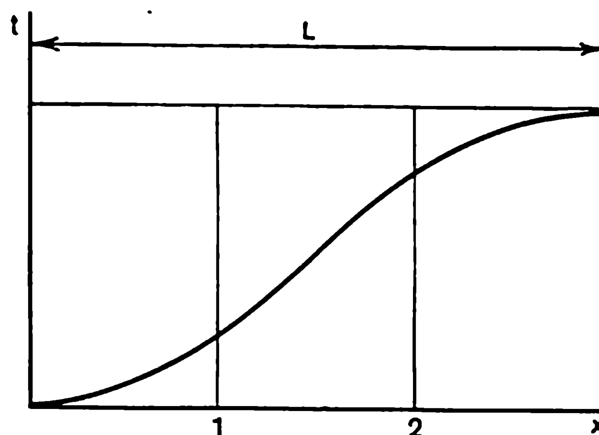


Fig. X.13. Courbe de la distribution de la température de la paroi d'un régénérateur

moyenne par une courbe en S donnée par la figure X.13. Pendant la période de chauffage la température augmente en tous les points; dans la période de refroidissement, elle baisse de façon que la courbe

se déplace dans le temps en haut et en bas à peu près à des distances égales. La courbe de la distribution de la température dans le gaz est identique à celle de la figure X.13 de $\tau = 0$ à $\tau = \tau$. La masse m peut passer par une certaine section droite du récupérateur, et les températures en deux points aux distances x_1 et x_2 du bord gauche peuvent prendre les valeurs $t_{I.1}$ et $t_{I.2}$. Etant donné que sous le régime stationnaire le gaz I reçoit entre les points *1* et *2* la même quantité de chaleur que perd le gaz *II*, il vient

$$m_I (c_p)_I (t_{I.2} - t_{I.1}) = m_{II} (c_p)_{II} (t_{II.2} - t_{II.1}). \qquad \text{(X.59)}$$

Une relation analogue s'obtient pour un régénérateur si l'échange de chaleur entre les points *1* et *2* est envisagé d'abord dans la période de refroidissement p_I, puis dans celle d'échauffement p_{II}. Si on désigne par $t_{I.1m}$ et $t_{I.2m}$ les températures moyennes respectivement aux points *1* et *2* pour la période p_I, la chaleur reçue par le gaz I entre les points *1* et *2* s'écrit

$$Q_I = m_I (c_p)_I [t_{I.2m} - t_{I.1m}],$$

et celle cédé par le gaz *II*,

$$Q_{II} = \pm m_{II} (c_p)_{II} [t_{II.2m} - t_{II.1m}].$$

Sous le régime stationnaire $Q_I = Q_{II}$; donc

$$m_I (c_p)_I [t_{I.2m} - t_{I.1m}] = m_{II} (c_p)_{II} [t_{II.2m} - t_{II.1m}]. \qquad \text{(X.60)}$$

En partant du fait que les positions des points *1* et *2* sont choisies arbitrairement pour le cas de masses, chaleurs spécifiques et températures à l'entrée égales sous les conditions que les températures du régénérateur sont dans le temps des grandeurs moyennes, on peut tirer la conclusion suivante. Si en un point quelconque du régénérateur les deux gaz ont les mêmes températures qu'au point correspondant du récupérateur, alors à tout point du régénérateur correspond un point du récupérateur, où les températures des deux gaz sont égales aux températures correspondantes dans le régénérateur. Il s'ensuit que les différences des températures des deux gaz dans les deux types des échangeurs sont égales elles aussi. Ceci ne signifie pourtant pas que la distance $x_2 - x_1$ entre deux points correspondants est la même dans les deux échangeurs.

Si on néglige la chute de la température dans la paroi séparatrice du récupérateur dans le sens y et utilise les grandeurs α_I, α_{II} et

t_p, la quantité de chaleur transmise suivant la longueur en un intervalle de temps Δt s'écrit

$$dQ = \alpha_I W\, dx \Delta\tau\, (t_p - t_I), \qquad (X.61)$$

ou

$$dQ = \alpha_{II}\, W\, dx \Delta\tau\, (t_{II} - t_p). \qquad (X.62)$$

Si on introduit le coefficient de transfert de chaleur total

$$K = \frac{1}{1/\alpha_I + 1/\alpha_{II}}, \qquad (X.63)$$

les équations (X.61), (X.62) peuvent être réunies en une seule

$$dQ = KW\, dx \Delta\tau\, (t_{II} - t_I). \qquad (X.64)$$

Pour déduire les équations correspondantes d'un régénérateur, on peut admettre que

$$\Delta\tau = p_I = p_{II} = p. \qquad (X.65)$$

La chaleur transmise au gaz froid en un intervalle de temps $d\tau$ est

$$d^2Q = \alpha_I W\, dx\, (t_{W.I} - t_I)\, d\tau.$$

La chaleur transmise en une période $\Delta\tau = p_I$

$$dQ = \alpha_I W\, dx \int_0^{p_I} (t_{W.I} - t_I)\, d\tau = \alpha_I W\, dx p_I\, (t_{W.Im} - t_{Im}). \qquad (X.66)$$

Pour la période de chauffage $\Delta\tau = p_{II}$

$$dQ = \alpha_{II} W\, dx p_{II}\, (t_{II\,m} - t_{W.IIm}). \qquad (X.67)$$

Dans le cas donné par l'équation (X.65) ces deux équations correspondent aux équations (X.61) et (X.62). Chacune d'elles n'est pourtant vraie que pour la demi-période de fonctionnement. Par conséquent, si les grandeurs correspondantes h et t sont égales, l'intensité de l'échange de chaleur dans le récupérateur est deux fois supérieure à celle du régénérateur. Ceci s'explique par le fait qu'avec $\Delta z = W$ et $\Delta x = L$ dans le récupérateur sont utilisées deux aires de surfaces WL par rapport à une seule aire active de surface WL utilisée dans le régénérateur. Donc, pour assurer un fonctionnement continu, il faut disposer soit de deux régénérateurs, soit d'un seul récupérateur. D'autre part, les températures moyennes $t_{p.Im}$ et $t_{p.IIm}$ dans le régénérateur sont différentes, alors que dans le récupérateur (pour $K_{st} = \infty$)

$$t_{p.I} = t_{p.II} = t_p. \qquad (X.68)$$

Conformément à la figure X.14,

$$t_{p.IIm} - t_{p.Im} = \Delta t_{pm}, \qquad (X.69)$$

et les équations (X.66) et (X.67) peuvent donc être réunies

$$dQ = KWdxp\ [(t_{IIm} - t_{Im}) - \Delta t_{pm}]. \qquad \text{(X.70)}$$

Pour $p \to 0$, $\Delta t_{pm} \to 0$, les courbes $t_{p,I}$ et $t_{p,II}$ (fig. X.14) deviennent des lignes droites identiques. Dans ce cas l'équation (X.70) acquiert une forme qui ressemble à celle de l'équation (X.64).

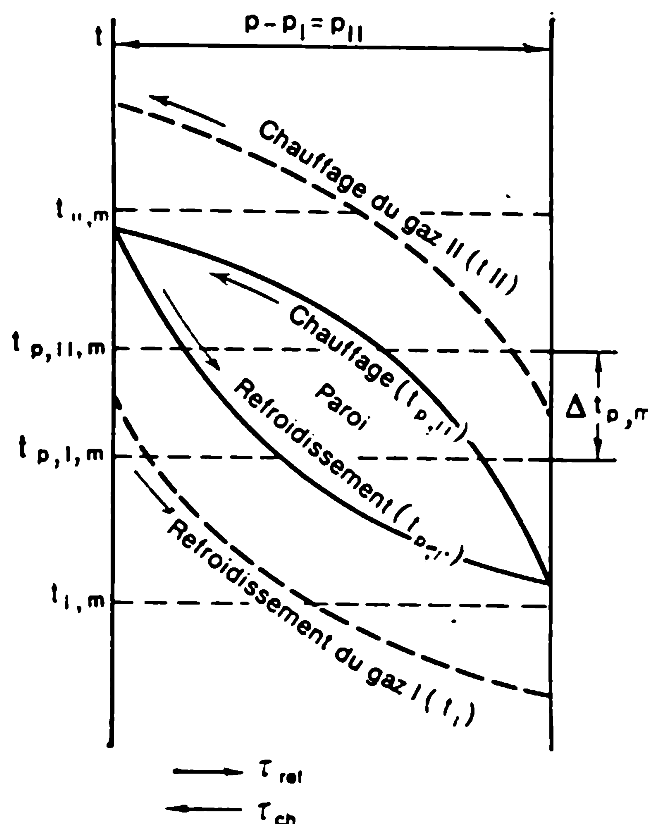


Fig. X.14. Variations des températures dans les périodes de chauffage et de refroidissement d'un régénérateur

Si maintenant pour un système de deux régénérateurs au point x la différence $t_{II,m} - t_{I,m}$ est la même que celle $t_{II} - t_I$ d'un récupérateur pour la même valeur de x, ceci reste vrai également pour toute valeur de x. Autrement dit, la distance $x_2 - x_1$ entre deux points correspondants d'un récupérateur et d'un régénérateur est la même.

Pour $p > 0$, pourtant, $\Delta t_{p,\,m} \neq 0$, et cette différence augmente avec l'augmentation de p dans le cas du contre-courant et lorsque les points x s'approchent des extrémités du récupérateur. Donc, les points x_I et x_{II}, où les différences des températures pour le récupérateur et le régénérateur sont les mêmes, ne sont plus identi-

ques. Pour un courant direct, $\Delta t_{p.\,m}$ peut prendre des valeurs négatives. L'efficacité d'un régénérateur peut se déterminer comme

$$\eta_{réd} = Q/Q_{1d}, \qquad (X.71)$$

où Q est la quantité de chaleur réellement transmise; Q_{1d}, la valeur idéale définie par la quantité de chaleur qui serait transmise si la température du gaz froid pouvait être poussée jusqu'à celle du gaz chaud à l'entrée. Pour des périodes infiniment petites, dans le cas du contre-courant, la grandeur $\eta_{rég}$ est la même que celle d'un récupérateur, mais avec l'augmentation de p, $\eta_{rég}$ diminue. Pourtant, dans le cas du courant direct, si $\Delta t_{p.m}$ devient une grandeur négative, $\eta_{rég}$ augmente avec la croissance de p. Puisque dans le cas général l'efficacité d'un régénérateur est plus petite que celle d'un récupérateur, dans certains cas les avantages importants d'un régénérateur sont déterminés par des considérations relatives à la construction. En particulier, les surfaces d'échange de chaleur d'un régénérateur peuvent être sensiblement plus grandes que pour un récupérateur.

On a intérêt de comparer les coefficients de transfert de chaleur totaux d'un récupérateur et des systèmes de deux régénérateurs identiques chacun de période $p = p_{I} = p_{II}$ en utilisant l'équation (X.58):

$$\frac{1}{U} = \left[\frac{1}{\alpha_{I} p_{I}} + \frac{Y_{p}}{3K_{y}}\left(\frac{1}{p_{I}} + \frac{1}{p_{II}}\right) + \frac{1}{\alpha_{II} p_{II}}\right](p_{I} + p_{II}). \qquad (X.72)$$

Le coefficient de transfert de chaleur total K_d du système considéré sera le double de la grandeur K donnée par l'équation (X.72)

$$\frac{1}{K_d} = \frac{1}{2K} = \frac{1}{\alpha_{I}} + 2\,\frac{Y_{p}}{3K_{y}} + \frac{1}{\alpha_{II}}. \qquad (X.73)$$

En même temps, pour un récupérateur équivalent

$$\frac{1}{K_{réc}} = \frac{1}{\alpha_{I}} + 2\,\frac{Y_{p.réc}}{K_{y}} + \frac{1}{\alpha_{II}}, \qquad (X.74)$$

où $2Y_{p.réc}$ est l'épaisseur de la paroi du récupérateur.

Par conséquent, deux régénérateurs à épaisseur de la paroi $2Y_p$ peuvent transmettre la même quantité de chaleur qu'un récupérateur à épaisseur de la paroi $2Y_{p.\,réc} = 2/3Y_p$. Alors que par la paroi d'un récupérateur doit passer toute la quantité de chaleur, dans la paroi du régénérateur elle pénètre environ à 1/4 de son épaisseur, puis revient, de façon que son parcours total est environ égal à la moitié de l'épaisseur de la paroi. Cette différence dans le mécanisme de l'échange de chaleur fait que la différence de températures $t_{p.\,IIm}$ — — $t_{p.\,Im}$ nécessaire pour transmettre une quantité définie de chaleur dans un régénérateur est dédoublée par rapport à la différence de températures correspondante dans un récupérateur. Bien plus, la quantité de chaleur cédée à la paroi diminue avec l'augmentation

de la distance y de la surface contournée, de sorte que la différence de températures nécessaire est également plus petite, ce qui entraîne la diminution de la différence de températures environ de 2/3, la diminution totale du rapport devenant égale à $(1/2)\cdot(2/3) = 1/3$.

Par conséquent, le même flux thermique dans un régénérateur impose seulement 1/3 de la différence de températures par rapport au récupérateur. Notons que pour déterminer l'intensité du transfert de chaleur total par 1° de différence de températures, dans l'équation (X.72), le coefficient K_d doit être multiplié par la valeur de la surface chauffée d'un seul régénérateur. Ceci correspond au fait qu'un récupérateur possède également deux surfaces (extérieure et intérieure), mais le calcul ne porte que sur une seule, ou plus précisément sur leur valeur moyenne.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Андрианов В. Н.* Основы радиационного и сложного теплообмена. Москва, 1972
2. *Абрамович Г. Н.* Теория турбулентных струй. Москва, 1960
3. *Блох А. Г.* Основы теплообмена излучением. Москва, 1962
4. *Bridgman P. W.* Dimensionnal analysis. Oxford, 1931
5. *Воскресенский К. Д.* Сборник расчетов и задач по теплопередаче. Москва, 1959
6. *Вукалович М. П.*, Новиков И. И. Термодинамика. Москва, 1972
7. *Гинзбург И. П.* Теория сопротивления и теплопередачи. Ленинград, 1970
8. *Gröber H.*, *Erk S.* und *Grigull U.* Die Grundgezetze der Wärmeubertrangung. Berlin, 1955
9. *Гухман А. А.* Введение в теорию подобия. Москва, 1973
10. *Dorrans W. H.* Viscosus hypersonic flow. New york, Mc Graw-Hill, 1962
11. *Дорощук В. Е.* Кризисы теплообмена при кипении воды в трубах. Москва, 1970
12. Жидкометаллические теплоносители. (В. М. Боришанский, С. С. Кутателадзе, И. И. Новиков, О. С. Федынский) Москва, 1967
13. *Жукаускас А.*, *Макарявичус В.*, *Шланчаускас А.* Теплоотдача пучков труб в поперечном потоке жидкости. Вильнюс, 1972
14. *Исаченко В. П.*, *Осипов В. А.*, *Сукомел А. С.* Теплопередача, Москва, 1975
15. *Иевлев В. М.* Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. Москва, 1975
16. *Кейс В. М.* Конвективный тепло- и массообмен. Москва, 1972
17. *Кутателадзе С. С.* Основы теории теплообмена. Новосибирск, 1970
18. *Кутателадзе С. С.* Пристенная турбулентность. Новосибирск, 1973
19. *Кутателадзе С. С. Леонтьев А. И.* Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. Москва, 1972
20. *Кутателадзе С. С.*, *Стырикович М. А.* Гидродинамика газожидкостных систем. Москва, 1976
21. *Лапин Ю. В.* Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. Москва, 1970

22. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. Москва, 1970
23. *Лыков А. В.* Тепломассообмен. Москва, 1972
24. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. Москва, 1967
25. *Михеев М. А.* Основы теплопередачи. Москва, 1956
26. *Новиков И. И.*, Воскресенский К. Д. Прикладная термодинамика и теплопередача. Москва, 1961
27. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике (В. С. Авдуевский и др.; Под ред. В. К. Кошкина) Москва, 1975
28. *Петухов Б. С.* Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. Москва, 1967
29. *Петухов Б. С.*, *Генин Л. Г.*, *Ковалев С. А.* Теплообмен в ядерных энергетических установках. Москва, 1974
30. *Романенко П. Н.* Тепломассообмен и трение при градиентном течении жидкостей. Москва, 1971
31. *Романенко П. Н.*, *Обливин А. Н.*, *Семенов Ю. П.* Теплопередача. Москва, 1969
32. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. Москва, 1977
33. *Стырикович М. А.*, *Мартынов О. И.*, *Миропольский З. Л.* Процессы генерации пара на электростанциях. Москва, 1969
34. Теплообмен в энергетических установках космических аппаратов (Б. М. Галицейский, Ю. И. Данилов, Г. А. Дрейцер, В. К. Кошкин) Москва, 1975
35. *Федяевский К. К.*, *Гиневский А. С.*, *Колесников О. В.* Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Москва, 1973
36. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. Москва, 1969
37. *Шнейдер В.* Инженерные проблемы теплопроводности. Москва, 1960
38. *Шорин С. Н.* Теплопередача. Москва, 1964
39. *Moffat R. G.*, *Kays W. M.*, Int J. Heat and Mass Transfer. 1968, v. 11, n° 10
40. *Юдаев Б. Н.*, Теплопередача. Москва, 1973
41. *Eckert E. R. G.*, *Drake R. M.* Introduction to the transfer of heat and mass. 1959
42. *Spalding D. B.*, *Patankar S. V.* Heat Mass transfer in Boundary Layers. London, 1967
43. *Sparrow E. M.*, *Cess R. D.* Radiation Heat Transfer. 1966
44. *Richtmayer R.*, *Morton K.* Difference Methods for Initial Value Problems. New York, London, Sydney, 1967

INDEX

TABLE DES MATIÈRES

